

lista zadań na ćwiczenia

1. Znaleźć wersory $\hat{e}_\rho$ i $\hat{e}_\phi$ w biegunowym układzie współrzędnych. Zapisać w bazie tych wersorów położenie, prędkość i przyspieszenie punktu materialnego wyrażone za pomocą współrzędnych ρ , ϕ i ich pochodnych po czasie.
2. Wykonać analogiczną analizę dla walcowego i kulistego układu współrzędnych.
3. W biegunowym układzie współrzędnych ruch punktu materialnego opisują zależności:

$$\rho = 2R \sin\left(\frac{1}{2}\omega t\right), \quad \phi = \omega t.$$

- (a) Wykazać, że torem ruchu jest okrąg. Jaki jest promień tego okręgu? (b) Obliczyć drogę $s(t)$ tego punktu przebywaną w czasie od 0 do t . (c) Obliczyć radialne i transversalne oraz styczne i normalne składowe prędkości i przyspieszenia.
4. Po jednym z boków prostokąta porusza się ruchem harmonicznym o częstości ω_0 punkt materialny. Prostokąt obraca się wokół przeciwległego boku z prędkością kątową ω' . W układzie odniesienia związanym z prostokątem znaleźć zależność czasową położenia, prędkości i przyspieszenia punktu materialnego. Dokonać transformacji tych wielkości do układu inercjalnego.
 5. (Zakochane żuki) W wierzchołkach kwadratu ABCD o boku a znajdują się cztery żuki. W ustalonej chwili żuk początkowo znajdujący się w punkcie A zaczyna poruszać się z prędkością o stałej wartości v w kierunku żuka początkowo znajdującego się w punkcie B itd. Po jakim czasie żuki się spotkają, jaką drogę przebędzie każdy z nich i jaki kąt (liczony względem środka kwadratu) zakreśli?
 6. Nieważkie ciało o masie m i prędkości początkowej $\vec{v}_0$ porusza się pod działaniem siły oporu $\vec{F} = \alpha v^n \frac{\vec{v}}{v}$. Znaleźć ruch, zasięg ruchu i czas trwania ruchu.
 7. Jednowymiarowy, tłumiony oscylator harmoniczny o częstości własnej ω_0 porusza się pod działaniem siły wymuszającej $F(t) = F_0 \cos \omega t$. Znaleźć ruch tego oscylatora.
 8. Jednowymiarowy, tłumiony oscylator harmoniczny o częstości własnej ω_0 porusza się pod działaniem dowolnej siły wymuszającej $F(t)$. Znaleźć ruch tego oscylatora po upływie długiego czasu od chwili początkowej (innymi słowy: znaleźć funkcję Greena oscylatora harmonicznego).
 9. Na powierzchni obracającej się Ziemi ciało zostało upuszczone z wysokości h . Początkowo znajdowało się nad punktem P, ale dotknęło Ziemi w punkcie Q. Znaleźć odległość PQ (w zależności od szerokości geograficznej).
 10. (Wahadło Focaulta) Na powierzchni obracającej się Ziemi zawieszono wahadło o długości ℓ i wprowadzono w małe drgania, wychylając je z położenia równowagi w kierunku południowym. Znaleźć ruch wahadła.
 11. Na powierzchni obracającej się Ziemi, na szerokości geograficznej α wystrzelono ciało z prędkością v_0 pod kątem β do poziomu w kierunku północnym. Znaleźć współrzędne punktu Q upadku ciała na powierzchnię i porównać ze współrzędnymi punktu P, w którym ciało to upadłoby, gdyby Ziemia się nie obracała.

12. Ciała o masach m_1 i m_2 oddziałują siłami spełniającymi III prawo dynamiki Newtona, przy czym $\vec{F}_{12} = \alpha(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$, gdzie $\alpha = \text{const}$. Przedyskutować jakościowo (tj. bez odwoływania się do postaci rozwiązań równań ruchu) zakres zmienności względnej odległości między tymi ciałami w zależności od warunków początkowych. Dyskusję zilustrować odpowiednimi wykresami.
13. Przeprowadzić analogiczną dyskusję dla siły $\vec{F}_{12} = \frac{\beta}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$.
14. (Problem Keplera) Ciała o masach m_1 i m_2 oddziałują siłami spełniającymi III prawo dynamiki Newtona, przy czym:

$$\vec{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}.$$

Znaleźć ruch ciał.

