Notatki do ćwiczeń z Mechaniki Klasycznej

Wojciech Niedziółka

1 Kinematyka

Zad. 1

Znajdź wersory $\hat{e}_\rho$ i $\hat{e}_\phi$ w biegunowym układzie współrzędnych. Zapisz w bazie tych wersorów położenie, prędkość i przyspieszenie punktu materialnego wyrażone za pomocą współrzędnych ρ , ϕ i ich pochodnych po czasie.

Rozw. 1

W kartezjańskim układzie współrzędnych mamy dobrze znane wzory na położenie, prędkość i przyspieszenie punktu materialnego

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y$$
$$\vec{v} = \dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y$$
$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{e}_x + \ddot{y}\hat{e}_y$$

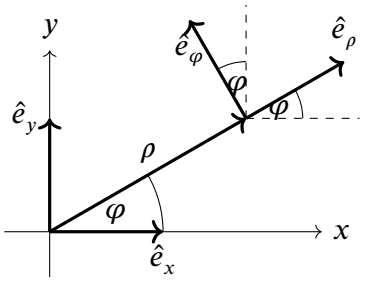
W tym zadaniu chcemy wyprowadzić analogiczne wzory, ale we współrzędnych biegunowych. Będą one miały ogólną postać (z pewnymi na razie nie znanymi współczynnikami)

$$\vec{r} = r_\rho\hat{e}_\rho + r_\varphi\hat{e}_\varphi$$
$$\vec{v} = v_\rho\hat{e}_\rho + v_\varphi\hat{e}_\varphi$$
$$\vec{a} = a_\rho\hat{e}_\rho + a_\varphi\hat{e}_\varphi$$

Same współrzędne biegunowe są dane wzorem

$$x = \rho\cos(\varphi) \tag{1.1a}$$
$$y = \rho\sin(\varphi) \tag{1.1b}$$

Wersory, sposób I (geometryczny).



Rysunek 1: Wersory biegunowego układu współrzędnych w pewnym punkcie (ρ, φ)

Odczytując z obrazka (pamiętając że wersory mają długość 1) otrzymujemy wzory na wersory $\hat{e}_\rho$ i $\hat{e}_\varphi$ we współrzędnych kartezjańskich

$$\hat{e}_\rho = \cos(\varphi)\hat{e}_x + \sin(\varphi)\hat{e}_y \tag{1.2a}$$
$$\hat{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\hat{e}_x + \cos(\varphi)\hat{e}_y \tag{1.2b}$$

Niestety ta metoda mimo swojej prostoty (w sensie idei) wymaga graficznego rozrysowania problemu, staje się to problematyczne przy niestandardowych współrzędnych jak współrzędne hiperboliczne. W przypadku współrzędnych trójwymiarowych metoda graficzna jest niemal niedostępna, potrzebujemy bardziej uniwersalnej metody.

Wersory, sposób II (z definicji). Wersor $\hat{e}_\rho$ jest wektorem jednostkowym, który pokazuje nam kierunek w którym rośnie współrzędna ρ, a pozostałe pozostają stałe. Motywuje to poniższy wzór, który czasem jest brany jako definicja wersorów

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \qquad \hat{e}_\rho = \frac{\vec{e}_\rho}{\left\|\vec{e}_\rho\right\|} \tag{1.3a}$$
$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \qquad \hat{e}_\varphi = \frac{\vec{e}_\varphi}{\left\|\vec{e}_\varphi\right\|} \tag{1.3b}$$

Należy pamiętać o normalizacji, powyższe pochodne dają nam kierunki zmiany współrzędnych, ale wersory muszą być unormowane. W naszym przypadku używamy $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y = \rho\cos(\varphi)\hat{e}_x + \rho\sin(\varphi)\hat{e}_y$

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos(\varphi)\hat{e}_x + \sin(\varphi)\hat{e}_y \qquad \hat{e}_\rho = \frac{\vec{e}_\rho}{\left\|\vec{e}_\rho\right\|} = \cos(\varphi)\hat{e}_x + \sin(\varphi)\hat{e}_y$$
$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\rho\sin(\varphi)\hat{e}_x + \rho\cos(\varphi)\hat{e}_y \qquad \hat{e}_\varphi = \frac{\vec{e}_\varphi}{\left\|\vec{e}_\varphi\right\|} = -\sin(\varphi)\hat{e}_x + \cos(\varphi)\hat{e}_y$$

Co zgadza się z poprzednim rachunkiem, ale ta metoda działa nawet jeśli mamy "skomplikowane" współrzędne.

Położenie, sposób I (trick). Zapiszmy wektor położenia podstawiajac za x i y współrzędne biegunowe, zauważmy że

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y = \rho\cos(\varphi)\hat{e}_x + \rho\sin(\varphi)\hat{e}_y = \rho\big(\cos(\varphi)\hat{e}_x + \sin(\varphi)\hat{e}_y\big) = \rho\hat{e}_\rho \tag{1.4}$$

Niektórych może zdziwić, że położenie jest wyrażone przez wersor $\hat{e}_\rho$ i drugi wersor nie jest tu potrzebny, ale jeśli spojrzymy na rysunek 1, łatwo możemy się przekonać, że wersor $\hat{e}_\rho$ z definicji jest skierowany do naszego punktu, więc po pomnożeniu go przez odległość punktu od środka układu współrzędnych mamy nasz wektor położenia.

