

Notatki do ćwiczeń z Algebry z Geometrią II

Wojciech Niedziółka

C Zadania dodatkowe: Iloczyn skalarny

Zad. C.1

Niech V będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym, a W jej podprzestrzenią. Znajdź bazę ortonormalną W w podanych przypadkach

a) $V = \mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym i $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

b) $V = \mathbb{R}_3[\cdot]$ z iloczynem skalarnym $\langle w|v \rangle = w(-1)v(-1) + w(0)v(0) + w'(0)v'(0) + w(1)v(1)$ i $W = \langle x+1, x^2, x^3 \rangle$

c) $V = C([-1, 1])$ (funkcje ciągłe na odcinku $[-1, 1]$) z iloczynem skalarnym $\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ i $W = \langle 1, x+1, |x|, \sin(x) \rangle$

Zad. C.2

W czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej płaszczyzna Π_1 przechodzi przez punkty $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

natomiast płaszczyzna Π_2 przechodzi przez punkty $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

a) Czy płaszczyzny są równoległe?

b) Jaka jest odległość między płaszczyznami?

Zad. C.3

Rozważmy proste w $\mathbb{R}^4$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Znajdź płaszczyznę Π zawierającą punkt $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ i spełniającą $\Pi \perp L_1$, $\Pi \cap L_2 = \emptyset$

Zad. C.4

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozważmy proste

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid a + b = 1, b - 2c = 8 \right\}$$

Znajdź prostą $L \subset \mathbb{R}^3$ taką, że odległość L od L_1 i L_2 to 3, oraz $L \perp L_1, L_2$

Zad. C.5

Niech $n \geq 1$, $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$, oraz $a \in \mathbb{R}$. Zdefiniujmy

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x|v \rangle = a\}$$

Znajdź wzór na odległość punktu $y \in \mathbb{R}^n$ od zbioru A

Zad. C.6

W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}_3[\cdot]$ z iloczynem skalarnym

$$\langle v|w \rangle = \int_{-1}^1 v(t)w(t)dt$$

Wyznacz odległość wielomianu

$$w_0 = 1 + t + t^2 + t^3$$

od płaszczyzny wielomianów

$$\Pi = \left\{ w \in \mathbb{R}_3[\cdot] \mid \begin{matrix} w''(1) - 15w(1) = w''(-1) - 15w(-1) \\ 2w''(1) + 20w'(0) + 12w(0) = 9\langle w|1 \rangle - 2 \end{matrix} \right\}$$

Zad. C.7

Oblicz objętość (czterowymiarową) czterowymiarowego równoległościanu w czterowymiarowej przestrzeni Euklidesa, którego jeden wierzchołek w pewnym układzie kartezjańskim ma współrzędne

$$a = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

zaś wierzchołki mające wspólną krawędź z a mają współrzędne

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Jaka jest objętość (trójwymiarowa) jego „ściany bocznej” zawierającej wierzchołki $abcd$

Zad. C.8

Niech $V = \mathbb{R}_4[\cdot]$, sprawdzić, że następujący operator $\mathbf{P}$ jest rzutem, znajdź jego obraz i jądro

$$(\mathbf{P}v)(t) = v(2) + (t-2)\dot{v}(2) + \frac{1}{2}(t-2)^2\ddot{v}(2)$$

Zad. C.9

Znaleźć wartości i wektory własne podanych macierzy A . Sprawdzić, że jest to macierz normalna, oraz znaleźć ortonormalną bazę przestrzeni $\mathbb{C}^3$ złożoną z jej wektorów własnych i jej rozkład spektralny

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & i \\ -i & 4 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ i & 1 & -1-i \\ -1-i & 1+i & 2-2i \end{pmatrix}$$

Zad. C.10

Niech v, w będzie parą ortogonalnych unormowanych wektorów w przestrzeni unitarnej. Dla każdego z operatorów

$$\begin{aligned} A &= |v\rangle\langle v| & B &= |v\rangle\langle w| & C &= |v\rangle\langle w| + |w\rangle\langle v| \\ D &= |v\rangle\langle w| - |w\rangle\langle v| & E &= |v\rangle\langle w| + i|w\rangle\langle v| & F &= |v\rangle\langle w| + 2|w\rangle\langle v| \end{aligned}$$

sprawdzić, czy operator jest normalny, hermitowski, unitarny

Zad. C.11

Czy istnieje w przestrzeni $\mathbb{C}^2$ iloczyn skalarny taki, że operator określony wzorem $F(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x$ jest: a) normalny; b) samosprężony

