

Notatki do ćwiczeń z Mechaniki Klasycznej

Wojciech Niedziółka

2 Dynamika

Zad. 6

Nieważkie ciało o masie m i prędkości początkowej v_0 porusza się pod działaniem siły oporu $\vec{F} = \alpha v^n \frac{\vec{v}}{v}$. Znaleźć ruch, zasięg ruchu i czas trwania ruchu.

Rozw. 6

Nieważkie ciało w kontekście tego zadania oznacza, że nie działa siła grawitacji (jedyna siła to siła oporu). Posłużmy się II zasadą dynamiki Newtona

$$\vec{F} = m\vec{a} \implies \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\alpha}{m} v^n \frac{\vec{v}}{v} \quad (2.1)$$

Intuicja podpowiada, że ruch pod wpływem wyłącznie siły oporu będzie odbywał się po prostej. Istotnie, siła będzie stale równoległa do wektora prędkości i nie będzie miała składowej normalnej, zatem nasze ciało nie będzie "skręcać". Możemy wprowadzić układ współrzędnych, w którym $\vec{a} = a\hat{e}_x$, $\vec{v} = v\hat{e}_x$ (zwrot dobieramy tak, że $v(0) = v_0 > 0$). Dostajemy wtedy równanie

$$\frac{dv}{dt} = a = \frac{\alpha}{m} v^n \quad (2.2)$$

Możemy je rozwiązać dzieląc przez v^n by otrzymać

$$v^{-n} \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha}{m} \quad (2.3)$$

Jeśli scałkujemy teraz nasze równanie po czasie i dokonamy zamiany zmiennych, otrzymamy

$$\int_0^t v^{-n} \frac{dv}{d\tau} d\tau = \int_0^t \frac{\alpha}{m} d\tau \implies \int_{v(0)}^{v(t)} v^{-n} dv = \frac{\alpha}{m} t$$
$$\frac{\alpha}{m} t = \begin{cases} \frac{1}{1-n} v^{-n+1} \Big|_{v(0)}^{v(t)} & \text{jeśli } n \neq 1 \\ \log(v) \Big|_{v(0)}^{v(t)} & \text{jeśli } n = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-n} (v(t)^{-n+1} - v_0^{-n+1}) & \text{jeśli } n \neq 1 \\ \log(v(t)) - \log(v_0) & \text{jeśli } n = 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

Mamy różne przypadki w zależności od wartości n .

Przypadek I, $n < 1$. Nasze rozwiązanie przybiera postać

$$v(t) = \sqrt[n+1]{v_0^{-n+1} + (1-n)\frac{\alpha}{m}t} \quad (2.5)$$

Całkując po czasie otrzymujemy drogę pokonaną w czasie t

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t v(\tau) d\tau = \int_0^t \sqrt[n+1]{v_0^{-n+1} + (1-n)\frac{\alpha}{m}\tau} d\tau = \left| \begin{array}{l} y = v_0^{-n+1} + (1-n)\frac{\alpha}{m}\tau \\ dy = (1-n)\frac{\alpha}{m}d\tau \end{array} \right| \\ &= \int_{y_0}^{y_t} \frac{m}{(1-n)\alpha} y^{1/(1-n)} dy = \begin{cases} \frac{m}{(2-n)\alpha} \left(y_t^{(2-n)/(1-n)} - y_0^{(2-n)/(1-n)} \right) & \text{jeśli } n \neq 2 \\ \frac{m}{(1-n)\alpha} (\log(y_t) - \log(y_0)) & \text{jeśli } n = 2 \end{cases} \quad (2.6) \\ &\text{gdzie } y_0 = v_0^{-n+1}, \quad y_t = v_0^{-n+1} + (1-n)\frac{\alpha}{m}t \end{aligned}$$

Ponieważ rozważamy $n < 1$ będziemy tu stosować wzór dla $n \neq 2$, ale mamy już wzór do dalszych podpunktów. Ruch ten będzie trwał do $t_{\max}$ kiedy prędkość wyniesie zero. Daje nam to warunek $v_{\max} = 0$, ponieważ $-n + 1 > 0$, oznacza to że argument pod pierwiastkiem musi być równy zero

$$v_0^{-n+1} + (1-n)\frac{\alpha}{m}t_{\max} = 0 \implies t_{\max} = \frac{m}{(n-1)\alpha} v_0^{-n+1} \quad (2.7)$$

Widzimy że ten warunek będzie spełniony dla dodatnich czasów tylko jeśli $\alpha < 0$

Przypadek Ia, $n < 1$ i $\alpha < 0$. W tym przypadku nasze ciało się zatrzyma po czasie $t_{\max}$, pokonując drogę $s(t_{\max})$

$$t_{\max} = \frac{m}{(n-1)\alpha} v_0^{-n+1} \quad (2.8a)$$

$$s_{\max} = \frac{m}{(2-n)\alpha} \left(y_t^{(2-n)/(1-n)} - y_0^{(2-n)/(1-n)} \right) = -\frac{m}{(2-n)\alpha} y_0^{(2-n)/(1-n)} = -\frac{m}{(2-n)\alpha} v_0^{2-n} \quad (2.8b)$$

Wykorzystaliśmy tu $y_{t_{\max}} = 0$.

Przypadek Ib, $n < 1$ i $\alpha > 0$. W tym przypadku nasze ciało się nie zatrzyma. Czynniki $(1-n)\alpha$ we wzorze (2.5) jest dodatni, więc prędkość będzie rosła i ciało nigdy się nie zatrzyma. Jest to intuicyjny wynik, bo siła oporu zatrzyma ciało tylko jeśli jest skierowana w drugą stronę niż prędkość, a dla $\alpha > 0$ jej zwrot jest zgodny z prędkością.

Przypadek Ic, $n < 1$ i $\alpha = 0$. W tym przypadku mamy ruch ze stałą prędkością, przyspieszenie wynosi zero. Wzór (2.5) daje nam stałą prędkość, a droga nie jest dana wzorem (2.6), bo bez zależności od czasu nie możemy uzasadnić podstawienia w całość, zamiast tego jest ona równa $s(t) = v_0 t$. Ciało nie zatrzyma się w tym przypadku.

Przypadek II, $n > 1$. Wzory (2.5) i (2.6) na prędkość i drogę dalej są poprawne, więc możemy ich użyć do analizy problemu

Przypadek IIa, $n > 1$ i $\alpha < 0$. Warunek zakończenia ruchu to dalej $v_{\max} = 0$, ale ponieważ $-n + 1 < 0$ nie oznacza on że argument musi być zero. Dla $-n + 1 < 0$ mamy $\sqrt[n+1]{x} = \frac{1}{|1-n|\sqrt[n+1]{x}}$, więc warunek zerowej prędkości oznacza, że argument musi być nieskończony. Nie jest to możliwe do osiągnięcia w

skończonym czasie, ale ponieważ $(1 - n)\alpha > 0$ argument pierwiastka dąży do nieskończoności, więc prędkość dąży do zera.

$$t_{\max} = \infty \quad (2.9)$$

Droga przebyta przez ciało może zostać uzyskana przez wzięcie granicy $t \rightarrow \infty$ wzoru (2.6). Zauważmy, że $\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \infty$ i pamiętajmy o tym, że dla $2 - n < 0$ mamy do czynienia z $\frac{1}{|2-n|\sqrt[n]{x}}$, więc $y_t^{(2-n)/(1-n)}$ dąży do skończonej wartości tylko jeśli $(2 - n)/(1 - n) < 0$ i w takim wypadku dąży do zera

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m}{(2-n)\alpha} \left(y_t^{(2-n)/(1-n)} - y_0^{(2-n)/(1-n)} \right) & \text{jeśli } n > 2 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m}{(1-n)\alpha} \left(\log(y_t) - \log(y_0) \right) & \text{jeśli } n = 2 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m}{(2-n)\alpha} \left(y_t^{(2-n)/(1-n)} - y_0^{(2-n)/(1-n)} \right) & \text{jeśli } n < 2 \end{cases} = \begin{cases} \infty & \text{jeśli } n > 2 \\ \infty & \text{jeśli } n = 2 \\ -\frac{m}{(2-n)\alpha} v_0^{2-n} & \text{jeśli } n < 2 \end{cases} \quad (2.10)$$

w pierwszych dwóch przypadkach współczynniki stojące z przodu są dodatnie, więc nasza granica to ∞ , a nie $-\infty$, co było spodziewane przy dodatniej prędkości. Zauważmy, że tylko jeśli $n < 2$ zasięg ruchu jest skończony, ma to fizyczny sens, ponieważ jeśli n jest duży siła oporu spada bardzo szybko z prędkością (dla $n = 10$, dwukrotnie mniejsza prędkość oznacza tysiącrotnie mniejszą siłę oporu), więc prędkość bardzo powoli spada do zera i przebyta droga jest nieskończona. Nasze rachunki pokazują, że $n = 2$ to przypadek graniczny.

Przypadek IIb, $n > 1$ i $\alpha > 0$. W tym przypadku nasze ciało się nie zatrzyma. Czynniki $(1 - n)\alpha$ we wzorze (2.5) jest ujemny, więc argument pierwiastka w skończonym czasie $t_{\infty} = \frac{m}{(n-1)\alpha} v_0^{-n+1}$ osiągnie wartość zero, a ponieważ mamy do czynienia z wyrażeniem gdzie podnosimy go do ujemnej potęgi, otrzymamy nieskończoną prędkość w tym skończonym czasie. Jest to intuicyjny wynik, bo siła oporu zatrzyma ciało tylko jeśli jest skierowana w drugą stronę niż prędkość, a dla $\alpha > 0$ jej zwrot jest zgodny z prędkością.

Przypadek IIc, $n > 1$ i $\alpha = 0$. W tym przypadku mamy ruch ze stałą prędkością, przyspieszenie wynosi zero, ten przypadek jest w pełni analogiczny do **Ic**. Wzór (2.5) daje nam stałą prędkość, a droga nie jest dana wzorem (2.6), bo bez zależności od czasu nie możemy uzasadnić podstawienia w całość, zamiast tego jest ona równa $s(t) = v_0 t$. Ciało nie zatrzyma się w tym przypadku.

Przypadek III, $n = 1$. W tym wypadku nasze rozwiązanie przybiera postać

$$v(t) = v_0 e^{\frac{\alpha}{m} t} \quad (2.11)$$

Widzimy, że dla $\alpha \geq 0$ prędkość będzie niemalejąca, więc ruch nigdy się nie zatrzyma, podobnie jak w poprzednich przypadkach dla $\alpha > 0$ i $\alpha = 0$.