Położenie, sposób II (rachunek). Poprzednia metoda polegała na pewnym szczęściu w podstawieniu i zbiegowi okoliczności, że udało się zauważyć wersor $\hat{e}_\rho$. Istnieje bardziej systematyczny sposób uzyskania odpowiedzi, należy najpierw odwrócić wzory na wersory by uzyskać wzory na wersory układu kartezjańskiego

$$\begin{aligned}\hat{e}_x &= \cos(\varphi)\hat{e}_\rho - \sin(\varphi)\hat{e}_\varphi \\ \hat{e}_y &= \sin(\varphi)\hat{e}_\rho + \cos(\varphi)\hat{e}_\varphi\end{aligned}$$

Następnie możemy podstawić te wzory, razem ze wzorami na x i y do wektora położenia wyrażonego w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{e}_x + y\hat{e}_y = \rho\cos(\varphi)\big(\cos(\varphi)\hat{e}_\rho - \sin(\varphi)\hat{e}_\varphi\big) + \rho\sin(\varphi)\big(\sin(\varphi)\hat{e}_\rho + \cos(\varphi)\hat{e}_\varphi\big) \\ &= \big(\rho\cos^2(\varphi) + \rho\sin^2(\varphi)\big)\hat{e}_\rho + (\rho\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \rho\sin(\varphi)\cos(\varphi))\hat{e}_\varphi = \rho\hat{e}_\rho\end{aligned}$$

Prędkość. Prędkość jest zdefiniowana jako pochodna położenia po czasie, obliczmy więc pochodną po czasie położenia wyrażonego w biegunowym układzie współrzędnych

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\big(\rho\hat{e}_\rho\big) = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} \tag{1.5}$$

Należy tu podkreślić ważny fakt, w kartezjańskim układzie współrzędnych wersory są stałe, tzn niezależne od położenia. Natomiast w biegunowym (ale też w innych krzywoliniowych współrzędnych) wersory zależą od położenia, a co za tym idzie od czasu. Zanim pójdziemy dalej obliczmy pochodną po czasie obu wersorów, przyda nam się tu postać (1.2a)

$$\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \frac{d}{dt}\big(\cos(\varphi)\hat{e}_x + \sin(\varphi)\hat{e}_y\big) = -\sin(\varphi)\dot{\varphi}\hat{e}_x + \cos(\varphi)\dot{\varphi}\hat{e}_y = \dot{\varphi}\hat{e}_\varphi \tag{1.6a}$$

$$\frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\big(-\sin(\varphi)\hat{e}_x + \cos(\varphi)\hat{e}_y\big) = -\cos(\varphi)\dot{\varphi}\hat{e}_x - \sin(\varphi)\dot{\varphi}\hat{e}_y = -\dot{\varphi}\hat{e}_\rho \tag{1.6b}$$

Możemy teraz dokończyć obliczanie prędkości

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi \tag{1.7}$$

Przyspieszenie. By zakończyć zadaje pozostaje policzyć pochodną po czasie wektora prędkości

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\big(\dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi\big) = \ddot{\rho}\hat{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \dot{\rho}\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\hat{e}_\rho \\ &= \big(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\big)\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\hat{e}_\varphi\end{aligned} \tag{1.8}$$

Zad. 2

Wykonaj analogiczną analizę dla walcowego i sferycznego układu współrzędnych

Rozw. 2

Walcowy układ współrzędnych. Chcemy powtórzyć rachunki z zadania 1, najpierw zróbmy to dla walcowego układu współrzędnych (ρ, φ, z)

$$x = \rho \cos(\varphi) \tag{1.9a}$$
$$y = \rho \sin(\varphi) \tag{1.9b}$$
$$z = z \tag{1.9c}$$

Zauważmy, że zmienne (x, y) przechodzą na (ρ, φ), a z się nie zmienia, mamy tu dwie niezależne zmiany współrzędnych. Co za tym idzie wyniki są tu niemal takie same jak w przypadku biegunowym, należy tylko uwzględnić dodatkowo z i $\hat{e}_z$ (ten sam wersor co w układzie kartezjańskim, który nie zależy od położenia). Wersory nowego układu współrzędnych to

$$\hat{e}_\rho = \cos(\varphi)\hat{e}_x + \sin(\varphi)\hat{e}_y \tag{1.10a}$$
$$\hat{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\hat{e}_x + \cos(\varphi)\hat{e}_y \tag{1.10b}$$
$$\hat{e}_z = \hat{e}_z \tag{1.10c}$$

Położenie jest dane wzorem

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z = \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z \tag{1.11}$$

Prędkość wynosi

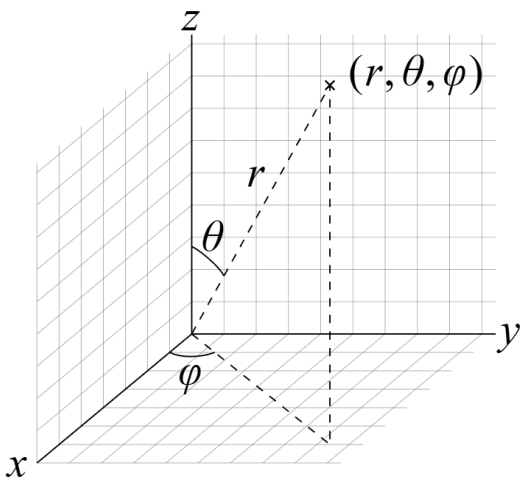
$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y\right) + \frac{d}{dt}\left(z\hat{e}_z\right) = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \dot{z}\hat{e}_z \tag{1.12}$$

Przyspieszenie jest równe

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\hat{e}_\varphi + \ddot{z}\hat{e}_z \tag{1.13}$$

Sferyczny układ współrzędnych. Problem jest w pełni analogiczny do zadania 1. Jedyna trudność leży w tym, że mamy teraz trzy współrzędne i trójwymiarową przestrzeń wektorową, a co za tym idzie dłuższe rachunki (choć tak samo złożone) i problem z wykorzystaniem rysunków. Rozważamy współrzędne

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$$
$$z = r\cos(\theta)$$



Rysunek 2: Współrzędne sferyczne [Obrazek z Wikipedii: `https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_coordinate_system`]