Zad. C.12

Niech $A \in \mathbb{R}_n^n$, udowodnij że dla $n = 3$ zachodzi następujący wzór

$$\det(A) = \frac{1}{6} (2 \operatorname{Tr} A^3 - 3 \operatorname{Tr} A^2 \operatorname{Tr} A + (\operatorname{Tr} A)^3)$$

Jakie byłyby analogiczne wzory dla $n = 2$ i $n = 4$ wyrażające wyznacznik przez ślady?

Zad. C.13

Dana jest forma kwadratowa Q na przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + x_3^2 - 2x_3x_4 + x_4^2$$

Znaleźć

- macierz B formy kwadratowej Q
- bazę ortonormalną diagonalizującą Q
- macierz ortogonalną $\mathcal{O}$ taką, że macierz $\mathcal{O}^{-1}B\mathcal{O}$ jest diagonalna
- sygnaturę formy kwadratowej Q

WSKAZÓWKI

- Zad. C.1:** Zastosuj algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta
- Zad. C.2:** Kiedy dwie proste są równoległe? Jaki daje to warunek na opis parametryczny? Jak to uogólnić do przypadku dwóch płaszczyzn?
- Zad. C.3:** Wygodnie jest poszukać opisu parametrycznego tej płaszczyzny $\Pi = y_0 + W$, jaki jest wygodny wybór x_0 ? Jakie warunki na podprzestrzeń W narzuca treść zadania?
- Zad. C.4:** Wygodniej najpierw zapewnić drugi warunek, a potem pierwszy, pracując w opisie parametrycznym
- Zad. C.5:** Znajdź RORJ i zgadnij RSRN, by znaleźć opis parametryczny
- Zad. C.6:** Zadanie jest analogiczne do problemów w $\mathbb{R}^n$, choć bardziej abstrakcyjne, strategia jest taka sama. Znajdź opis parametryczny płaszczyzny i przeprowadź ortogonalizację Grama-Schmidta na odpowiednim zestawie wektorów.
- Zad. C.7:** Objętości można obliczyć znajdując macierz Grama
- Zad. C.8:** Skorzystaj bezpośrednio z definicji rzutu, zadanie można zrobić bez reprezentacji macierzowej, ale można się nią wspomóc
- Zad. C.9:** Zadanie jest w pełni analogiczne do 13.1
- Zad. C.10:** Zastosuj $|v\rangle^\dagger = \langle v|$
- Zad. C.11:** Co wiemy o diagonalizacji operatorów normalnych i samosprężonych
- Zad. C.12:** Co gdyby macierz A byłaby diagonalizowalna? Czy jeśli nie jest diagonalizowalna, poprzedni argument przestaje działać?
- Zad. C.13:** Zadanie to jest kombinacją wiedzy o macierzach formy kwadratowej omówionej przy okazji kryterium Sylwestera, oraz diagonalizacji macierzy normalnych

ODPOWIEDZI

Zad. C.1: Stosując algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta, by dostać bazę ortogonalną, a następnie normalizując wektory otrzymujemy odpowiedź. Poniżej przykładowe bazy (jeśli do algorytmu "wrzucimy" wektory z zadania w innej kolejności dostaniemy równie dobre, ale inne bazy)

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \frac{1}{\sqrt{6}}(x+1), \frac{1}{2\sqrt{3}}(3x^2-x-1), \frac{1}{2}(2x^3+x^2-x-1)$$

$$\text{c) } \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{6}(|x| - \frac{1}{2}), \frac{3x(\cos 1 - \sin 1) + \sin x}{\sqrt{-5 + \frac{11}{2} \sin 2}}$$

Zad. C.2: Możemy wprowadzić opis parametryczny

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Płaszczyzny nie są równoległe, bo dwuwymiarowe podprzestrzenie z postaci parametrycznej są różne, łatwo to zobaczyć badając wymiar obrazu tych czterech wektorów. Okazuje się że

$$\dim \text{im} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

Mimo to płaszczyzny się nie przecinają, ponieważ ich odległość od siebie jest równa 7. By szybko obliczyć tę odległość, można znaleźć dopełnienie ortogonalne wyżej wskazanego obrazu, które jest jednowymiarową podprzestrzenią i zastosować wzór na odległość $\frac{|\langle \Delta | n \rangle|}{\|n\|}$.