Przypadek IIIa, $n = 1$ i $\alpha < 0$. Dla $\alpha < 0$ prędkość będzie spadać, ale nigdy nie wyniesie zero w skończonym czasie. Podobnie jak w przypadku **IIa** $t_{\max} = \infty$ i musimy rozważyć granicę $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t)$. Obliczmy najpierw $s(t)$

$$s(t) = \int_0^t v_0 e^{\frac{\alpha}{m} \tau} d\tau = \frac{v_0 m}{\alpha} e^{\frac{\alpha}{m} \tau} \Big|_0^t = \frac{v_0 m}{\alpha} \left(e^{\frac{\alpha}{m} t} - 1 \right) \quad (2.12)$$

Zasięg ruchu jest równy (pamiętając, że $\alpha < 0$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_0 m}{\alpha} \left(e^{\frac{\alpha}{m} t} - 1 \right) = -\frac{v_0 m}{\alpha} \quad (2.13)$$

Podsumowanie. Zaobserwujemy, że można ująć nasze wyniki w prostym wzorze. Czas $t_{\max}$ do zatrzymania ciała i zasięg ciała $s_{\max}$ dla $\alpha < 0$ są równe

$$t_{\max} = \begin{cases} \frac{m}{(n-1)\alpha} v_0^{-n+1} & \text{jeśli } n < 1 \\ \infty & \text{jeśli } n \geq 1 \end{cases} \quad (2.14a)$$

$$s_{\max} = \begin{cases} -\frac{m}{(2-n)\alpha} v_0^{2-n} & \text{jeśli } n < 2 \\ \infty & \text{jeśli } n \geq 2 \end{cases} \quad (2.14b)$$

w przypadku $\alpha < 0$ ciało zawsze się zatrzyma (dla $t_{\max} = \infty$ prędkość dąży do zera gdy czas dąży do nieskończoności, ciało może się zatrzymać na skończonej drodze, bądź nieskończonej). Dla $\alpha \geq 0$ prędkość jest niemalejąca i ciało będzie poruszać się ruchem jednostajnym, bądź przyspieszać.

Zad. 7

Jednowymiarowy, tłumiony oscylator harmoniczny o częstości własnej ω_0 porusza się pod działaniem siły wymuszającej $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$. Znaleźć ruch tego oscylatora

Rozw. 7

Równanie oscylatora harmonicznego z zadania ma postać

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + 2\gamma\omega_0 \frac{d}{dt} x(t) + \omega_0^2 x(t) = f_0 \cos(\omega t) \quad (2.15)$$

gdzie $x(t)$ to położenie w czasie t , $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ to jego częstość własna związana ze stałą sprężystości k i masą m , ω to częstość siły wymuszającej o amplitudzie $F_0 = f_0 m$, a γ to współczynnik tłumienia. Jest to standardowa forma tego równania, w której mamy minimalną ilość stałych. Rozważmy najpierw uproszczone wersje problemu by "wyczuć problem"

Przypadek I, $f_0 = 0$ i $\gamma = 0$. Zaczniemy od standardowego oscylatora harmonicznego

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (2.16)$$

Na fizyce I nauczyliśmy się rozwiązywać to równanie przez sprytne podstawienie (tzw. "ansatz") $x(t) = e^{\beta t}$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \omega_0^2 x(t) &= \beta^2 e^{\beta t} + \omega_0^2 e^{\beta t} = (\beta^2 + \omega_0^2) e^{\beta t} = 0 \\ \implies \beta^2 + \omega_0^2 &= 0 \implies \beta_{\pm} = \pm i\omega_0 \end{aligned}$$

Mamy dwa niezależne liniowo rozwiązania, ogólne rozwiązanie naszego problemu jest dane jako ich kombinacja liniowa. Nie ma więcej równań, ponieważ dla równania różniczkowego drugiego rzędu, wymiar przestrzeni rozwiązań jest równy dwa.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{i\omega_0 t} & x_2(t) &= e^{-i\omega_0 t} \\ x(t) &= C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Współczynniki C_1, C_2 są ogólnie liczbami zespolonymi, możemy przepisać rozwiązanie jako kombinację liniową cosinusa i sinusa, wtedy współczynniki będą liczbami rzeczywistymi, a warunek na nie jest zadany przez warunki początkowe.

$$x(t) = \tilde{C}_1 \cos(\omega_0 t) + \tilde{C}_2 \sin(\omega_0 t) \quad (2.18a)$$

$$x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (2.18b)$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (2.18c)$$

Przypadek II, $f_0 = 0$ i $\gamma > 0$. Jeśli dopuszczamy tłumienie (z dodatnim współczynnikiem, by miało ono fizyczny sens) nasze równanie się komplikuje, ale okazuje się że nasz ansatz $x(t) = e^{\beta t}$ dalej się sprawdza

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 2\gamma\omega_0 \frac{d}{dt} x(t) + \omega_0^2 x(t) &= \beta^2 e^{\beta t} + 2\gamma\omega_0 \beta e^{\beta t} + \omega_0^2 e^{\beta t} \\ &= (\beta^2 + 2\gamma\omega_0 \beta + \omega_0^2) e^{\beta t} = 0 \implies \beta^2 + 2\gamma\omega_0 \beta + \omega_0^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Mamy tu równanie kwadratowe z $\Delta = 4\gamma^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\gamma^2 - 1)$. Ilość rozwiązań i ich postać zależy od znaku Δ , musimy rozważyć trzy przypadki

Przypadek IIa, $f_0 = 0$ i $\gamma > 1$ tzw. tłumienie silne. W tym wypadku $\Delta > 0$ i nasze rozwiązania to

$$\beta_{1,2} = -\omega_0 \gamma_{\pm} = -\omega_0 (\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 1}) \quad (2.20)$$

Rozwiązanie ogólne naszego równania ma postać

$$x_1(t) = e^{-\omega_0 \gamma_+ t} \quad x_2(t) = e^{-\omega_0 \gamma_- t} \quad (2.21a)$$

$$x(t) = C_1 e^{-\omega_0 \gamma_+ t} + C_2 e^{-\omega_0 \gamma_- t} \quad (2.21b)$$

Zauważmy, że $\gamma_+ > \gamma_- > 0$, więc w tym przypadku nie mamy żadnych oscylacji i nasz połozenie eksponencjalnie dąży do położenia równowagi, tłumienie dominuje. Stałe C_1 i C_2 są zadane przez warunki początkowe.

Przypadek IIb, $f_0 = 0$ i $0 < \gamma < 1$ tzw. tłumienie słabe. W tym wypadku $\Delta < 0$ i nasze rozwiązania to

$$\beta_{1,2} = -\omega_0 \gamma_{\pm} = -\omega_0 (\gamma \pm i\sqrt{1 - \gamma^2}) \quad (2.22)$$

Rozwiązanie ogólne naszego równania ma postać

$$x_1(t) = e^{-\omega_0 \gamma_+ t} \quad x_2(t) = e^{-\omega_0 \gamma_- t} \quad (2.23a)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-\omega_0 \gamma_+ t} + C_2 e^{-\omega_0 \gamma_- t} = e^{-\omega_0 \gamma t} \left(C_1 e^{-i\omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2} t} + C_2 e^{i\omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2} t} \right) \\ &= e^{-\omega_0 \gamma t} \left(\tilde{C}_1 \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2} t) + \tilde{C}_2 \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2} t) \right) \end{aligned} \quad (2.23b)$$

Zauważmy, że w tym przypadku mamy iloczyn eksponensa i czynnika oscylującego. Dla dużych czasów połozenie dąży do zera, ale pod drodze występują oscylacje, które są powoli wygaszane. Stałe C_1 i C_2 są zadane przez warunki początkowe.

Przypadek IIc, $f_0 = 0$ i $\gamma = 1$ tzw. tłumienie krytyczne. W tym wypadku $\Delta = 0$ i mamy tylko jedno rozwiązanie

$$\beta = -\omega_0 \gamma \quad (2.24)$$

Musimy się tu posłużyć mniej trywialną teorią równań różniczkowych, okazuje się że w takim wypadku rozwiązaniem jest też $x(t) = te^{\beta t}$, sprawdźmy to

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\gamma\omega_0\frac{d}{dt}x(t) + \omega_0^2x(t) &= (2\beta e^{\beta t} + \beta^2 te^{\beta t}) + 2\gamma\omega_0(e^{\beta t} + \beta te^{\beta t}) + \omega_0^2 te^{\beta t} \\ &= (2\beta + 2\gamma\omega_0)e^{\beta t} + (\beta^2 + 2\gamma\omega_0\beta + \omega_0^2)te^{\beta t} = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Drugi nawias to nasze znajome równanie kwadratowe (2.19), a pierwszy nawias jest równy zero, bo $\beta = -\gamma\omega_0$. Nasze rozwiązanie ogólne jest zatem postaci

$$x_1(t) = e^{-\gamma\omega_0 t} \quad x_2(t) = te^{-\gamma\omega_0 t} \quad (2.26a)$$

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma\omega_0 t} + C_2 te^{-\gamma\omega_0 t} \quad (2.26b)$$

Zauważmy, że w tym przypadku nie mamy oscylacji, nazywany jest on krytycznym tłumieniem, ponieważ tłumienie jest szybsze niż w przypadku tłumienia silnego i położenie będzie dążyć do zera najszybciej dla $\gamma = 1$. Dla $\gamma > 1$ szybkość zaniku dla dużych czasów jest dana przez mniejsze rozwiązanie $\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}$ ($e^{-\alpha t}$ zanika tym szybciej im większa α , po długim czasie dominować będzie czynnik z mniejszym współczynnikiem). Będzie ono zawsze mniejsze niż 1, więc zanik jest najszybszy w przypadku $\gamma = 1$. Wyjątkiem jest szczególna sytuacja kiedy warunek początkowy dla $\gamma > 1$ jest dobrany tak, by ten mod się nie wzbudził (rozwiązanie miało $C_2 = 0$)

Przypadek III, przypadek z treści zadania z $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$. Do tej pory rozwiązywaliśmy tak zwane równanie jednorodne (bez czynnika po prawej stronie) i znaleźliśmy jego rozwiązania ogólne. Ogólny fakt o takich równaniach jest taki, że kombinacja liniowa rozwiązań daje nam rozwiązanie, rozwiązania tworzą dwuwymiarową przestrzeń wektorową. Teraz musimy rozwiązać równanie niejednorodne (z niezerową prawą stroną), ale nie musimy zaczynać naszej pracy od nowa. Jeśli przez $x_{\text{RORJ}}(t)$ oznaczmy rozwiązanie ogólne równania jednorodnego z przypadku II (dla odpowiedniej wartości γ), a przez $x_{\text{RSRN}}(t)$ rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego (2.15) to rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (problemu z zadania) będzie miało postać

$$x_{\text{RORN}}(t) = x_{\text{RORJ}}(t) + x_{\text{RSRN}}(t) \quad (2.27)$$

Geometrycznie przestrzeń rozwiązań jest tzw. przestrzenią afiniczną, którą można sobie wyobrazić jako dwuwymiarową płaszczyznę nieprzechodzącą przez punkt zero. Istotnie

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\omega_0 \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) x_{\text{RORN}}(t) &= \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\omega_0 \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) x_{\text{RORJ}}(t) \\ &+ \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\omega_0 \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) x_{\text{RSRN}}(t) = 0 + f_0 \cos(\omega t) = f_0 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Musimy więc znaleźć jakieś (kompletnie dowolne) rozwiązanie naszego równania i dzięki poprzednim rozważaniom będziemy mogli od razu napisać wynik.