Wersory. Z definicji (używamy $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z = r\sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{e}_x + r\sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{e}_y + r\cos(\theta)\hat{e}_z$)

$$\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{e}_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{e}_y + \cos(\theta)\hat{e}_z$$
$$\hat{e}_r = \frac{\vec{e}_r}{\|\vec{e}_r\|} = \sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{e}_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{e}_y + \cos(\theta)\hat{e}_z$$
$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r\cos(\theta)\cos(\varphi)\hat{e}_x + r\cos(\theta)\sin(\varphi)\hat{e}_y - r\sin(\theta)\hat{e}_z$$
$$\hat{e}_\theta = \frac{\vec{e}_\theta}{\|\vec{e}_\theta\|} = \cos(\theta)\cos(\varphi)\hat{e}_x + \cos(\theta)\sin(\varphi)\hat{e}_y - \sin(\theta)\hat{e}_z$$
$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -r\sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{e}_x + r\sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{e}_y$$
$$\hat{e}_\varphi = \frac{\vec{e}_\varphi}{\|\vec{e}_\varphi\|} = -\sin(\varphi)\hat{e}_x + \cos(\varphi)\hat{e}_y$$

gdzie użyliśmy $\|\vec{e}_r\| = 1$, $\|\vec{e}_\theta\| = r$ i $\|\vec{e}_\varphi\| = r\sin(\theta)$

Położenie. Zapiszmy wektor położenia podstawiajac za x, y i z współrzędne sferyczne

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z = r\sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{e}_x + r\sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{e}_y + r\cos(\theta)\hat{e}_z \\ &= r\big(\sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{e}_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{e}_y + \cos(\theta)\hat{e}_z\big) = r\hat{e}_r\end{aligned}$$

Możliwe jest też podejście rachunkowe bez "szczęśliwego zgadnięcia" jak w zadaniu 1, ale poszliśmy tu szybszą ścieżką.

Prędkość. By policzyć wektor prędkości liczymy pochodną po czasie wektora położenia

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\big(r\hat{e}_r\big) = \dot{r}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt}$$

Jak poprzednio widzimy że pojawiają się pochodne po czasie wersorów, obliczmy je

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{e}_r}{dt} &= \cos(\theta)\dot{\theta}\cos(\varphi)\hat{e}_x - \sin(\theta)\sin(\varphi)\dot{\varphi}\hat{e}_x + \cos(\theta)\dot{\theta}\sin(\varphi)\hat{e}_y + \sin(\theta)\cos(\varphi)\dot{\varphi}\hat{e}_y - \sin(\theta)\dot{\theta}\hat{e}_z \\
&= \dot{\theta}\big(\cos(\theta)\cos(\varphi)\hat{e}_x + \cos(\theta)\sin(\varphi)\hat{e}_y - \sin(\theta)\hat{e}_z\big) + \sin(\theta)\dot{\varphi}\big(-\sin(\varphi)\hat{e}_x + \cos(\varphi)\hat{e}_y\big) \\
&= \dot{\theta}\hat{e}_\theta + \sin(\theta)\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi \\
\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} &= -\sin(\theta)\dot{\theta}\cos(\varphi)\hat{e}_x - \cos(\theta)\sin(\varphi)\dot{\varphi}\hat{e}_x - \sin(\theta)\dot{\theta}\sin(\varphi)\hat{e}_y + \cos(\theta)\cos(\varphi)\dot{\varphi}\hat{e}_y - \cos(\theta)\dot{\theta}\hat{e}_z \\
&= -\dot{\theta}\big(\sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{e}_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{e}_y + \cos(\theta)\hat{e}_z\big) + \cos(\theta)\dot{\varphi}\big(-\sin(\varphi)\hat{e}_x + \cos(\varphi)\hat{e}_y\big) \\
&= -\dot{\theta}\hat{e}_r + \cos(\theta)\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi \\
\frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} &= -\cos(\varphi)\dot{\varphi}\hat{e}_x - \sin(\varphi)\dot{\varphi}\hat{e}_y = -\sin(\theta)\dot{\varphi}\big(\sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{e}_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{e}_y + \cos(\theta)\hat{e}_z\big) \\
&\quad -\cos(\theta)\dot{\varphi}\big(\cos(\theta)\cos(\varphi)\hat{e}_x + \cos(\theta)\sin(\varphi)\hat{e}_y - \sin(\theta)\hat{e}_z\big) = -\sin(\theta)\dot{\varphi}\hat{e}_r - \cos(\theta)\dot{\varphi}\hat{e}_\theta
\end{aligned}$$

Możemy teraz dokończyć obliczanie prędkości

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$$

Przyspieszenie. By zakończyć zadaje pozostaje policzyć pochodną po czasie wektora prędkości

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\big(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi\big) \\
&= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\big(\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \sin(\theta)\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi\big) \\
&+ \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\big(-\dot{\theta}\hat{e}_r + \cos(\theta)\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi\big) \\
&+ \dot{r}\sin(\theta)\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + r\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + r\sin(\theta)\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\big(-\sin(\theta)\dot{\varphi}\hat{e}_r - \cos(\theta)\dot{\varphi}\hat{e}_\theta\big) \\
&= \big(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2\big)\hat{e}_r + \big(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2\big)\hat{e}_\theta + \big(r\sin(\theta)\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\sin(\theta)\dot{\varphi} + 2r\dot{\theta}\cos(\theta)\dot{\varphi}\big)\hat{e}_\varphi
\end{aligned}$$

Zad. 3

W biegunowym układzie współrzędnych ruch punktu materialnego opisują zależności:

$$\rho = 2R\sin(\omega t) \qquad \varphi = \omega t \tag{1.14}$$

gdzie t to czas, a R i ω to stałe dodatnie.

a) Wykaż, że torem ruchu jest okrąg. Jaki jest promień tego okręgu?

b) Oblicz drogę $s(t)$ tego punktu przebywaną w czasie od 0 do t.

c) Oblicz radialne i transwersalne oraz styczne i normalne składowe prędkości i przyspieszenia.