Zad. C.3: Mamy $\Pi = x + \langle v_1, v_2 \rangle$, nasz wyszczególniony punkt to x z treści zadania, żeby pozostałe

warunki były spełnione wektory v_1, v_2 muszą być prostopadłe do $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, oznacza to, że

$$v_1, v_2 \ni \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Możemy wybrać sobie v_1, v_2 i sprawdzić czy warunek nie przecinania L_2 będzie spełniony, niech

$$\Pi = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Ewidentnie ta płaszczyzna nie ma punktów wspólnych z $P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1+x \\ 1 \\ 1 \\ 1-x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

Zad. C.4: L_2 ma opis parametryczny

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Drugi warunek oznacza, że wektor wyznaczający kierunek L jest prostopadły do wektora kierunku L_1 i L_2 (są równoległe, więc to jeden wektor). Możemy sprytnie skonstruować odpowiedź, niech v - wektor kierunku prostej L będzie składową Δ (wektora łączącego L_1 i L_2) prostopadłą do $v_1 = v_2$ (wektorów kierunków prostych L_1 i L_2). Jeśli wybralibyśmy $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ mielibyśmy prostą prostopadłą do L_1, L_2 przechodzącą przez nie, my chcemy by była w odległości 3 od obu tych prostych, więc możemy przesunąć ją o 3 w kierunku wektora $n = v \times v_1$ dodając do x_2 trzykrotność znormalizowanego wektora $\hat{n}$. Daje to (paskudny wynik)

$$L = \frac{1}{\sqrt{689}} \begin{pmatrix} \sqrt{689} - 57 \\ -54 \\ -4\sqrt{689} - 6 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -14 \\ 23 \\ -74 \end{pmatrix} \rangle$$

Zad. C.5: Opis parametryczny A to $A = \frac{a}{\|v\|^2}v + \langle v \rangle^\perp$, możemy zastosować wzór na odległość $\frac{|\langle \Delta | n \rangle|}{\|n\|}$, gdzie $n = v$ to wektor prostopadły do podprzestrzeni wyznaczającej "kierunek" płaszczyzny. Odległość jest dana wzorem $\frac{|\langle y|v \rangle - a|}{\|v\|}$

Zad. C.6: Opis parametryczny

$$\Pi = t^2 + \langle -1 + 3t^2, -3t + 5t^3 \rangle$$

Wektor prostopadły do płaszczyzny łączący ją z punktem y uzyskujemy z ortogonalizacji Grama-Schmidta $1 + \frac{8}{5}t$ Odległość jest równa jego długości, czyli $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{278}{3}}$

Zad. C.7: Macierz Grama jest równa

$$G(b-a, c-a, d-a, e-a) = \begin{pmatrix} 243 & 334 & 358 & 329 \\ 334 & 487 & 517 & 456 \\ 358 & 517 & 550 & 488 \\ 329 & 456 & 488 & 446 \end{pmatrix}$$

Objętość to pierwiastek jej wyznacznika $\sqrt{\det G(b-a, c-a, d-a, e-a)} = 7$, natomiast objętość ścian bocznej można obliczyć z mniejszej macierzy Grama $\sqrt{\det G(b-a, c-a, d-a)} = \sqrt{2103}$

Zad. C.8: Jądro i obraz możemy znaleźć zastanawiając się jakie wektory możemy otrzymać, a jakie są zerowane

$$\ker \mathbf{P} = \langle (t-2)^3, (t-2)^4 \rangle$$

$$\operatorname{im} \mathbf{P} = \langle 1, (t-2), (t-2)^2 \rangle$$

Zad. C.9: a)

$$\lambda = 3, \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 5, \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & i \\ -i & 4 \end{pmatrix} = 3P_1 + 5P_2$$

b)

$$\lambda = 0, \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 9 - 3i, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 - 3i \\ 1 - 3i \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 9 + 3i, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 + 3i \\ 1 + 3i \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 & 4 - 3i & -2 - 6i \\ 4 + 3i & 5 & 2 - 6i \\ -2 + 6i & 2 + 6i & 8 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 & 4 + 3i & -2 + 6i \\ 4 - 3i & 5 & 2 + 6i \\ -2 - 6i & 2 - 6i & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 0P_1 + (9 - 3i)P_2 + (9 + 3i)P_3$$