Gdybyśmy podstawili jako ansatz cosinus (analogicznie sinus), to nie byłoby to dobre podstawienie. Dla cosinusa dostalibyśmy dwa człony do niego proporcjonalne i jeden człon proporcjonalny do

sinusa, po podstawieniu odpowiedniego czasu dla którego wszystkie cosinusy by się wyzerowały, otrzymalibyśmy równanie "coś niezerowego = zero" (polecam spróbować tego podejścia i zobaczyć że nie działa). Skoro sam cosinus i sam sinus nie działa, można się spodziewać, że musimy użyć kombinacji liniowej $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, takie postępowanie doprowadziłoby nas do wyniku, ale istnieje lepsza, mniej rachunkowa metoda. Chcielibyśmy móc znowu użyć eksponensa jako kandydata na rozwiązanie, na algebrze I nauczyliśmy się że cosinus i sinus wiąże się z eksponentem od zespolonego argumentu, dzięki wzorowi $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$. Możemy spróbować go odtworzyć w naszym równaniu. Pomysł na skonstruowanie tego rozwiązania używa jednej z popularnych zasad fizyki i matematyki "jeśli nie umiesz rozwiązać problemu, uogólnij go". Zdefiniujmy sobie analogiczne równanie na $y(t)$ z inną siłą wymuszającą

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\gamma\omega_0 \frac{d}{dt}x(t) + \omega_0^2 x(t) = f_0 \cos(\omega t) \quad (2.29a)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\gamma\omega_0 \frac{d}{dt}y(t) + \omega_0^2 y(t) = f_0 \sin(\omega t) \quad (2.29b)$$

Teraz chcemy rozwiązać oba te równania "na raz". Mnożąc drugie równanie przez i i dodając stronami otrzymujemy proste równanie na nową zmienną $z(t) = x(t) + iy(t)$

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) + 2\gamma\omega_0 \frac{d}{dt}z(t) + \omega_0^2 z(t) = f_0 \cos(\omega t) + i f_0 \sin(\omega t) = f_0 e^{i\omega t} \quad (2.30)$$

Teraz możemy się posłużyć znanym już ansatzem $z(t) = \eta e^{i\omega t}$

$$\begin{aligned} -\omega^2 \eta e^{i\omega t} + 2\gamma\omega_0 i \omega \eta e^{i\omega t} + \omega_0^2 \eta e^{i\omega t} &= (-\omega^2 + 2\gamma\omega_0 i \omega + \omega_0^2) \eta e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t} \\ \Rightarrow \eta &= \frac{f_0}{-\omega^2 + 2\gamma\omega_0 i \omega + \omega_0^2} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Zatem $z(t) = \eta e^{i\omega t}$ jest rozwiązaniem uogólnionego problemu, z którego możemy znaleźć $x_{\text{RSRN}}(t) = \text{Re}(z(t))$. By ukończyć zadanie musimy jeszcze wyznaczyć część rzeczywistą, w tym celu wygodna postać trygonometryczna $\eta = |\eta|e^{i\varphi}$.

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma\omega_0 i \omega} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma\omega_0 i \omega} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\gamma\omega_0 i \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\gamma\omega_0 i \omega} \\ &= f_0 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\gamma\omega_0 i \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_0^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (2.32a)$$

$$|\eta| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_0^2 \omega^2}} \quad (2.32b)$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\text{Im } \eta}{\text{Re } \eta} = -\frac{2\gamma\omega_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\gamma\omega_0 \omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (2.32c)$$

Nasze rozwiązanie szczególne to $x_{\text{RSRN}}(t) = \text{Re}(z(t)) = \text{Re}(|\eta|e^{i\omega t + i\varphi}) = |\eta| \cos(\omega t + \varphi)$. Rozwiązanie problemu z zadania to

$$x_{\text{RORN}}(t) = x_{\text{RORJ}}(t) + x_{\text{RSRN}}(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + |\eta| \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.33)$$

gdzie x_1, x_2 to rozwiązania z odpowiedniego podpunktu (w zależności od wartości γ), C_1 i C_2 są zależne od warunków początkowych.

Zad. 8

Jednowymiarowy, tłumiony oscylator harmoniczny o częstości własnej ω_0 porusza się pod działaniem dowolnej siły wymuszającej $F(t)$. Znaleźć ruch tego oscylatora po upływie długiego czasu od chwili początkowej (innymi słowy: znaleźć funkcję Greena oscylatora harmonicznego)

Rozw. 8

Metoda I, propozycja ćwiczeniowca. Przyjmujemy notację z poprzedniego zadania, nasze równanie ma postać ($f(t) = F(t)/m$)

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\gamma\omega_0\frac{d}{dt}x(t) + \omega_0^2x(t) = f(t) \quad (2.34)$$

By rozwiązać ten problem posłużymy się rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego, które znaleźliśmy w poprzednim zadaniu

$$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) \quad (2.35)$$

gdzie x_1, x_2 są odpowiednio dobrane w zależności od wartości γ (nasze rachunki wstępne będą niezależne od przypadku). Dla ogólnej postaci siły wymuszającej nie umiemy zgadnąć rozwiązania, więc musimy posłużyć się bardziej ogólną metodą, tzw. uzmiennianiem stałych. Idea tej metody jest następująca: weźmy rozwiązanie ogólne równania jednorodnego, w którym są pewne stałe. Następnie zamieńmy je na nieznane funkcje czasu i tak zmodyfikowane rozwiązanie wstawmy do równania. Jeśli te funkcje będą stałe dostaniemy ponownie rozwiązanie równania jednorodnego, ale dzięki nowej zależności czasowej mamy nadzieję na uzyskanie łatwych do rozwiązania równań mogących nam dać rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego. W naszym przypadku postulujemy, że rozwiązanie jest postaci

$$x(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t)$$

gdzie C_1, C_2 to teraz pewne nieznane funkcje. Pochodne tego rozwiązania wynoszą

$$\dot{x} = \dot{C}_1x_1 + \dot{C}_2x_2 + C_1\dot{x}_1 + C_2\dot{x}_2 \quad (2.36a)$$

$$\ddot{x} = (\ddot{C}_1x_1 + \ddot{C}_2x_2 + \dot{C}_1\dot{x}_1 + \dot{C}_2\dot{x}_2) + \dot{C}_1\dot{x}_1 + \dot{C}_2\dot{x}_2 + C_1\ddot{x}_1 + C_2\ddot{x}_2 \quad (2.36b)$$

Ponieważ mogą to być absolutnie dowolne funkcje i mamy je dwie, możemy nałożyć na nie wiąż. Nawet z dodatkowym warunkiem mogą one wyprodukować dowolną funkcję, przykładowo gdybyśmy zażyczyli sobie $C_2 = 0$, ponieważ C_1 może być dowolne, jest ono w stanie dać nam dowolne $x(t)$. Nasz warunek, jaki nakładamy na nasze uzmiennione stałe to

$$\dot{C}_1x_1 + \dot{C}_2x_2 = 0 \quad (2.37)$$

Upraszcza on pochodną i drugą pochodną do postaci

$$\dot{x} = C_1\dot{x}_1 + C_2\dot{x}_2 \quad (2.38a)$$

$$\ddot{x} = \dot{C}_1\dot{x}_1 + \dot{C}_2\dot{x}_2 + C_1\ddot{x}_1 + C_2\ddot{x}_2 \quad (2.38b)$$

w szczególności pozbywa się drugich pochodnych C_1, C_2 . Wstawiając te wzory do równania ruchu (2.34) dostajemy warunek

$$\begin{aligned} & \dot{C}_1\dot{x}_1 + \dot{C}_2\dot{x}_2 + C_1\ddot{x}_1 + C_2\ddot{x}_2 + 2\gamma\omega_0(C_1\dot{x}_1 + C_2\dot{x}_2) + \omega_0^2(C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t)) \\ &= \dot{C}_1\dot{x}_1 + \dot{C}_2\dot{x}_2 + C_1(\ddot{x}_1 + 2\gamma\omega_0\dot{x}_1 + \omega_0^2x_1) + C_2(\ddot{x}_2 + 2\gamma\omega_0\dot{x}_2 + \omega_0^2x_2) \\ &= \dot{C}_1\dot{x}_1 + \dot{C}_2\dot{x}_2 = f(t) \end{aligned} \quad (2.39)$$

gdzie wykorzystaliśmy, że x_1, x_2 są rozwiązaniami równania jednorodnego. Mamy układ równań na pochodne $\dot{C}_1, \dot{C}_2$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{C}_1 x_1 + \dot{C}_2 x_2 &= 0 \\ \dot{C}_1 \dot{x}_1 + \dot{C}_2 \dot{x}_2 &= f(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{C}_1 &= -\dot{C}_2 \frac{x_2}{x_1} \\ \dot{C}_2 (x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2) &= f(t) x_1 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \dot{C}_1 &= \frac{-f(t) x_2}{x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2} \\ \dot{C}_2 &= \frac{f(t) x_1}{x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Odcałkowanie tych równań wymaga już konkretnej postaci x_1, x_2 .

Rozważmy przypadek $\gamma > 1$, wtedy

$$x_1(t) = e^{-\omega_0 \gamma_+ t} \quad x_2(t) = e^{-\omega_0 \gamma_- t} \quad \gamma_{\pm} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 1} \quad (2.41a)$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_1(t) &= \frac{-f(t) x_2}{x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2} = \frac{-f(t) e^{-\omega_0 \gamma_- t}}{e^{-\omega_0 \gamma_+ t} e^{-\omega_0 \gamma_- t} (-\omega_0 \gamma_- + \omega_0 \gamma_+)} \\ &= -\frac{f(t) e^{\omega_0 \gamma_+ t}}{2\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}} \end{aligned} \quad (2.41b)$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_2(t) &= \frac{f(t) x_1}{x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2} = \frac{f(t) e^{-\omega_0 \gamma_+ t}}{e^{-\omega_0 \gamma_+ t} e^{-\omega_0 \gamma_- t} (-\omega_0 \gamma_- + \omega_0 \gamma_+)} \\ &= \frac{f(t) e^{\omega_0 \gamma_- t}}{2\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}} \end{aligned} \quad (2.41c)$$

Całkując otrzymujemy

$$C_1(t) = \int_0^t -\frac{f(s) e^{\omega_0 \gamma_+ s}}{2\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}} ds + C_1(0) \quad (2.42a)$$

$$C_2(t) = \int_0^t \frac{f(s) e^{\omega_0 \gamma_- s}}{2\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}} ds + C_2(0) \quad (2.42b)$$

Nasze ogólne rozwiązanie równania niejednorodnego to

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1(t) x_1(t) + C_2(t) x_2(t) \\ &= \int_0^t f(s) \frac{-e^{\omega_0 \gamma_+ (s-t)} + e^{\omega_0 \gamma_- (s-t)}}{2\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}} ds + C_1(0) e^{-\omega_0 \gamma_+ t} + C_2(0) e^{-\omega_0 \gamma_- t} \\ &= \int_0^t f(s) e^{-\omega_0 \gamma (t-s)} \frac{-e^{-\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1} (t-s)} + e^{\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1} (t-s)}}{2\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}} ds + C_1(0) e^{-\omega_0 \gamma_+ t} + C_2(0) e^{-\omega_0 \gamma_- t} \\ &= \int_0^t f(s) e^{-\omega_0 \gamma (t-s)} \frac{\sinh(\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1} (t-s))}{\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}} ds + C_1(0) e^{-\omega_0 \gamma_+ t} + C_2(0) e^{-\omega_0 \gamma_- t} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Stałe $C_1(0), C_2(0)$ zależą od warunków początkowych, ponieważ stojące obok nich eksponensy dążą do

zera, po długim czasie rozwiązanie będzie miało postać

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t f(s) e^{-\omega_0 \gamma(t-s)} \frac{\sinh(\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}(t-s))}{\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}} ds \\ &= \int_0^t f(s) G(t-s) ds \end{aligned} \quad (2.44a)$$

$$G(t-s) = e^{-\omega_0 \gamma(t-s)} \frac{\sinh(\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}(t-s))}{\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}} \quad (2.44b)$$

gdzie funkcja $G(t-s)$ jest tak zwaną funkcją Greena.