Rozw. 3

Zanim zaczniemy rozwiązywać zadanie zauważmy, że w biegunowym układzie współrzędnych wymagamy, by $\rho \geq 0$. W kartezjańskim układzie współrzędnych ruch punktu materialnego jest dany przez

$$x(t) = \rho\cos(\varphi) = 2R\sin(\omega t)\cos(\omega t) \tag{1.15a}$$

$$y(t) = \rho\sin(\varphi) = 2R\sin^2(\omega t) \tag{1.15b}$$

Naiwnie zmieniając współrzędne na kartezjańskie, uzyskujemy sensowne wzory dla których dalsza część zadania ma sens. Możemy pracować z ujemnym promieniem, nie przejmując się nieścisłą definicją albo jeśli ktoś jest bardziej pedantyczny, może ograniczyć się do $0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}$ dla których promień jest nieujemny i nie ma problemów z definicjami.

a) Jednym z pomysłów jak pokazać, że tor ruchu jest okręgiem może być użycie równania okręgu, we współrzędnych kartezjańskich ma ono postać

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = r^2$$

gdzie x_0, y_0 to współrzędne środka okręgu (nie muszą być równe zero i nietrudno się przekonać że dla $x_0 = 0 = y_0$ otrzymamy wyrażenie zależne od czasu, więc nasz okrąg jest przesunięty), a r to jego promień. Ta metoda wymaga sprytnego zgadnięcia tych trzech wielkości (umotywowanego jakąś definicją, ale jednak zgadnięcia), spróbujemy posłużyć się tu zamiast tego trygonometrią. We wzorach na współrzędne w układzie kartezjańskim (1.15a) widzimy znajome wzory na sinus i cosinus podwójnego kąta

$$\begin{aligned} x(t) &= 2R \sin(\omega t)\cos(\omega t) = R\sin(2\omega t) \\ y(t) &= 2R\sin^2(\omega t) = R\left(1 - \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right) = R(1 - \cos(2\omega t)) \end{aligned}$$

Rozpoznajemy w powyższych wzorach zależność czasową współrzędnych ciała poruszającego się po okręgu o środku w $x = 0\,, y = R$ i promieniu R z prędkością kątową $\Omega = 2\omega$. Łatwo też sprawdzić to z równaniem okręgu, gdzie uzyskujemy jedynkę trygonometryczną usuwającą zależność czasową. Dalsze podpunkty można zrobić prawie trywialnie korzystając z wiedzy o ruchu po okręgu, prędkość ma stałą wartość równą $\Omega R = 2\omega R$, przyspieszenie $\Omega^2 R = 4\omega^2 R$. Znalezienie odpowiednich składowych wymaga odrobiny geometrii, ale podobnie jak w poprzednich zadaniach, chcemy wykorzystać ten problem do wyprowadzenia (przypomnienia) ogólnych wzorów, które zadziałają niezależnie od skomplikowania problemu.

b) Droga jest zdefiniowana jako

$$s(t) = \int_0^t \left\|\vec{v}(\tau)\right\| d\tau$$

Zwrot wektora prędkości nie jest tu istotny i liczy się tylko jego długość. Możemy tu wykorzystać wzór na wektor prędkości we współrzędnych biegunowych

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi = 2R\omega\cos(\omega t)\hat{e}_\rho + 2R\omega\sin(\omega t)\hat{e}_\varphi$$

Jego długość to $\|vec v\| = 2R\omega\sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = 2R\omega$, podstawiając otrzymujemy

$$s(t) = \int_0^t \left\|\vec{v}(\tau)\right\| d\tau = \int_0^t 2R\omega d\tau = 2R\omega t$$

c) prędkość. Składowa radialna prędkości to nic innego jak v_ρ (współczynnik stojący przy wersorze $\hat{e}_\rho$), natomiast składowa transwersalna $v_t = v_\varphi$. Mamy

$$\begin{aligned} v_\rho &= \dot{\rho} = 2R\omega\cos(\omega t) \\ v_t = v_\varphi &= \rho\dot{\varphi} = 2R\omega\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Składowa styczna prędkości to składowa wektora w kierunku stycznym do toru, innymi słowy składowa prędkości w kierunku ruchu. Ponieważ prędkość wyznacza kierunek ruchu, to mamy $v_s = v$ (ta składowa to cały wektor), a składowa normalna (składowa wektora w kierunku prostopadłym do stycznej) wynosi zero. Taki wynik dla składowych normalnych i stycznych prędkości uzyskamy zawsze.

c) przyspieszenie. Składowa radialna przyspieszenia to a_ρ, a transwersalna to $a_t = a_\varphi$. Posłużmy się wynikami zadania 1 do znalezienia ich

$$a_\rho = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right) = -4R\omega^2 \sin(\omega t)$$
$$a_t = a_\varphi = (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) = 4R\omega^2 \cos(\omega t)$$

Przyspieszenie ma naturalny rozkład na część styczną do prędkości (toru ruchu) i normalną $\vec{a} = \vec{a}_s + \vec{a}_n$. Możemy posłużyć się iloczynem skalarnym by znaleźć te składowe, obliczmy iloczyn skalarny obu stron z $\vec{v}$

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = \vec{v}\cdot\vec{a}_s + \vec{v}\cdot\vec{a}_n = va_s + 0 \implies a_s = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v}$$

Składowa normalna może zostać znaleziona z $\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_s$ Podstawiając dane z zadania otrzymujemy

$$a_s = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v} = \frac{v_\rho a_\rho + v_\varphi a_\varphi}{v} = \frac{8R^2\omega^3 \cos(\omega t)\sin(\omega t) - 8R^2\omega^3 \sin(\omega t)\cos(\omega t)}{2R\omega} = 0$$

Składowa styczna wynosi zero, więc całe przyspieszenie jest normalne i $a_n = a = \sqrt{a_\rho^2 + a_\varphi^2} = 4R\omega^2$. Taka sytuacja nie zdarza się zawsze, ale nie powinna być zaskoczeniem, bo jeśli weźmiemy definicję długości i zadziałamy pochodną otrzymamy

$$\|\vec{v}\|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} \implies 2\|\vec{v}\|\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} \implies \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v} = a_s$$

Zatem składowa styczna przyspieszenia odpowiada za zmianę długości wektora prędkości, od niej zależy czy ruch spowalnia czy przyspiesza. W ruchu po okręgu ze stałą prędkością jest naturalne, że wynosi ona zero. Składowa normalna przyspieszenia odpowiada za zakrzywianie toru ruchu. Związana jest z tym definicja promienia krzywizny $\mathcal{R}$, który jest zdefiniowany jako promień okręgu po którym się chwilowo poruszamy

$$a_n = \frac{v^2}{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \mathcal{R} = \frac{v^2}{a_n} \tag{1.16}$$