15. Wyznaczyć i naszkicować tor ruchu cząstki o masie m w potencjale $V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$.
16. Dwa punkty materialne o masach m_1 i m_2 połączone są sztywnym i nieważkim prętem o długości ℓ . Punkty te poruszają się na płaszczyźnie po prostych, odpowiednio, $x = 0$ oraz $y = x$, bez tarcia. Przyspieszenie ziemskie to $\vec{g} = -g\hat{e}_y$. Napisać równania Lagrange'a I rodzaju, wyznaczyć położenie równowagi oraz siły reakcji więzów w tym położeniu.
17. Punkt materialny o masie m ślizga się po stożku o kącie rozwarcia 2α i osi skierowanej pionowo do góry. Wypisać równania Lagrange'a I rodzaju, sprowadzić ruch do tzw. kwadratur i przedyskutować go. Znaleźć siłę reakcji w zależności od położenia punktu.
18. Punkt materialny o masie m zsuwa się po zewnętrznej powierzchni kuli o promieniu R . Wyznaczyć siłę reakcji więzów w zależności od położenia punktu i określić, w jakim miejscu punkt ten oderwie się od kuli.
19. Na gładkiej poziomej płaszczyźnie znajduje się klin o masie M i kącie nachylenia α , połączony z pionową ścianą poziomą, nieważką sprężyną o współczynniku sprężystości k i długości swobodnej ℓ_0 . Powierzchnia ukośna klina jest gładka i zsuwa się z niej punkt materialny o masie m . Cały układ znajduje się w stałym i jednorodnym polu grawitacyjnym. Znaleźć lagranżjan układu, wypisać i rozwiązać równania Lagrange'a II rodzaju.
20. Punkt materialny o masie m może się poruszać bez tarcia po okręgu o promieniu R obracającym się ze stałą prędkością kątową Ω wokół pionowej średnicy. Znaleźć lagranżjan i uogólnioną energię potencjalną. Znaleźć położenia równowagi, określić ich trwałość i wyznaczyć częstotliwości małych drgań wokół położenia równowagi trwałej.
21. Punkt materialny o masie m jest zawieszony na sprężynie o współczynniku sprężystości k i długości swobodnej ℓ_0 . Do punktu tego podwieszony – na takiej samej sprężynie – jest drugi punkt materialny o masie m . Cały układ znajduje się w stałym i jednorodnym polu grawitacyjnym. Znaleźć częstotliwości własne i mody własne drgań układu.
22. Półwalec p promieniu a i masie M toczący się bez poślizgu po poziomej płaszczyźnie wykonuje drgania wokół położenia równowagi trwałej. Wypisać równania ruchu półwalca i przedyskutować jego małe drgania przy użyciu równań Lagrange'a II rodzaju.
23. Walec o masie M i promieniu a porusza się po równi pochyłej o kącie nachylenia α . Przedyskutować ruch walca, zakładając, że ruch odbywał się bez poślizgu.
24. Walec o masie M i promieniu a porusza się po równi pochyłej o kącie nachylenia α . Przedyskutować ruch walca, zakładając, że współczynnik tarcia kinetycznego walca o równie jest równy μ .

25. Pręt o długości L i masie M opiera się o podłogę i ścianę, pozostając w płaszczyźnie prostopadłej do podłogi i ściany. Znaleźć równanie ruchu pręta, zakładając, że podłoga i ściana są na tyle gładkie, że tarcie można zaniedbać.
26. Rozwiązać równania Eulera dla bąka swobodnego, symetrycznego, tj. dla $I_x = I_y$.
27. Używając równań Lagrange'a II rodzaju, opisać ruch bąka symetrycznego, ciężkiego, tj. ciała, którego jeden punkt jest unieruchomiony, ale ciało może się wokół niego swobodnie obracać, pozostając w stałym, jednorodnym polu grawitacyjnym.