Funkcje Greena są jednym z podstawowych narzędzi fizyki teoretycznej. Bardziej naturalną postać uzyskalibyśmy gdybyśmy za chwilę początkową przyjęli chwilę t_0 , wtedy położenie byłoby dane wzorem

$$x(t) = \int_{t_0}^t f(s) e^{-\omega_0 \gamma(t-s)} \frac{\sinh(\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}(t-s))}{\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}} ds + C_1 e^{-\omega_0 \gamma_+(t-t_0)} + C_2 m e^{-\omega_0 \gamma_-(t-t_0)} \quad (2.45)$$

gdzie stałe C_1, C_2 zależą od początkowego położenia i prędkości. Chcemy rozważyć stan układu po długim czasie, tzn $t - t_0 \gg 0$, wcześniej przyjęliśmy że t jest duże, ale alternatywnie możemy też przejść z chwilą początkową do granicy $t_0 \rightarrow -\infty$, wtedy

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-\omega_0 \gamma(t-s)} \frac{\sinh(\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}(t-s))}{\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}} f(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^t G(t-s) f(s) ds \end{aligned} \quad (2.46a)$$

$$G(t-s) = e^{-\omega_0 \gamma(t-s)} \frac{\sinh(\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}(t-s))}{\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}} \quad (2.46b)$$

Obecnie całkujemy po $t > s$, ale możemy rozszerzyć całkę do wszystkich czasów s , by uzyskać wzór pojawiający się w fizyce. W tym celu użyjemy funkcji $\theta(x)$, tzw. thety Heaviside'a, jest one dana wzorem

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x \geq 0 \\ 0 & \text{jeśli } x < 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

Pozwala ona na zapisanie wyniku w postaci

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G^R(t-s) f(s) ds \quad (2.48a)$$

$$G^R(t-s) = \theta(t-s) e^{-\omega_0 \gamma(t-s)} \frac{\sinh(\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}(t-s))}{\omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}} \quad (2.48b)$$

funkcja podcałkowa jest niezerowa tylko jeśli $t - s > 0$, całkujemy tylko po $s < t$, tzn po przeszłych czasach. Fizycznie ma to sens, ponieważ tylko przeszłe wartości siły wymuszającej mają wpływ na chwilę obecną. Taka funkcja Greena $G^R = \theta(t - s)G$ jest nazywana "retardowaną" (eng: retarded). Rozważa się też funkcje Greena, które są różne od zera tylko dla $s > t$ ($G^A = -\theta(s - t)G$), są to tzw "adwansowana" (eng: advanced). Konstrukcja ta może wydawać się nieintuicyjna, ale te funkcje Greena są przydatne w pewnych konstrukcjach fizycznych i gdy chcemy rozwiązać odwróconą ewolucję czasową, tzn. mamy zadane położenie i prędkość w chwili końcowej i zastanawiamy się jakie warunki początkowe dadzą nam taki stan końcowy. Konkretna postać funkcji Greena i jej "typ" zależą od warunków brzegowych zadanych w problemie.

Żeby lepiej zrozumieć czym są funkcje Greena spójrzmy z oddali na to co zrobiliśmy. Mieliśmy problem na znalezienie rozwiązania pewnego równania z operatorem różniczkowym i daną prawą stroną, dokonując pewnych rachunków otrzymaliśmy wynik w postaci całki

$$\hat{L}_t x(t) = f(t) \longrightarrow x(t) = \int G(t - s) f(s) ds \quad (2.49)$$

Może to się niektórym osobom kojarzyć z problemem rozwiązania równania wektorowego na algebrze i

$$A\vec{v} = \vec{b} \longrightarrow \vec{v} = A^{-1}\vec{b} \quad (2.50)$$

Ta analogia jest jak najbardziej zasadna, bo w jakimś sensie chcemy odwrócić nasz operator różniczkowy i przenieść go na drugą stronę równania. Wyraz $\hat{L}_t$ jest pewnym operatorem różniczkowym, a operacja całkowania $f(t)$ z funkcją Greena jest jego odwrotnością. Motywuje to bardziej profesjonalną nazwę funkcji Greena, jest to "jądro całkowe rezolwenty operatora $\hat{L}_t$ ". Rezolwenta to w pewnym sensie odpowiednik odwrotności w analizie funkcjonalnej, a jądro całkowe w nazwie bierze się stąd, że nasze wyrażenie jest dane przez całkę.

Inne spojrzenie na funkcje Greena bierze się z ogólniejszej metody ich znajdowania. Funkcja Greena równania $\hat{L}_t x(t) = f(t)$ jest definiowana jako

$$\hat{L}_t G(t - s) = \delta(t - s) \quad (2.51)$$

gdzie $\delta(t - s)$ to tak zwana delta Diraca, to "obiekt" o tej własności, że dla dowolnej funkcji $g(x)$

$$\int g(x) \delta(x) dx = g(0) \quad (2.52)$$

$\delta(x)$ nie jest funkcją, ale czymś co nazywa się dystrybucją (więcej o tym na Analizie III). Równanie na funkcje Greena jest tak zwanym równaniem w sensie dystrybucji, co za tym idzie "funkcja Greena" nie musi być funkcją, ale w fizyce często nią jest, stąd dość myląca nazwa. Całkując nasze równanie 2.51 z $f(s)$ otrzymujemy

$$\int \hat{L}_t G(t - s) f(s) ds = \int \delta(t - s) f(s) ds$$

$$\hat{L}_t \underbrace{\int G(t - s) f(s) ds}_{x(t)} = f(t) \quad (2.53)$$

$$(2.54)$$

stąd dostajemy związek pomiędzy funkcją Greena i $x(t)$. Delta Diraca nie jest funkcją, ale ponieważ wycina z całki wartość funkcji w zerze, często się o niej myśli jako o funkcji równej zero wszędzie poza zerem. Możemy interpretować równanie 2.51 jako ewolucję układu z siłą wymuszającą, która jest impulsem w chwili s . O funkcji Greena można zatem myśleć jako o odpowiedzi układu na impuls w chwili s , tzn o tym jak w chwili t wygląda układ, który został zaburzony impulsem w chwili s . Jeśli mamy ogólną siłę wymuszającą to musimy zsumować (scałkować) wkład impulsów ze wszystkich poprzednich chwil, $f(s)$ jest siłą takiego impulsu, a $G(t - s)$ odpowiedzią układu, co motywuje fizycznie wzór

$$x(t) = \int G(t - s)f(s)ds \quad (2.55)$$

Dla przypadku $0 < \gamma < 1$ nasze uzmiennione stałe miałyby postać

$$C_1(t) = \int_0^t -\frac{f(s)e^{\omega_0\gamma_+s}}{2i\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}}ds + C_1(0) \quad (2.56a)$$

$$C_2(t) = \int_0^t \frac{f(s)e^{\omega_0\gamma_-s}}{2i\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}}ds + C_2(0) \quad (2.56b)$$

Rozwiązanie byłoby dane przez

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) \\ &= \int_0^t f(s) \frac{-e^{\omega_0\gamma_+(s-t)} + e^{\omega_0\gamma_-(s-t)}}{2i\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}}ds + C_1(0)e^{-\omega_0\gamma_+t} + C_2(0)e^{-\omega_0\gamma_-t} \\ &= \int_0^t f(s)e^{-\omega_0\gamma(t-s)} \frac{-e^{-i\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}(t-s)} + e^{i\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}(t-s)}}{2i\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}}ds + C_1(0)e^{-\omega_0\gamma_+t} + C_2(0)e^{-\omega_0\gamma_-t} \\ &= \int_0^t f(s)e^{-\omega_0\gamma(t-s)} \frac{\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}(t-s)\right)}{\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}}ds + C_1(0)e^{-\omega_0\gamma_+t} + C_2(0)e^{-\omega_0\gamma_-t} \end{aligned} \quad (2.57)$$

W tym przypadku γ_+, γ_- również będą tłumili zależność od warunków początkowych. Moglibyśmy wprowadzić ponownie t_0 jako chwilę początkową i przejść z nią do $-\infty$ by otrzymać postać rozwiązania po długim czasie

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-\omega_0\gamma(t-s)} \frac{\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}(t-s)\right)}{\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}}f(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G^R(t-s)f(s)ds \end{aligned} \quad (2.58a)$$

$$G^R(t-s) = \theta(t-s)e^{-\omega_0\gamma(t-s)} \frac{\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}(t-s)\right)}{\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}} \quad (2.58b)$$

Przypadek $\gamma = 1$, mamy

$$x_1(t) = e^{-\gamma\omega_0 t} \quad x_2(t) = te^{-\gamma\omega_0 t} \quad (2.59a)$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= \frac{-f(t)x_2}{x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2} = \frac{-f(t)te^{-\gamma\omega_0 t}}{e^{-2\gamma\omega_0 t}(1 - \gamma\omega_0 + \gamma\omega_0)} \\ &= -f(t)te^{\gamma\omega_0 t} \end{aligned} \quad (2.59b)$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_2 &= \frac{f(t)x_1}{x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2} = \frac{-f(t)e^{-\gamma\omega_0 t}}{e^{-2\gamma\omega_0 t}(1 - \gamma\omega_0 + \gamma\omega_0)} \\ &= f(t)e^{\gamma\omega_0 t} \end{aligned} \quad (2.59c)$$

Odcałkowując otrzymujemy

$$C_1(t) = \int_0^t -f(s)e^{\gamma\omega_0 s} ds + C_1(0) \quad (2.60a)$$

$$C_2(t) = \int_0^t f(s)e^{\gamma\omega_0 s} ds + C_2(0) \quad (2.60b)$$

Rozwiązanie ma postać

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) \\ &= \int_0^t f(s)(t-s)e^{\gamma\omega_0(s-t)} ds + C_1(0)e^{-\gamma\omega_0 t} + C_2(0)te^{-\gamma\omega_0 t} \\ &= \int_0^t f(s)(t-s)e^{-\gamma\omega_0(t-s)} ds + C_1(0)e^{-\gamma\omega_0 t} + C_2(0)te^{-\gamma\omega_0 t} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Po długim czasie rozwiązanie będzie zbiegać do