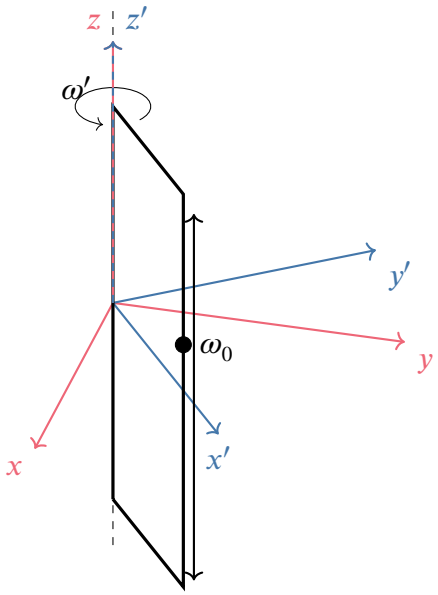
W przypadku ruchu po okręgu promień krzywizny jest równy promieniowi okręgu i jest stały, ale dla bardziej skomplikowanej krzywej będzie on zależał od czasu.

Zad. 4

Po jednym z boków prostokąta porusza się ruchem harmonicznym o częstości ω_0 punkt materialny. Prostokąt obraca sie wokół przeciwległego boku z prędkością kątową ω. W układzie odniesienia związanym z prostokątem znaleźć zależność czasową położenia, prędkości i przyspieszenia punktu materialnego. Dokonać transformacji tych wielkości do układu inercjalnego.

Rozw. 4

Wybieramy układy współrzędnych układu inercjalnego O i nieinercjalnego O' w sposób następujący: oba układy porywają się w chwili $t = 0$, osie z i z' będą pokrywać się przez cały czas ruchu, obrót odbywa się w płaszczyźnie xy. Oś x' układu nieinercjalnego cały czas pokrywa się z bokiem obracającego się prostokąta (tak, że nasz punkt materialny ma składową y' równą 0). Układ O' obraca się zatem z prędkością kątową ω, dodatkowo wybieramy początki obu układów by się pokrywały w chwili $t = 0$ i leżały na nieobracającym się boku prostokąta, przez co będą się pokrywać przez cały czas trwania ruchu.



Rysunek 3: Rysunek układu i wprowadzonych współrzędnych. [Stworzony przez Mikołaja Marcinkowskiego]

Dodatkowo użyjemy w tym zadaniu dla wygody notacji macierzowej, by wygodniej pracować w dwóch różnych układach współrzędnych $\left(\vec{r}\right)_{xyz}$ będzie oznaczał wektor kolumnowy z współrzędnymi wektora $\vec{r}$ w bazie układu O, natomiast $\left(\vec{r}\right)_{x'y'z'}$ będzie oznaczał wektor kolumnowy z współrzędnymi wektora $\vec{r}$ w bazie układu O'.

Wielkości w układzie nieinercjalnym. Opiszmy najpierw ruch ciała w układzie odniesienia związanym z prostokątem tzn w układzie nieinercjalnym, będziemy oznaczać wielkości z nim związane literkami z primem. Widać, że brakuje nam danych w zadaniu, więc musimy zaproponować oznaczenia na wielkości niezbędne do rozwiązania go: przez L oznaczmy długość boku prostokąta prostopadłą do osi obrotu (długości drugiego boku nie będziemy potrzebować), a przez A amplitudę oscylacji punktu materialnego. Położenie jest dane przez

$$\left(\vec{r'}\right)_{x'y'z'} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ A\sin\left(\omega_0 t\right) \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

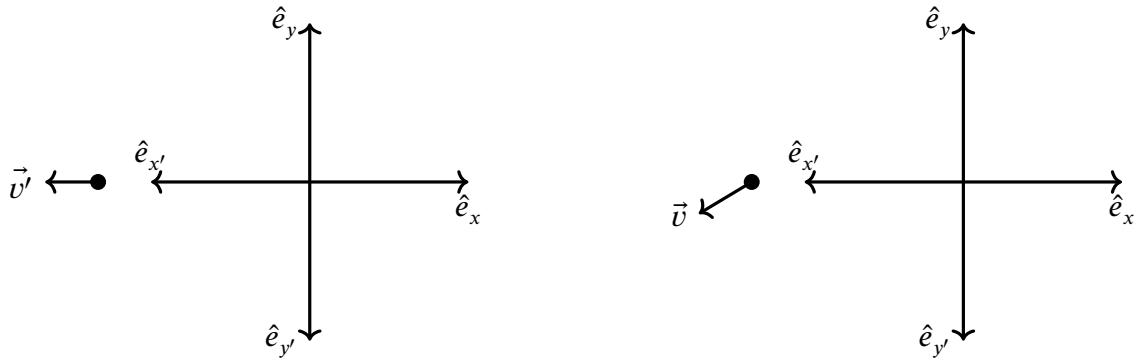
Wektor $\left(\vec{r'}\right)_{x'y'z'}$ zadaje trajektorię we współrzędnych układu O', prędkość $\vec{v'}$ i przyspieszenie $\vec{a'}$ w układzie

O' są zwykłymi pochodnymi, fakt że jesteśmy w układzie nieinercjalnym nie gra tu roli.

$$\left(\vec{v'}\right)_{x'y'z'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t\right) \end{pmatrix} \tag{1.18a}$$

$$\left(\vec{a'}\right)_{x'y'z'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -A\omega_0^2 \sin\left(\omega_0 t\right) \end{pmatrix} \tag{1.18b}$$

Transformacja pomiędzy układami. Transformacja wielkości fizycznych do układu poruszającego się jest standardową wiedzą i nie stanowi zwykle problemów, niestety transformacja ich do układu obracającego się jest już dużo bardziej skomplikowana. Zrozummy najpierw pewną istotną subtelność kryjącą się w naszej notacji na przykładzie prędkości, który nie jest związany z problemem z zadania. Dalej rozważamy układ inercjalny O i układ nieinercjalny $\overline{O'}$ obracający się jak w głównej części zadania (układy mają wspólny początek). Teraz niech nasz punkt materialny porusza się w taki sposób, że w układzie obracającym się oddala się z prędkością u w kierunku osi x', jego prędkość może zostać zapisana jako $\left(\vec{v'}\right)_{x'y'z'} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$. Interesuje nas chwila gdy osie się pokrywają, ale wersory są skierowane w przeciwne strony jak na rysunku 4