c)

$$\lambda = -5, \quad v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 4 + 3i, \quad v_2 = \frac{1}{3\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -2 - 6i \\ 4 - 3i \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 4 - 3i, \quad v_3 = \frac{1}{3\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -2 + 6i \\ 4 - 3i \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad P_2 = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 8 & 2 - 6i & -2 - 6i \\ 2 + 6i & 5 & 4 - 3i \\ -2 + 6i & 4 + 3i & 5 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 8 & 2 + 6i & -2 + 6i \\ 2 - 6i & 5 & 4 + 3i \\ -2 - 6i & 4 - 3i & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -5P_1 + (4 + 3i)P_2 + (4 - 3i)P_3$$

d)

$$\lambda = 0, \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 3 - 3i, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 + i, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -i \\ -1 & 1 & i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2i \\ -1 & 1 & -2i \\ -2i & 2i & 4 \end{pmatrix} \quad P_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ i & 1 & -1-i \\ -1-i & 1+i & 2-2i \end{pmatrix} = 0P_1 + (3-3i)P_2 + (1+i)P_3$$

Zad. C.10: Normalne: A, C, D, E . Hermitowskość: A, C . Unitarność: E tylko jeśli wymiar jest równy 2 (u, w są bazą)

Zad. C.11: Wartości własne to $\lambda_{\pm} = 3 \pm i$, macierz jest diagonalizowalna. Możemy sobie zdefiniować taki iloczyn skalarny tak, że wektory własne F są w nim bazą O.N., wtedy F byłby operatorem normalnym (każdy operator diagonalizowalny w O.N. bazie jest normalny). Jeśli istniałby taki iloczyn skalarny w którym F jest samosprężony, wartości własne byłyby liczbami rzeczywistymi, co nie jest prawdą. Mamy więc a) TAK, b) NIE

Zad. C.12: Jeśli macierz jest diagonalizowalna, w pewnej bazie macierz jest diagonalna i ma na diagonalu wartości własne, wyznacznik jest ich iloczynem, a ślad sumą. Jeśli macierz nie jest diagonalizowalna ma postać Jordana z klatkami 2×2 lub większymi, nie zmienia to jednak tego, że wyznacznik to iloczyn wartości własnych, a ślad to ich suma. Ślad A^k jest sumą k -tych potęg wartości własnych. Używając $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ i $\text{Tr } A^k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \lambda_3^k$ łatwo sprawdzić, że

$$\begin{aligned} \det A &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \frac{1}{6} (2(\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3) \\ &\quad - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3) \\ &= \frac{1}{6} (2 \text{Tr } A^3 - 3 \text{Tr } A^2 \text{Tr } A + (\text{Tr } A)^3) \end{aligned}$$

Analogiczne wzory dla $n = 2$ i $n = 4$ to

$$\det(A) = \frac{1}{2} ((\text{Tr } A)^2 - \text{Tr } A^2)$$

$$\det(A) = \frac{1}{24} ((\text{Tr } A)^4 - 6(\text{Tr } A)^2 \text{Tr } A^2 + 8 \text{Tr } A^3 \text{Tr } A + 3(\text{Tr } A^2)^2 - 6 \text{Tr } A^4)$$

Zad. C.13: a) Macierz formy kwadratowej to

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Baza ortonormalna diagonalizująca formę Q jest tą samą, która diagonalizuje macierz B . Diagonalizacja formy kwadratowej wymaga by $\mathcal{O}^T B \mathcal{O}$ było diagonalne, diagonalizacja macierzy wymaga by $\mathcal{O}^{-1} B \mathcal{O}$ było diagonalne. Dla macierzy ortogonalnych $\mathcal{O}^{-1} = \mathcal{O}^T$ i te warunki są równoważne.

b) Baza diagonalizująca Q to zortonormalizowana baza złożona z wektorów własnych

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Szukana macierz $\mathcal{O}$ to macierz zmiany bazy z diagonalizującej do standardowej, jej kolumny to wektory powyższej bazy

$$\mathcal{O} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

d) Sygnaturę możemy odczytać z wartości własnych, mamy 2 z krotnością trzy i -2, sygnatura to (3,1)