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^t (t-s)e^{-\gamma\omega_0(t-s)} f(s) ds + C_1(0)e^{-\gamma\omega_0 t} + C_2(0)te^{-\gamma\omega_0 t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G^R(t-s)f(s) ds \end{aligned} \quad (2.62a)$$

$$G^R(t-s) = \theta(t-s)(t-s)e^{-\gamma\omega_0(t-s)} \quad (2.62b)$$

Metoda II, sugestia wykładowcy. Ta metoda jest inspirowana mechaniką kwantową, a konkretnie rozwiązaniem kwantowego oscylatora harmonicznego. Pomysł matematycznie bierze się z następującej obserwacji: umiemy "przerzucić" pochodną na drugą stronę całkując obie strony

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t) \implies x(t) = \int f(t)dt \quad (2.63)$$

Co jeśli mielibyśmy pochodną z dodaną stałą, tzn

$$\left(\frac{d}{dt} - \beta\right)x(t) = f(t) \quad (2.64)$$

Czy możemy też "przerzucić" operator działający na $x(t)$ na drugą stronę? Okazuje się że tak

$$e^{\beta t} \frac{d}{dt} e^{-\beta t} x(t) = \dot{x}(t) - \beta x(t) = f(t) \implies x(t) = e^{\beta t} \int e^{-\beta t} f(t) dt \quad (2.65)$$

Zauważmy, że możemy dokonać rozkładu naszego operatora różniczkowego, który jest analogiczny do rozkładu wielomianu na jednomiany

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\gamma\omega_0\frac{d}{dt}x(t) + \omega_0^2x(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\omega_0\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)x(t) = \left(\frac{d}{dt} - \alpha_1\right)\left(\frac{d}{dt} - \alpha_2\right)x(t) \quad (2.66)$$

Mnożąc nawiasy w ostatnim napisie i porównując współczynniki przy pierwszej i zerowej pochodnej dostajemy warunki na α_1 i α_2

$$\begin{cases} -\alpha_1 - \alpha_2 &= 2\gamma\omega_0 \\ \alpha_1\alpha_2 &= \omega_0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^2 + \omega_0^2 &= 2\gamma\omega_0\alpha_1 \\ \alpha_2 &= \frac{\omega_0^2}{\alpha_1} \end{cases} \quad (2.67)$$

Rozpoznajemy w pierwszym równaniu równanie 2.19, które pojawiło się przy rozwiązywaniu poprzedniego zadania. Zatem α_1 będzie jednym z jego pierwiastków, a α_2 drugim, bo jak nietrudno się przekonać pomiędzy pierwiastkami tego równania zachodzi zależność $\alpha_1\alpha_2 = \omega_0^2$ (można to sprawdzić ręcznie albo powołać się na wzory Viete'a).

Przypadek I, $\gamma \neq 1$. Używając notacji z poprzedniego zadania mamy dwa różne pierwiastki

$$\alpha_{1,2} = -\omega_0\gamma_{\pm} \quad (2.68)$$

Rozbiliśmy nasz nawias na dwa mniejsze nawiasy, okazuje się teraz że możemy je "przerzucić" na drugą stronę równania używając 2.65. Nasze równanie różniczkowe może zostać zapisane jako

$$e^{\alpha_1 t} \frac{d}{dt} e^{-\alpha_1 t} e^{\alpha_2 t} \frac{d}{dt} e^{-\alpha_2 t} x(t) = f(t) \quad (2.69)$$

Możemy teraz przenieść wyrazy działające na $x(t)$ na prawą stronę, eksponensy przenosimy mnożąc przez odpowiedni czynnik, a pochodnej się pozbywamy całkując

$$e^{\alpha_1 t} \frac{d}{dt} e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} \frac{d}{dt} e^{-\alpha_2 t} x(t) = f(t) \quad (2.70)$$

$$\frac{d}{dt} e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} \frac{d}{dt} e^{-\alpha_2 t} x(t) = e^{-\alpha_1 t} f(t) \quad (2.71)$$

$$e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} \frac{d}{dt} e^{-\alpha_2 t} x(t) = \int_0^t e^{-\alpha_1 \tau_2} f(\tau_2) d\tau_2 + \tilde{C}_1 \quad (2.72)$$

$$\frac{d}{dt} e^{-\alpha_2 t} x(t) = e^{(\alpha_1 - \alpha_2)t} \int_0^t e^{-\alpha_1 \tau_2} f(\tau_2) d\tau_2 + e^{(\alpha_1 - \alpha_2)t} \tilde{C}_1 \quad (2.73)$$

$$e^{-\alpha_2 t} x(t) = \int_0^t e^{(\alpha_1 - \alpha_2)\tau_1} \int_0^{\tau_1} e^{-\alpha_1 \tau_2} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + e^{(\alpha_1 - \alpha_2)t} C_1 + C_2 \quad (2.74)$$

$$x(t) = e^{\alpha_2 t} \int_0^t e^{(\alpha_1 - \alpha_2)\tau_1} \int_0^{\tau_1} e^{-\alpha_1 \tau_2} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + e^{\alpha_1 t} C_1 + e^{\alpha_2 t} C_2 \quad (2.75)$$

C_1 i C_2 zależą od warunków początkowych, pochodzą z całkowania lewej strony i zależą od $\alpha_{1,2}$ i warunków początkowych (można ustalić konkretną zależność śledząc dokładnie skąd się biorą, ale nie jesteśmy tym zainteresowani). Wzór ten jest ładząco podobny do tego, który uzyskaliśmy w poprzedniej metodzie, okazuje się że można go do niego sprowadzić upraszczając powyższą całkę. Chcielibyśmy mieć pojedynczą całkę zamiast podwójnej, kiedy podczas liczenia całek chcemy zamienić wyrażenie na jego

pochoďną dobrym pomysłem jest całkowanie przez części. Wprowadzamy oznaczenia

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{(\alpha_1 - \alpha_2)\tau_1} & v &= \int_0^{\tau_1} e^{-\alpha_1 \tau_2} f(\tau_2) d\tau_2 \\ u' &= e^{(\alpha_1 - \alpha_2)\tau_1} & v' &= e^{-\alpha_1 \tau_1} f(\tau_1) \end{aligned} \quad (2.76)$$

Całkując przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} e^{\alpha_2 t} \int_0^t e^{(\alpha_1 - \alpha_2)\tau_1} \int_0^{\tau_1} e^{-\alpha_1 \tau_2} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 &= e^{\alpha_2 t} \left(\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{(\alpha_1 - \alpha_2)\tau_1} \int_0^{\tau_1} e^{-\alpha_1 \tau_2} f(\tau_2) d\tau_2 \Big|_{\tau_1=0}^{\tau_1=t} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \int_0^t e^{(\alpha_1 - \alpha_2)\tau_1} e^{-\alpha_1 \tau_1} f(\tau_1) d\tau_1 \right) \\ &= \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \int_0^t (e^{\alpha_1(t-s)} - e^{\alpha_2(t-s)}) f(s) ds \end{aligned} \quad (2.77)$$

Dla $\gamma > 1$ mamy w granicy dużych t

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\omega_0(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}) & \alpha_2 &= -\omega_0(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) \\ x(t) &= \frac{1}{2\omega_0\sqrt{\gamma^2 - 1}} \int_{-\infty}^t e^{-\omega_0 t} \left(e^{\omega_0\sqrt{\gamma^2 - 1}(t-s)} - e^{-\omega_0\sqrt{\gamma^2 - 1}(t-s)} \right) f(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G^R(t-s) f(s) ds \\ G^R(t-s) &= \theta(t-s) e^{-\omega_0 \gamma(t-s)} \frac{\sinh(\omega_0\sqrt{\gamma^2 - 1}(t-s))}{\omega_0\sqrt{\gamma^2 - 1}} \end{aligned} \quad (2.78)$$

Dla $1 > \gamma > 0$ analogicznie

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\omega_0(\gamma - i\sqrt{1 - \gamma^2}) & \alpha_2 &= -\omega_0(\gamma + i\sqrt{1 - \gamma^2}) \\ x(t) &= \frac{1}{2\omega_0\sqrt{1 - \gamma^2}} \int_{-\infty}^t e^{-\omega_0 t} \left(e^{i\omega_0\sqrt{1 - \gamma^2}(t-s)} - e^{-i\omega_0\sqrt{1 - \gamma^2}(t-s)} \right) f(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G^R(t-s) f(s) ds \\ G^R(t-s) &= \theta(t-s) e^{-\omega_0 \gamma(t-s)} \frac{\sin(\omega_0\sqrt{1 - \gamma^2}(t-s))}{\omega_0\sqrt{1 - \gamma^2}} \end{aligned} \quad (2.79)$$

Przypadek II, $\gamma = 1$, w tym przypadku mamy tylko jeden pierwiastek $\alpha_{1,2} = -\omega_0$, więc nasze rozwiązanie po długim czasie się upraszcza do

$$x(t) = e^{-\omega_0 t} \int_0^t \int_0^{\tau_1} e^{\omega_0 \tau_2} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \quad (2.80)$$

Całkowanie przez części dalej jest poprawną drogą rozumowania, ale musimy zmodyfikować jedną z funkcji

$$\begin{aligned} u &= \tau_1 & v &= \int_0^{\tau_1} e^{\omega_0 \tau_2} f(\tau_2) d\tau_2 \\ u' &= 1 & v' &= e^{\omega_0 \tau_1} f(\tau_1) \end{aligned} \quad (2.81)$$

Całkując przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} e^{-\omega_0 t} \int_0^t \int_0^{\tau_1} e^{\omega_0 \tau_2} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 &= e^{-\omega_0 t} \left(\tau_1 \int_0^{\tau_1} e^{\omega_0 \tau_2} f(\tau_2) d\tau_2 \Big|_{\tau_1=0}^{\tau_1=t} - \int_0^t \tau_1 e^{\omega_0 \tau_1} f(\tau_1) d\tau_1 \right) \\ &= \int_0^t e^{-\omega_0(t-s)} (t-s) f(s) ds \end{aligned} \quad (2.82)$$

Daje to w granicy dużych czasów

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-\omega_0(t-s)} (t-s) f(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) G^R(t-s) ds \\ G^R(t-s) &= \theta(t-s)(t-s)e^{-\gamma\omega_0(t-s)} \end{aligned} \quad (2.83)$$

Zad. 9

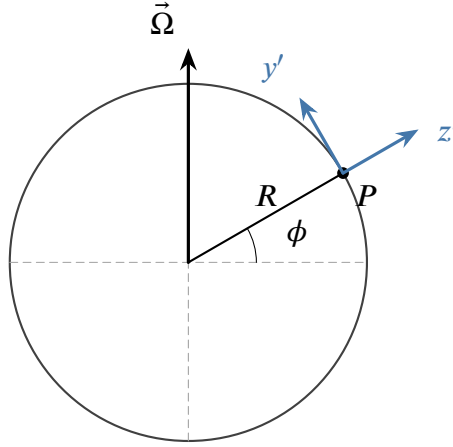
Na powierzchni obracającej się Ziemi ciało zostało upuszczone z wysokości h . Początkowo znajdowało się nad punktem P , ale dotknęło Ziemi w punkcie Q . Niech punkt P będzie punktem gdzie ciało upadłoby, gdyby Ziemia się nie obracała, a punkt Q punktem upadku na powierzchnię. Znaleźć odległość PQ (w zależności od szerokości geograficznej)