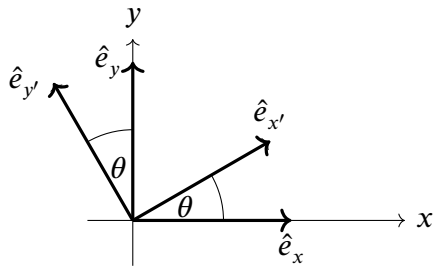


Rysunek 4: Wersory $\hat{e}_x$ i $\hat{e}_y$, oraz wersory $\hat{e}_{x'}$ i $\hat{e}_{y'}$ w rozważanej przez nas dygresji. Lewy rysunek ilustruje położenie punktu materialnego i wektor prędkości w nieinercjalnym układzie odniesienia O', a prawy wektor prędkości w inercjalnym układzie odniesienia O

Prędkość $\vec{v}$ w układzie inercjalnym może zostać zapisana jako $\left(\vec{v}\right)_{xyz} = \begin{pmatrix} -u & -w & 0 \end{pmatrix}^T$ (oznaczamy długość jego składowej w kierunku y przez w). Te dwie wielkości to odpowiednio: prędkość w układzie nieinercjalnym O' tzn. $\vec{v'}$ zapisana we współrzędnych tego układu i prędkość w układzie inercjalnym O tzn. $\vec{v}$ zapisana we współrzędnych tego układu. Możemy też rozważyć $\left(\vec{v'}\right)_{xyz} = \begin{pmatrix} -u & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ czyli prędkość w układzie nieinercjalnym O' zapisaną we współrzędnych xyz układu O, oraz $\left(\vec{v}\right)_{x'y'z'} = \begin{pmatrix} u & w & 0 \end{pmatrix}^T$ czyli prędkość w układzie inercjalnym O zapisaną we współrzędnych $x'y'z'$ układu O'. Są to cztery "obiekty" ilustrujące że możemy rozdzielić pojęcie układu odniesienia od jego współrzędnych i zapisywać wielkości jednego z nich we współrzędnych drugiego. Tzn. możemy mieć np. prędkość w układzie odniesienia O' zapisaną we współrzędnych xyz związanymi z układem O tzn $\left(\vec{v'}\right)_{xyz}$. Zauważmy, że nawet zapisując je w tych samych współrzędnych mamy różne wielkości, co podkreśla fakt,

że $\vec{v} \neq \vec{v'}$ (równości bez współrzędnych oznaczają że jest to prawda w dowolnych współrzędnych), tzn. prędkość w układzie inercjalnym jest innym wektorem niż prędkość w układzie nieinercjalnym i nie jest to tylko kwestia innych współrzędnych (języka w którym opisujemy te wielkości). Nie powinno to być zaskoczeniem, bo są sytuacje w których w jednym układzie ciało spoczywa, a w innym się porusza, pojęcie ruchu jest zatem względne.

W przypadku wektora położenia sytuacja jest prostsza dzięki temu, że nasze układy mają wspólny początek. Wektory położenia są sobie równe i będziemy je teraz utożsamiać $\vec{r} = \vec{r'}$, choć oczywiście w różnych układach współrzędnych mają różne współrzędne, tzn $\left(\vec{r'}\right)_{x'y'z'} \neq \left(\vec{r}\right)_{xyz}$. Możemy o tym myśleć w taki sposób, że to "gdzie ciało jest" jest czymś nad czym obaj obserwatorzy mogą się zgodzić, choć każdy używa innego języka by o tym mówić (współrzędnych), ale to "czy ono się rusza" jest już względne (w przypadku gdzie układy współrzędnych mają różne początki, sprawa się komplikuje i mielibyśmy dwa różne wektory położenia, powiązane równaniem $\hat{e}_r = \hat{e}_{r'} + \vec{\Delta} r$). By przetransformować wektor położenia do współrzędnych układu O wystarczy zrozumieć zwykłą zmianę współrzędnych w przypadku gdy układy się wzajemnie obracają. Możemy posłużyć się rysunkiem 5 (dwuwymiarowym, bo w kierunku z nic się nie zmienia) by znaleźć łatwo zależności między wersorami i macierz obrotu



Rysunek 5: Wersory $\hat{e}_x$ i $\hat{e}_y$, oraz obrócone o kąt θ wersory $\hat{e}_{x'}$ i $\hat{e}_{y'}$

$$\hat{e}_{x'} = \cos(\theta)\hat{e}_x + \sin(\theta)\hat{e}_y$$
$$\hat{e}_{y'} = -\sin(\theta)\hat{e}_x + \cos(\theta)\hat{e}_y$$
$$\vec{r} = x'\hat{e}_{x'} + y'\hat{e}_{y'} + z'\hat{e}_{z'} = \big(x'\cos(\theta) - y'\sin(\theta)\big)\hat{e}_x + \big(x'\sin(\theta) + y'\cos(\theta)\big)\hat{e}_y + z'\hat{e}_z \implies$$
$$\left(\vec{r}\right)_{xyz} = \begin{pmatrix} x'\cos(\theta) - y'\sin(\theta) \\ x'\sin(\theta) + y'\cos(\theta) \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R(\theta)\left(\vec{r}\right)_{x'y'z'}$$

Macierz $R(\theta)$ jest też zwana macierzą obrotu, w naszym przypadku kąt obrotu to ωt i nasza transformacja położenia jest dana wzorem

$$\left(\vec{r}\right)_{xyz} = R(\omega t)\left(\vec{r}\right)_{x'y'z'} \tag{1.19}$$

By znaleźć jak wygląda transformacja prędkości zróżniczkujmy po czasie obie strony powyższego rów-

nania i skorzystajmy z definicji prędkości w różnych układach

$$\begin{aligned}
\left(\vec{v}\right)_{xyz} &= \frac{d}{dt}\left(\vec{r}\right)_{xyz} \\
\left(\vec{v'}\right)_{x'y'z'} &= \frac{d}{dt}\left(\vec{r'}\right)_{x'y'z'} \\
\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\right)_{xyz} &= \frac{d}{dt}\left(R(\omega t)\left(\vec{r}\right)_{x'y'z'}\right) = \dot{R}(\omega t)\left(\vec{r}\right)_{x'y'z'} + R(\omega t)\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\right)_{x'y'z'}
\end{aligned}$$