Rozw. 9

W tym zadaniu musimy się posłużyć wzorem na transformację pomiędzy układem inercjalnym, a nieinercjalnym (??), który wyprowadziliśmy przy okazji rozwiązywania zadania 4. Tak jak w tamtym zadaniu, niech wielkości w układzie nieinercjalnym będą oznaczone przez symbole z primem, a wielkości z układu inercjalnego przez symbole bez prima. W szczególności potrzebny nam będzie pełen wzór na transformację pomiędzy układem nieinercjalnym i inercjalnym (Uwaga: we wzorze pojawia się $\vec{r}$ - położenie w układzie nieinercjalnym, wektor łączący początek primowanego układu współrzędnych i punkt materialny)

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\Delta}a + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}' \quad (2.84)$$

Układem primowanym będzie oczywiście układ obserwatora na powierzchni ziemi, obracający się razem z Ziemią, a nieprimowanym układ inercjalny, który nie obraca się razem z Ziemią. Naturalnym wyborem współrzędnych primowanych (w których będziemy pracować) będzie skierowanie osi z' wzdłuż promienia, y' na północ, a zatem x' na wschód (możliwe są też inne wybory, ale należy pamiętać że układ współrzędnych $x'y'z'$ jest prawoskrętny, tzn. $\hat{e}_{x'} \times \hat{e}_{y'} = \hat{e}_{z'}$). Będzie to jedyny układ współrzędnych jaki wprowadzimy, możemy więc używać notacji macierzowej bez specyfikowania bazy, ponieważ domyślnie każdy taki napis będzie w bazie układu $x'y'z'$



Rysunek 6: Primowany układ współrzędnych obserwatora na powierzchni ziemi. Oś x' jest skierowana za kartkę na wschód. Punkt P został obrany jako początek tego układu współrzędnych

Szerokość geograficzną na jakiej znajduje się ciało oznaczamy przez ϕ , należy zauważyć, że liczy ona kąt od równika (na półkuli północnej jest dodatnia, a na południowej jest ujemna). Chcemy znaleźć równanie ruchu w układzie primowanym, wygodnie będzie obliczyć przyspieszenie w nim $\vec{a}'$ i wyrazić je we współrzędnych układu primowanego.

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{\Delta a} - \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}' - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}' - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \quad (2.85)$$

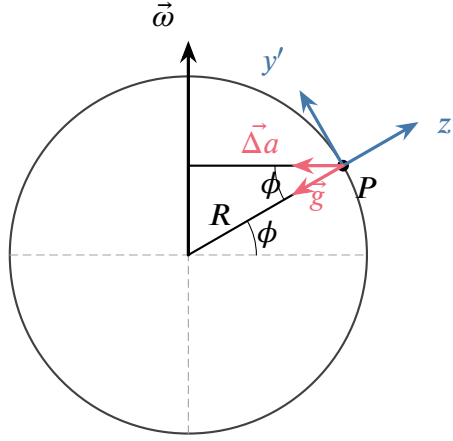
Będziemy pracować z następującymi założeniami

- Siła grawitacji jest stała $\vec{g} = \text{const}$
- Szerokość geograficzna jest stała (przesunięcia są małe w porównaniu z promieniem Ziemi R , co więcej $h \ll R$)
- Przyspieszenie odśrodkowe jest pomijalne (chcemy zbadać wpływ siły Coriolisa na ruch ciała). Umotywowane jest to faktem, że $\Omega = 2\pi/1\text{dzień} = 2\pi/(24 * 60 * 60s) = 7 \cdot 10^{-5}s$ jest bardzo małym parametrem

Przeanalizujemy teraz człon po członie wzór (2.85).

Pierwszy wyraz to przyspieszenie w układzie inercyjnym, z II zasady dynamiki Newtona jest ono równe $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, gdzie $\vec{F}$ jest siłą wypadkową działającą na ciało. W naszym przypadku na ciało działa wyłącznie siła grawitacji. Nasza siła wypadkowa jest dana standardowym wzorem $\vec{F} = m\vec{g}$, przez co $\vec{a} = \vec{g}$. Grawitacja jest skierowana do środka ziemi, więc we współrzędnych primowanych wyraża się przez (patrz rysunek 7)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad (2.86)$$



Rysunek 7: Kierunki wektorów $\vec{g}$ i $\vec{\Delta a}$

Drugi człon $\vec{\Delta a}$ to przyspieszenie początku układu nieinercyjnego w układzie inercyjnym. Jego wartość to Ω^2 razy promień okręgu po jakim porusza się nasze ciało, jest on rzędu Ω^2 , więc go pomijamy.

Trzeci człon jest zero, ponieważ $\vec{\Omega}$ jest stałym wektorem, więc ma pochodną po czasie równą zero. Oś obrotu Ziemi jest stała, a obrót ten odbywa się ze stałą prędkością kątową (długość dnia jest stała i nie zmienia się z miesiąca na miesiąc).

Czwarty wyraz $2\vec{\Omega} \times \vec{v}'$ to przyspieszenie Coriolisa. Musimy najpierw znaleźć wektor $\vec{\Omega}$, który można odczytać z obrazka 7

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos(\phi) \\ \Omega \sin(\phi) \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

Możemy policzyć iloczyn wektorowy

$$\vec{\Omega} \times \vec{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos(\phi) \\ \Omega \sin(\phi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v'_{x'} \\ v'_{y'} \\ v'_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \cos(\phi)v'_{z'} - \Omega \sin(\phi)v'_{y'} \\ \Omega \sin(\phi)v'_{x'} \\ -\Omega \cos(\phi)v'_{x'} \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

Zanim pójdziemy dalej, zauważmy pewną ciekawą własność tego wzoru. Jeśli potraktujemy $\vec{v}' \mapsto \vec{\Omega} \times \vec{v}'$ jako odwzorowanie, to jest to odwzorowanie liniowe, a jak wiemy z algebry, każdemu odwzorowaniu liniowemu odpowiada macierz. W naszym przypadku jest to

$$\vec{\Omega} \times \vec{v}' = \begin{pmatrix} \Omega \cos(\phi)v'_{z'} - \Omega \sin(\phi)v'_{y'} \\ \Omega \sin(\phi)v'_{x'} \\ -\Omega \cos(\phi)v'_{x'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \sin(\phi) & \Omega \cos(\phi) \\ \Omega \sin(\phi) & 0 & 0 \\ -\Omega \cos(\phi) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_{x'} \\ v'_{y'} \\ v'_{z'} \end{pmatrix} = A_{\Omega} \vec{v}' \quad (2.89)$$

gdzie macierz pojawiająca się powyżej, oznaczana dalej A_{Ω} , jest macierzą iloczynu wektorowego dla wektora $\vec{\Omega}$. Iloczyn wektorowy $\vec{\Omega}$ z dowolnym wektorem można zapisać jako mnożenie tego wektora przez tą macierz. Człon przyspieszenia Coriolisa może zostać zapisany jako

$$2\vec{\Omega} \times \vec{v}' = 2A_{\Omega} \vec{v}' = 2A_{\Omega} \frac{d}{dt} \vec{r}' \quad (2.90)$$

Ostatni wyraz $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')$ to przyspieszenie odśrodkowe równe $\Omega^2 r'$ razy człony kątowe (rzędu jeden), które pomijamy, bo ma rząd Ω^2 .

Podsumowując nasze równanie może zostać zapisane jako

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}' &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - 2A_\Omega \frac{d}{dt} \vec{r}' \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2A_\Omega \frac{d}{dt} \right) \vec{r}' &= \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.91)$$

Mamy tu następującą strukturę równania: mamy po lewej stronie pewien liniowy operator różniczkowy działający na wektor położenia $\vec{r}'$, a po prawej stronie stały wektor $\vec{g}$, który jest niezależny od czasu. Macierz A_Ω jest również niezależna od czasu, ale zależy od parametru naszego problemu Ω . Jest to przykład układu równań liniowych z niejednorodnością. Dalsze postępowanie w tym zadaniu może pójść jedną z dwóch ścieżek: możemy dokładnie rozwiązać powyższe równanie różniczkowe albo uzyskać wynik przybliżony. Zauważmy, że jeden człon równania (bez którego mielibyśmy licealny problem) zależy od Ω , które jest równe $\Omega = 2\pi/1\text{dzień} = 2\pi/(24 * 60 * 60s) = 7 \cdot 10^{-5}s$. Jest to mały parametr, możemy zrobić tzw. rachunek zaburzeń i uzyskać kolejne człony rozwiązania zależne od coraz wyższych potęg Ω .

Podejście I, Rachunek zaburzeń. Nasze rozwiązanie $\vec{r}'$ zależy oczywiście od czasu, ale zależy też od stałych pojawiających się w równaniu (2.91), a w szczególności od Ω , które jest małym parametrem. Możemy zapisać ten wektor jako szereg Taylora (bez silni)

$$\vec{r}' = \vec{r}'_0 + \Omega \vec{r}'_1 + \Omega^2 \vec{r}'_2 + \dots = \sum_{k=0} \Omega^k \vec{r}'_k \quad (2.92)$$

gdzie człony $\vec{r}'_k$ są już niezależne od Ω . Dodatkowo, ponieważ Ω jest dla nas małym parametrem spodziewamy się że nasze rozwiązanie będzie z dobrym przybliżeniem dane przez pierwsze dwa-trzy człony. Wyraz $\vec{r}'_0$ jest zwany rozwiązaniem niezaburzonym, $\Omega \vec{r}'_1$ pierwszą poprawką, $\Omega^2 \vec{r}'_2$ drugą poprawką, itd.. Warunki początkowe nie zależą od Ω , a warunki początkowe naszych członów rozwinięcia muszą być takie, by $\vec{r}'(t=0)$ było początkowym położeniem, a $\frac{d}{dt} \vec{r}'(t=0)$ początkową prędkością. Jest to spełnione jeśli $\vec{r}'_0(t=0)$ jest początkowym położeniem (równym h), a $\frac{d}{dt} \vec{r}'_0(t=0)$ jest początkową prędkością (równą zero), natomiast poprawki w chwili zero są zerowe, tzn $\vec{r}'_k(t=0) = 0$ i $\frac{d}{dt} \vec{r}'_k(t=0) = 0$ dla $k > 0$. Ma to fizyczny sens, ponieważ Ω jest zaburzeniem ewolucji ruchu ciała, więc w chwili początkowej nie zdążyła jeszcze nic zmienić.

Tu wprowadzamy pomocniczą macierz A wzorem $\Omega A = A_\Omega$, jest ona niezależna od Ω i pozwoli nam lepiej śledzić jej potęgę. Znajdźmy równania na kolejne człony, wstawiamy powyższą definicję do równania (2.91) i grupujemy człony stojące przy tej samej potęgze Ω

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\Omega A \frac{d}{dt} \right) (\vec{r}'_0 + \Omega \vec{r}'_1 + \Omega^2 \vec{r}'_2 + \dots) = \vec{g} \quad (2.93)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'_0 + \Omega \left(\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'_1 + 2A \frac{d}{dt} \vec{r}'_0 \right) + \Omega^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'_2 + 2A \frac{d}{dt} \vec{r}'_1 \right) + \dots = \vec{g} \quad (2.94)$$

gdzie przez ... rozumiemy człony z Ω w potęgze 3 lub większej. Mamy równość szeregów, zatem współczynniki przy tej samej potęgze Ω muszą być równe, daje to nam (nieskończony) układ równań

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'_0 = \vec{g} \quad (2.95a)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'_1 + 2A \frac{d}{dt} \vec{r}'_0 = 0 \quad (2.95b)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'_2 + 2A \frac{d}{dt} \vec{r}'_1 = 0 \quad (2.95c)$$

$\vdots$

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'_{k+1} + 2A \frac{d}{dt} \vec{r}'_k = 0 \quad (2.95d)$$

Zauważmy, że ten układ równań pozwala nam wyznaczać kolejne wyrazy rozwinięcia: pierwsze równanie ma tylko $\vec{r}'_0$, które możemy policzyć, drugie $\vec{r}'_1$ i znane już $\vec{r}'_0$, więc możemy policzyć $\vec{r}'_1$, itd. tak długo jak chcemy. Kiedy uznamy że znamy rozwiązanie z zadowalającą nas dokładnością, możemy przestać obliczać kolejne człony. Policzmy pierwsze trzy wyrazy, wyraz zerowy jest rozwiązaniem równania w przypadku nieobracającej się Ziemi (początkowa wysokość to h , a prędkość początkowa jest równa zero)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'_0 &= \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \\ \vec{r}'_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h - g \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.96)$$

W zerowym rzędzie rachunku zaburzeń ciało nie porusza się w kierunkach x' i y' , odległość PQ wynosi zero.

Kolejny wyraz jest rozwiązaniem równania na ciało działa siła Coriolisa, ale prędkość pochodzi z $\vec{r}'_0$ - rozwiązania w przypadku nieobracającej się Ziemi (dla przypomnienia warunek początkowy na pierwszą poprawkę to $\frac{d}{dt} \vec{r}'_1(t=0) = 0$, $\vec{r}'_1(t=0) = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'_1 + 2A \frac{d}{dt} \vec{r}'_0 &= 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'_1 + 2 \begin{pmatrix} 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \\ \sin(\phi) & 0 & 0 \\ -\cos(\phi) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix} &= 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'_1 = \begin{pmatrix} 2gt \cos(\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt} \vec{r}'_1 = \begin{pmatrix} gt^2 \cos(\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}'_1 = \begin{pmatrix} g \frac{t^3}{3} \cos(\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.97)$$

Rozwiązanie w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń jest dane przez

$$\vec{r}'_0 + \Omega \vec{r}'_1 = \begin{pmatrix} \Omega g \frac{t^3}{3} \cos(\phi) \\ 0 \\ h - g \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \quad (2.98)$$

Czas upadku wynosi $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ jak przy nieobracającej się ziemi, ale mamy teraz przesunięcie w kierunku x' (dodatnie, więc na wschód), które wynosi

$$PQ = \Omega g \frac{T^3}{3} \cos(\phi) = \frac{2}{3} \Omega \cos(\phi) \sqrt{\frac{2h^3}{g}} \quad (2.99)$$

Ciekawe może być sprawdzenie jak duży jest to efekt, przyjmijmy $h = 100\text{m}$, $g = 10\text{m/s}^2$, $\phi = \pi/4$ (tzn ciało upuszczone z wieżowca znajdującego się lekko na południe od Warszawy). Wtedy odległość z zadania w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń jest równa $PQ = 1,5\text{cm}$.

Trzeci wyraz uzyskamy jeśli uwzględnimy przyśpieszenie odśrodkowe dane przez rozwiązanie bez zaburzenia i podstawimy za prędkość do członu Coriolisa pierwszą poprawkę

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \vec{v}'_2 + 2A \frac{d}{dt} \vec{r}'_1 &= 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'_2 &= -2 \begin{pmatrix} 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \\ \sin(\phi) & 0 & 0 \\ -\cos(\phi) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} gt^2 \cos(\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2gt^2 \sin(\phi) \cos(\phi) \\ 2gt^2 \cos^2(\phi) \end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt} \vec{r}'_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\phi) \sin(\phi) \frac{2gt^3}{3} \\ \cos^2(\phi) \frac{2gt^3}{3} \end{pmatrix} \quad \vec{r}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\phi) \sin(\phi) \frac{gt^4}{6} \\ \cos^2(\phi) \frac{gt^4}{6} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.100)$$

Rozwiązanie w drugim rzędzie rachunku zaburzeń jest dane przez

$$\vec{r}'_0 + \Omega \vec{r}'_1 + \Omega^2 \vec{r}'_2 = \begin{pmatrix} \Omega g \frac{t^3}{3} \cos(\phi) \\ -\Omega^2 \cos(\phi) \sin(\phi) \frac{gt^4}{6} \\ h - g \frac{t^2}{2} + \Omega^2 \cos^2(\phi) \frac{gt^4}{6} \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

Warunek na czas upadku się nieco komplikuje, ale dalej możemy go obliczyć znajdując pierwiastki funkcji kwadratowej (oba rozwiązania na t^2 są dodatnie, ale tylko to mniejsze jest fizyczne) i wstawić go w dwie pierwsze współrzędne by uzyskać przesunięcie w płaszczyźnie $x'y'$. Darujemy sobie ten rachunek. Pojawia się tu zasadne pytanie: kiedy liczymy drugą poprawkę, mamy dokładność co do członów rzędu Ω^2 , ale pominęliśmy przyśpieszenie odśrodkowe, które jest też tego rzędu. Czy nasze rachunki są poprawne przy takiej dokładności? Odpowiedź brzmi oczywiście: "nie". Dokonując pominięcia członu Ω^2 niejako skazaliśmy się na błąd rzędu Ω^2 , więc nie powinniśmy się spodziewać, że druga poprawka oddaje stan faktyczny. Nasz wynik.

Podejście II, Dokładne rozwiązanie równania (2.91). Można zastosować podejście analogiczne do poprzednich zadań: znaleźć rozwiązanie ogólne równania jednorodnego i potem rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego. Fakt, że mamy tu układ równań i macierze utrudnia rachunki, ale nie eliminuje tej metody. Użyjemy jednak tej zaawansowanej sztuki w przyszłym zadaniu, tutaj okazuje się że można rozwiązać układ równań pewną obserwacją (trickiem).

Równanie ma postać

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2A_\Omega \frac{d}{dt} \right) \vec{r}' = \vec{g} \quad (2.102)$$

Zapiszmy je jako układ równań na współrzędne położenia

$$\frac{d^2}{dt^2}x' = 2\Omega \sin(\phi) \frac{d}{dt}y' - 2\Omega \cos(\phi) \frac{d}{dt}z' \quad (2.103a)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y' = -2\Omega \sin(\phi) \frac{d}{dt}x' \quad (2.103b)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}z' = 2\Omega \cos(\phi) \frac{d}{dt}x' - g \quad (2.103c)$$

Możemy odcałkować dwa ostatnie równania (w chwili początkowej jedyną niezerową współrzędną jest z' -owa składowa położenia, równa h , więc stałe powstające po całkowaniu okazują się być równe zero)

$$\frac{d^2}{dt^2}x' = -4\Omega^2 \sin^2(\phi) x' - 4\Omega^2 \cos^2(\phi) x' + 2\Omega \cos(\phi) g t = -4\Omega^2 x' + 2\Omega \cos(\phi) g t \quad (2.104a)$$

$$\frac{d}{dt}y' = -2\Omega \sin(\phi) x' \quad (2.104b)$$

$$\frac{d}{dt}z' = 2\Omega \cos(\phi) x' - g t \quad (2.104c)$$

Możemy rozwiązać równanie na x' , jest to oscylator harmoniczny z siłą wymuszającą, rozwiązanie części jednorodnej to kombinacja sinusa i cosinusa.

$$x'_{\text{RORJ}}(t) = C_1 \cos(2\Omega t) + C_2 \sin(2\Omega t) \quad (2.105)$$

By znaleźć rozwiązanie równania z niejednorodnością możemy albo uzmiennić stałe albo zgadnąć rozwiązanie szczególne. Ponieważ naszą jednorodnością jest funkcja liniowa okazuje się że warto spróbować $x_{\text{RSRN}}(t) = Ct$, podstawiając do powyższego równania otrzymujemy postać stałej

$$x'_{\text{RSRN}}(t) = \frac{g \cos(\phi)}{2\Omega} t \quad (2.106)$$

Rozwiązanie ogólne ma zatem postać

$$x'(t) = C_1 \cos(2\Omega t) + C_2 \sin(2\Omega t) + \frac{g \cos(\phi)}{2\Omega} t \quad (2.107)$$

W chwili początkowej $x'(0) = 0$ i $\frac{d}{dt}x'(0) = 0$, co daje $C_1 = 0$ i $C_2 = -g \cos(\phi)/4\Omega^2$

$$x'(t) = \frac{g \cos(\phi)}{4\Omega^2} (2\Omega t - \sin(2\Omega t)) \quad (2.108)$$

Podstawiając do dwóch pozostałych równań mamy równaniach

$$\frac{d}{dt}y' = -\frac{g \cos(\phi) \sin(\phi)}{4\Omega^2} (4\Omega^2 t - 2\Omega \sin(2\Omega t)) \quad (2.109)$$

$$\frac{d}{dt}z' = \frac{g \cos^2(\phi)}{4\Omega^2} (4\Omega^2 t - 2\Omega \sin(2\Omega t)) - g \quad (2.110)$$

$$(2.111)$$

Odcałkowując (od chwili = do t) otrzymujemy wzory (warunki początkowe to $y'(0) = 0$, $\frac{d}{dt}y'(0) = 0$, $z'(0) = h$, $\frac{d}{dt}z'(0) = 0$)

$$x'(t) = \frac{g \cos(\phi)}{4\Omega^2} (2\Omega t - \sin(2\Omega t)) \quad (2.112a)$$

$$y'(t) = \int_0^t \frac{d}{d\tau} y' d\tau = \frac{g \cos(\phi) \sin(\phi)}{4\Omega^2} \left(1 - \frac{4\Omega^2 t^2}{2} - \cos(2\Omega t) \right) \quad (2.112b)$$

$$\begin{aligned} z'(t) &= \int_0^t \frac{d}{d\tau} z' d\tau = h - g \frac{t^2}{2} + \frac{g \cos^2(\phi)}{4\Omega^2} \left(\frac{4\Omega^2 t^2}{2} + \cos(2\Omega t) - 1 \right) \\ &= h - \frac{g \sin^2(\phi) t^2}{2} + \frac{g \cos^2(\phi)}{4\Omega^2} (\cos(2\Omega t) - 1) \end{aligned} \quad (2.112c)$$

Równanie na czas upadku $z'(t_{\max}) = 0$ jest tak zwanym równaniem transcendentalnym, które może nie posiadać wzoru elementarnego. Nie mniej jeśli mielibyśmy $t_{\max}$, obliczylibyśmy szukaną odległość wzorem $PQ = \sqrt{x'(t_{\max})^2 + y'(t_{\max})^2}$