Porównajmy jeszcze to jak pochodna macierzy obrotu działa na wektor z tym jak ta macierz na niego działa

$$\begin{aligned}
R(\theta)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)a - \sin(\theta)b \\ \sin(\theta)a + \cos(\theta)b \\ c \end{pmatrix} \\
R'(\theta)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta)a - \cos(\theta)b \\ \cos(\theta)a - \sin(\theta)b \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Pierwsza i druga składowa się zamieniły, a trzecia zamieniła się w zero. Ten sam wynik otrzymalibyśmy gdyby zadziałać iloczynem wektorowym z $\hat{e}_z$

$$\hat{e}_z \times \left(R(\theta)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta)a - \sin(\theta)b \\ \sin(\theta)a + \cos(\theta)b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta)a - \cos(\theta)b \\ \cos(\theta)a - \sin(\theta)b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pochodna po czasie przy działaniu na $R(\omega t)$ produkuje czynnik ω, który możemy zaabsorbować do $\hat{e}_z$ i otrzymać wzór (który byłby prawdziwy dla ogólnego obrotu)

$$\vec{\omega} \times \left(R(\omega t)\left(\vec{r}\right)_{x'y'z'}\right) = \dot{R}(\omega t)\left(\vec{r}\right)_{x'y'z'}$$

gdzie $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_z$ jest tzw. wektorem obrotu, wygląda on tak samo w obu układach współrzędnych. Możemy teraz dokończyć transformację prędkości

$$\left(\vec{v}\right)_{xyz} = \dot{R}(\omega t)\left(\vec{r}\right)_{x'y'z'} + R(\omega t)\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\right)_{x'y'z'} = \vec{\omega} \times \left(R(\omega t)\left(\vec{r}\right)_{x'y'z'}\right) + R(\omega t)\left(\vec{v'}\right)_{x'y'z'} = \vec{\omega} \times \left(\vec{r}\right)_{xyz} + \left(\vec{v'}\right)_{xyz} \tag{1.20}$$

Ponieważ wszystkie wielkości są tu wyrażone w tych samych współrzędnych, możemy opuścić indeksy i uzyskać ogólne równanie, prawdziwe w dowolnych współrzędnych na transformację prędkości

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v'} \tag{1.21}$$

Możemy analogicznie znaleźć transformację przyspieszenia wychodząc od

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{a}\right)_{xyz} &= \frac{d}{dt}\left(\vec{v}\right)_{xyz} \\
\left(\vec{a'}\right)_{x'y'z'} &= \frac{d}{dt}\left(\vec{v'}\right)_{x'y'z'} \\
\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\right)_{xyz} &= \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\left(R(\omega t)\left(\vec{r}\right)_{x'y'z'}\right)+R(\omega t)\left(\vec{v'}\right)_{x'y'z'}\right) \\
&= \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\left(R(\omega t)\left(\vec{r}\right)_{x'y'z'}\right)+\vec{\omega}\times\left(\dot{R}(\omega t)\left(\vec{r}\right)_{x'y'z'}\right)+\vec{\omega}\times\left(R(\omega t)\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\right)_{x'y'z'}\right) \qquad (1.22)\\
&+ \dot{R}(\omega t)\left(\vec{v'}\right)_{x'y'z'}+R(\omega t)\frac{d}{dt}\left(\vec{v'}\right)_{x'y'z'} \\
&= \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\left(\vec{r}\right)_{xyz}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\left(\vec{r}\right)_{xyz}\right)+2\vec{\omega}\times\left(\vec{v'}\right)_{xyz}+\left(\vec{a'}\right)_{xyz} \qquad (1.23)
\end{aligned}
$$

lub w zapisie bez współrzędnych

$$
\vec{a}=\vec{a'}+\underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}}_{\text{Euler}}+\underbrace{\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)}_{\text{Odśrodkowe}}+\underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{v'}}_{\text{Coriolis}} \qquad (1.24)
$$

Czyli przy zmianie układu nasze przyspieszenie zyskuje trzy nowe człony: człon odśrodkowy znany ze szkoły, oraz człon Coriolisa i człon Eulera, które są już mniej omawiane w szkole. Należy tu podkreślić że nasze wyprowadzenie zakładało, że układy współrzędnych mają wspólny początek, gdyby się dodatkowo poruszały względem siebie, $\vec{r}=\vec{r'}+\vec{\Delta}r$ (gdzie $\vec{\Delta}r$ jest położeniem układu O' według układu O) i musielibyśmy zmodyfikować nasze wyprowadzenie by otrzymać dodatkowo człony transwersalne ($\left(\vec{\Delta}a\right)_{xyz}=\frac{d}{dt}\left(\vec{\Delta}v\right)_{xyz}=\frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{\Delta}r\right)_{xyz}$)

$$
\vec{r}=\vec{r'}+\vec{\Delta}r \qquad (1.25)
$$

$$
\vec{v}=\vec{v'}+\vec{\Delta}v+\vec{\omega}\times\vec{r'} \qquad (1.26)
$$

$$
\vec{a}=\vec{a'}+\vec{\Delta}a+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r'}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r'}\right)+2\vec{\omega}\times\vec{v'} \qquad (1.27)
$$

Wielkości w układzie inercjalnym. Możemy teraz użyć wyprowadzonych wzorów 1.19, 1.20 i 1.22 by obliczyć szukane wielkości

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{r}\right)_{xyz} &= R(\omega t)\left(\vec{r}\right)_{x'y'z'} \\
\left(\vec{v}\right)_{xyz} &= \vec{\omega}\times\left(\vec{r}\right)_{xyz}+R(\omega t)\left(\vec{v'}\right)_{x'y'z'} \\
\left(\vec{a}\right)_{xyz} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\left(\vec{r}\right)_{xyz}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\left(\vec{r}\right)_{xyz}\right)+2\vec{\omega}\times\left(R(\omega t)\left(\vec{v'}\right)_{x'y'z'}\right)+R(\omega t)\left(\vec{a'}\right)_{x'y'z'}
\end{aligned}
$$

$$
\left(\vec{r}\right)_{xyz}=R(\omega t)\left(\vec{r}\right)_{x'y'z'}=\begin{pmatrix}\cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0\\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L\\ 0\\ A\sin\left(\omega_0 t\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L\cos(\omega t)\\ L\sin(\omega t)\\ A\sin\left(\omega_0 t\right)\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{v}\right)_{xyz} &= \vec{\omega} \times \left(\vec{r}\right)_{xyz} + R(\omega t)\left(\vec{v'}\right)_{x'y'z'} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L\cos(\omega t) \\ L\sin(\omega t) \\ A\sin\left(\omega_0 t\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A\omega_0\cos\left(\omega_0 t\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -L\omega\sin(\omega t) \\ L\omega\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A\omega_0\cos\left(\omega_0 t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L\omega\sin(\omega t) \\ L\omega\cos(\omega t) \\ A\omega_0\cos\left(\omega_0 t\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{a}\right)_{xyz} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \left(\vec{r}\right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{r}\right)_{xyz}\right) + 2\vec{\omega} \times \left(R(\omega t)\left(\vec{v'}\right)_{x'y'z'}\right) + R(\omega t)\left(\vec{a'}\right)_{x'y'z'} \\
&= 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -L\omega\sin(\omega t) \\ L\omega\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A\omega_0\cos\left(\omega_0 t\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -A\omega_0^2\sin\left(\omega_0 t\right) \end{pmatrix} \\
&= 0 + \begin{pmatrix} -L\omega^2\cos(\omega t) \\ -L\omega^2\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -A\omega_0^2\sin\left(\omega_0 t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L\omega^2\cos(\omega t) \\ -L\omega^2\sin(\omega t) \\ -A\omega_0^2\sin\left(\omega_0 t\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Zad. 5

W wierzchołkach kwadratu ABCD o boku a znajdują się cztery żuki. W ustalonej chwili żuk początkowo znajdujący sie w punkcie A zaczyna poruszać się z prędkością o stałej wartości v w kierunku żuka początkowo znajdującego sie w punkcie B itd. Po jakim czasie żuki się spotkają, jaką droge przebędzie każdy z nich i jaki kąt (liczony względem środka kwadratu) zakreśli?

Rozw. 5

Mamy cztery żuki poruszające się w dwuwymiarowej przestrzeni, a ich prędkości są związane z położeniem innych żuków. Daje to nam układ ośmiu równań, które należy rozwiązać (odważni mogą spróbować takiego podejścia). Problem można jednak uprościć i uniknąć zbytnich rachunków: mamy cztery żuki poruszające się według zasad, które nie wyróżniają żadnego z nich. Z symetrii problemu wnioskujemy, że jeśli jeden z nich po czasie t przesunie się o $\vec{r}$, wektory przesunięcia pozostałych żuków będą obróconym o wielokrotność kąta $\pi/2$ wektorem $\vec{r}$. Innymi słowy, położenia żuków będą cały czas tworzyć kwadrat tym samym środku co na początku ruchu, który będzie coraz mniejszy, aż żuki się spotkają w jego środku. Pozwala to nam skupić się na ruchu jednego z żuków, jeśli będziemy w danej chwili znać jego położenie, możemy rysując kwadrat ustalić położenia pozostałych. Wybieramy układ współrzędnych w taki sposób, że środek kwadratu pokrywa się z początkiem układu współrzędnych, a nasz wybrany żuk w chwili $t = 0$ znajduje się na osi x. Ponieważ żuki przez cały czas tworzą kwadrat, ich prędkości są pod kątem $\pi/4$ do promienia, możemy zapisać prędkość naszego żuka we współrzędnych biegunowych

$$
\vec{v} = -v\sin(\pi/4)\hat{e}_\rho + v\cos(\pi/4)\hat{e}_\varphi = -\frac{v}{\sqrt{2}}\hat{e}_\rho + \frac{v}{\sqrt{2}}\hat{e}_\varphi \tag{1.28}
$$

jej składowe są stałe w czasie. Z drugiej strony dzięki zadaniu 1 wiemy, że $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$, co daje nam układ równań

$$\dot{\rho} = -\frac{v}{\sqrt{2}} \tag{1.29a}$$

$$\rho\dot{\varphi} = \frac{v}{\sqrt{2}} \tag{1.29b}$$

Możemy rozwiązać pierwsze z nich przez scałkowanie

$$\rho(t) - \rho(0) = \int_0^t \dot{\rho}(\tau)d\tau = \int_0^t -\frac{v}{\sqrt{2}}d\tau = -\frac{vt}{\sqrt{2}} \implies \rho(t) = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{vt}{\sqrt{2}} \tag{1.30}$$

Żuki spotkają się w środku układu współrzędnych, co daje nam warunek na szukany czas $\rho(t_{\max}) = 0$, czas ten jest równy $t_{\max} = \frac{a}{v}$. Żuki poruszają się ze stałą prędkością v, więc każdy przebędzie drogę $vt_{\max} = a$ By znaleźć kąt musimy rozwiązać drugie równanie

$$\begin{aligned}\varphi(t) - \varphi(0) &= \int_0^t \dot{\varphi}(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{v}{\rho(\tau)\sqrt{2}}d\tau = \int_0^t \frac{v}{a - v\tau}d\tau = -\log\left(\frac{a}{v} - \tau\right)\Big|_0^t \\ &= -\log\left(\frac{a}{v} - t\right) + \log\left(\frac{a}{v}\right) = \log\left(\frac{a}{a - vt}\right) \implies \\ \varphi(t) &= \log\left(\frac{a}{a - vt}\right)\end{aligned} \tag{1.31}$$

Kąt zakreślony przez każdego żuka wynosi $\varphi(t_{\max}) = \lim_{t\to t_{\max}} \log\left(\frac{a}{a-vt}\right) = \infty$