Porównanie metod. Aby upewnić się że nie popełniliśmy po drodze żadnego błędu, możemy obliczyć szereg Taylora $\vec{r}'(t)$ i porównać kolejne człony z wyrazami z rachunku zaburzeń. W tym celu rozwijamy sinus i cosinus

$$\sin(\xi) = \xi - \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^5}{120} + O(\xi^5), \quad \cos(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^4}{24} + O(\xi^6) \quad (2.113)$$

$$x'(t) = \frac{g \cos(\phi)}{4\Omega^2} \left(\frac{8\Omega^3 t^3}{6} - O(\Omega^5 t^5) \right) = \Omega \cos(\phi) \frac{g t^3}{3} - O(g \Omega^3 t^5) \quad (2.114a)$$

$$y'(t) = \frac{g \cos(\phi) \sin(\phi)}{4\Omega^2 t^2} \left(-\frac{16\Omega^4}{24} + O(\Omega^6 t^6) \right) = -g \cos(\phi) \sin(\phi) \frac{\Omega^2 t^2}{6} + O(g \Omega^4 t^6) \quad (2.114b)$$

$$z'(t) = h - \frac{g \sin^2(\phi) t^2}{2} + \frac{g \cos^2(\phi)}{4\Omega^2} \left(-\frac{4\Omega^2 t^2}{2} + \frac{16\Omega^4 t^4}{24} + O(\Omega^6) \right) = h - \frac{g t^2}{2} + \frac{g \cos^2(\phi) \Omega^2 t^4}{6} + O(g \Omega^4 t^6) \quad (2.114c)$$

Poprawki rachunku zaburzeń $\vec{r}'_k(t)$ to człony z Ω w k -tej potęgce, zbierając je dostajemy

$$\vec{r}'_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h - g \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \quad (2.115a)$$

$$\vec{r}'_1(t) = \begin{pmatrix} g \frac{t^3}{3} \cos(\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.115b)$$

$$\vec{r}'_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\phi) \sin(\phi) \frac{g t^4}{6} \\ \cos^2(\phi) \frac{g t^4}{6} \end{pmatrix} \quad (2.115c)$$

Wyniki zgadzają się z wynikami uzyskanymi rachunkiem zaburzeń. Choć należy pamiętać, że jedynie pierwsza poprawka jest fizycznie sensowna. Druga poprawka wyglądałaby kompletnie inaczej gdybyśmy nie pominęli członów kwadratowych w Ω (przyśpieszenia odśrodkowego) w równaniu.

Zad. 10

Na powierzchni obracającej się Ziemi zawieszono wahadło o długości l i wprowadzono w małe drgania, wychylając je z położenia równowagi w kierunku południowym. Znaleźć ruch wahadła.

Rozw. 10

Przypomnijmy sobie najpierw jak rozwiązać problem wahadła o długości l wykonującego małe drgania wokół położenia równowagi (bez siły Coriolisa). Jeśli wychylimy je o mały kąt φ , współrzędna x-owa będzie w przybliżeniu małych drgań równa $x(t) = l \sin(\varphi) \approx l\varphi$. Siła przywracająca ciało do położenia równowagi to siła grawitacji, jej składowa prostopadła do linki wynosi $-g \sin(\varphi) \approx -g\varphi$. Mamy zatem równanie

$$\ddot{x} = -g \sin(\varphi) \approx -g\varphi \approx -\frac{g}{l}x \quad (2.116)$$

Jest to równanie jednowymiarowego oscylatora harmonicznego o częstości $\omega^2 = \frac{g}{l}$.

Wahadło Foucaulta drga w dwuwymiarowej płaszczyźnie, więc warto napisać również równanie oscylatora harmonicznego w dwóch wymiarach. Mamy siłę skierowaną do środka układu współrzędnych proporcjonalną do odległości od niego, tzn $F = kr$, gdzie r, α to współrzędne biegunowe. Wtedy jej składowa x-owa to $F_x = F \cos(\alpha) = kr \cos(\alpha) = kx$, a y-owa to $F_y = F \sin(\alpha) = kr \sin(\alpha) = ky$. Nasze wahadło drgające w płaszczyźnie xy jest opisane równaniami

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega^2 x \\ \ddot{y} &= -\omega^2 y \end{aligned} \quad (2.117)$$

gdzie $\omega^2 = \frac{g}{l}$, innymi słowy wahadło wykonuje niezależne drgania w obu kierunkach z częstością taką samą jak w przypadku 1d.

Przyjmijmy następujące założenia:

- Zaniedbujemy siłę odśrodkową, jedyne siły działające na ciało to siła grawitacji i Coriolisa (oraz naprężenie nici).
- Nasze współrzędne xyz układu nieinercyjnego są skierowane tak, że grawitacja jest w kierunku z-towym, oś y jest skierowana na północ, a oś x na wschód.
- Ciało porusza się w płaszczyźnie xy, tzn. zakładamy że składowa z-towa prędkości jest stale równa zero (współrzędna z-towa jest stała).

Jesteśmy na szerokości geograficznej, więc w naszych współrzędnych prędkość kątowna Ω z jaką obraca się Ziemia wynosi

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \sin(\phi) \\ \Omega \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.118)$$

Zatem siła Coriolisa jest równa

$$-2\Omega \times \vec{v} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \sin(\phi) \\ \Omega \cos \phi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Omega \sin(\phi)v_y \\ -2\Omega \cos(\phi)v_x \\ \dots \end{pmatrix} \quad (2.119)$$

Mamy równanie ruchu

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega^2 x &= +2\Omega \sin(\phi) \dot{y} \\ \ddot{y} + \omega^2 y &= -2\Omega \sin(\phi) \dot{x}\end{aligned}\quad (2.120)$$

(można jeszcze napisać równanie w kierunku z-towym, ale pojawiło by się tam naprężenie nici. To równanie pozwoliłoby nam ją wyliczyć, ale nie jest to dla nas interesujące) Mamy tu dwa dość podobne równania na x i y , możliwe jest kilka podejść do rozwiązania tego układu równań. Jednym pomysłem jest zapisać je w postaci macierzowej i postępować podobnie jak w kolejnym zadaniu, ale można też zastosować pewną sztuczkę. Pomysł ten pojawił się przy okazji zad. 7, wprowadźmy $z(t) = x(t) + iy(t)$, jeśli dodamy pierwsze równanie do drugiego, które wcześniej przemnożymy przez i dostaniemy równanie jednorodne na nową zespoloną zmienną $z(t)$. UWAGA: od tego momentu przez $z(t)$ rozumiemy nową zmienną zespoloną kodującą

$$\ddot{z} + 2i\Omega \sin(\phi) \dot{z} + \omega^2 z = 0 \quad (2.121)$$

Podstawiając ansatz $z(t) = e^{\alpha t}$ dostajemy

$$(\alpha^2 + 2i\Omega \sin(\phi)\alpha + \omega^2)e^{\alpha t} = 0 \quad (2.122)$$

Mamy równanie kwadratowe, które ma $\Delta = -4\Omega^2 \sin^2(\phi) - 4\omega^2 = -4(\Omega^2 \sin^2(\phi) + \omega^2)$. Nasze dwa pierwiastki są postaci

$$\alpha_{\pm} = -i\Omega \sin(\phi) \pm i\sqrt{\Omega^2 \sin^2(\phi) + \omega^2} \quad (2.123)$$

Możemy tutaj dokonać przybliżenia: czas drgań wahadła jest znacznie mniejszy niż czas obrotu Ziemi wokół własnej osi. W przypadku Ziemi $\Omega = 7 \cdot 10^{-5} s^{-1}$, a dla wahadła o długości 10m mamy $\omega = \sqrt{g/l} = 1 s^{-1}$, co uzasadnia to przybliżenie. Innymi słowy, częstość wahadła jest znacznie większa niż częstość obrotu Ziemi $\omega \gg \Omega$

$$\alpha_{\pm} \approx -i\Omega \sin(\phi) \pm i\omega \quad (2.124)$$

Nasze rozwiązanie jest zatem dane przez

$$z(t) = C_1 e^{\alpha_+ t} + C_2 e^{\alpha_- t} \quad (2.125)$$

Przyjmijmy następujące warunki początkowe (trochę inaczej niż w treści zadania, by sobie ułatwić interpretację): w chwili $t = 0$ ciało przechodzi przez położenie równowagi z prędkością v_0 w kierunku x . Daje to nam

$$\begin{aligned}z(0) &= 0 & \dot{z}(0) &= \dot{x}(0) + i\dot{y}(0) = v_0 \\ C_1 + C_2 &= 0 & C_1 \alpha_+ + C_2 \alpha_- &= v_0 \\ C_2 &= -C_1 & C_1(\alpha_+ - \alpha_-) &= C_1 2i\omega = v_0 \\ C_2 &= -\frac{v_0}{2i\omega} & C_1 &= \frac{v_0}{2i\omega}\end{aligned}\quad (2.126)$$

Możemy uprościć nasze równanie do

$$z(t) = \frac{v_0}{2i\omega} (e^{\alpha_+ t} - e^{\alpha_- t}) = \frac{v_0}{2i\omega} e^{-i\Omega \sin(\phi)t} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \frac{v_0}{\omega} e^{-i\Omega \sin(\phi)t} \sin(\omega t) \quad (2.127a)$$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \cos(\Omega \sin(\phi)t) \sin(\omega t) \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(-\Omega \sin(\phi)t) \sin(\omega t) \quad (2.127b)$$

Możemy zinterpretować wynik w następujący sposób: ponieważ $\Omega \ll \omega$ możemy przyjąć, że chwilowo $\Omega \sin(\phi)t$ jest pewną stałą. Mamy więc położenie dane przez $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$ i $y(t) = y_0 \sin(\omega t)$. Czyli mamy oscylacje z częstością własną ω naszego wahadła na pewnej prostej wyznaczonej przez x_0, y_0 . Dla dużych czasów orientacja tej prostej będzie się zmieniać. Ponieważ jest to prosta której kierunek jest dany przez x_0, y_0 zawierające sinus i cosinus, wnioskujemy, że powoli się ona obraca z częstością kątową $\Omega \sin(\phi)$.

Czas obrotu płaszczyzny wahań wahadła to $T_f = \frac{T_d}{\sin(\phi)}$, gdzie T_d to 1 doba - czas obrotu Ziemi wokół własnej osi. Można zauważyć, że na równiku ten czas jest nieskończony. Fizycznie można to zrozumieć tak, że gdy jesteśmy na równiku, to $\vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_y$, więc iloczyn wektorowy z prędkością (znajdującą się w płaszczyźnie xy) da wektor w kierunku $\hat{e}_z$. Zatem siła Coriolisa będzie tylko zmieniać naprężenie nici i nie będzie miała składowej obracającej płaszczyznę drgań wahadła.

Zad. 11

Na powierzchni obracającej się Ziemi, na szerokości geograficznej α wystrzelono ciało z prędkością v_0 pod kątem β do poziomu w kierunku północnym. Znaleźć współrzędne punktu Q upadku ciała na powierzchnię i porównać ze współrzędnymi punktu P, w którym ciało to upadłoby, gdyby Ziemia się nie obracała.