

Notatki do ćwiczeń z Algebry z Geometrią II

Wojciech Niedziółka

B Zadania dodatkowe: Formy kwadratowe

Zad. B.1

Znajdź sygnaturę i bazę diagonalizującą dane formy kwadratowe $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ dla

a) $V = \mathbb{R}^3$, $Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$

b) $V = \mathbb{R}^4$, $Q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_1x_4 + 2x_2x_3 + 8x_2x_4 + 12x_3x_4$

c) $V = \mathbb{R}_2^2$, $Q(X) = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X^T X \right)$

d) $V = \mathbb{R}_2[\cdot]$, $Q(v) = \int_0^1 v(t)v(1-t)dt$

e) $V = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, $Q(x) = 9(x_1^2 - x_2^2) + 5(x_3^2 - x_4^2)$

Zad. B.2

W zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ znajdź sygnaturę formy kwadratowej, której macierz to

$$\begin{pmatrix} 9a-3 & \sqrt{3}(5a-1) & 3(a^2+2a-1) \\ \sqrt{3}(5a-1) & a^2+9a-1 & \sqrt{3}(2a^2+4a-1) \\ 3(a^2+2a-1) & \sqrt{3}(2a^2+4a-1) & 6a^2+6a-3 \end{pmatrix}$$

Zad. B.3

Niech $V = \mathbb{R}^3$, znajdź sygnaturę i bazę diagonalizującą formę kwadratową $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$

$$Q(x) = tx_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + tx_2^2 + 2x_2x_3 + tx_3^2$$

Zad. B.4

Niech $n \geq 1$, $V_n = \mathbb{R}^n$. Rozważmy formy kwadratowe $P_n, Q_n : V \rightarrow \mathbb{R}$

$$P_n(x) = \sum_{i,j=1}^n \min(i, j)x_i x_j$$

$$Q_n(x) = \sum_{i,j=1}^n \max(i, j)x_i x_j$$

Oblicz rzędy i sygnatury powyższych form, dla jakich wartości n istnieje $F \in \text{End}(V_n)$, taki że $Q_n(F(x)) = P_n(x)$

Zad. B.5

Niech $V = \mathbb{R}^3$. Rozważmy formy kwadratowe $P, Q : V \rightarrow \mathbb{R}$

$$P(x) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 2tx_1x_3 + x_2^2$$

$$Q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 - x_3^2$$

Dla jakich $t \in \mathbb{R}$

a) $P(x) > Q(x)$ dla każdego $0 \neq x \in V$

b) $P(x) \geq Q(x)$ dla każdego $x \in V$

Zad. B.6

Niech $V = \mathbb{R}^3$. Rozważmy formy kwadratowe $P, Q : V \rightarrow \mathbb{R}$

$$P(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

$$Q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 4x_2x_3 + tx_3^2$$

Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ istnieje liniowy operator $F : V \rightarrow V$, taki że $P(x) = Q(F(x))$, podaj wzór na F dla tych t

WSKAZÓWKI

- Zad. B.1:** Zadanie analogiczne do zadania 6.1, zastosuj algorytm Lagrange'a by znaleźć sygnaturę i współrzędne diagonalizujące, a następnie znajdź nową bazę
- Zad. B.2:** Strategia jest podobna do zadania 7.2, kryterium Sylwestera pozwala znaleźć sygnaturę jeśli minory są różne od zera. W pozostałych przypadkach trzeba użyć algorytmu Lagrange'a
- Zad. B.3:** Należy wykorzystać algorytm Lagrange'a, bo kryterium Sylwestera daje nam tylko informacje o sygnaturze i nie jest przydatne przy szukaniu bazy diagonalizującej
- Zad. B.4:** Spróbuj użyć kryterium Sylwestera, sprytna redukcja wierszowa pozwala łatwo obliczyć wyznaczniki
- Zad. B.5:** Rozważ $P(x) - Q(x)$, (czy jest to forma kwadratowa?) jak warunki z a) i b) tłumaczą się na sygnaturę nowej formy kwadratowej?
- Zad. B.6:** Parametr t pojawia się tylko w formie $Q(x)$ przy wyrazie x_3 , więc łatwo zdiagonalizować obie formy algorytmem Lagrange'a

ODPOWIEDZI

Zad. B.1: Baza diagonalizująca nie jest jednoznaczna, poniżej przykładowe odpowiedzi

a) sygnatura (3,0), przykładowa baza diagonalizująca $f_1 = e_1, f_2 = -e_1 + e_2, f_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$

b) sygnatura (2,2), przykładowa baza diagonalizująca $f_1 = e_1, f_2 = -e_1 + e_2, f_3 = -4e_1 + e_2 + e_3, f_4 = -9e_1 + e_2 + 2e_3 + e_4$

c) sygnatura (2,2), przykładowa baza diagonalizująca $f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) sygnatura (2,1), przykładowa baza diagonalizująca $f_1 = 1, f_2 = t - \frac{1}{2}, f_3 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{12}$

e) sygnatura (2,1), przykładowa baza diagonalizująca $f_1 = 5e_1 - 5e_2 + 9e_3 - 9e_4, f_2 = 5e_1 - e_2 - 3e_3 - e_4, f_3 = e_1 - 5e_2 + e_3 + 3e_4$

Zad. B.2: Minory to

$$D_1 = 9(a - \frac{1}{3})$$

$$D_2 = 9(a + 1)a(a - \frac{2}{3})$$

$$D_3 = 9(a + 1)^2 a^2 (a - 1)(a - 2)$$

Daje to nam sygnaturę dla $a \notin \{-1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 2\}$, dla tych przypadków należy użyć algorytmu Lagrange'a dopełniania do kwadratu

parametr	$a < -1$	$a = -1$	$-1 < a < 0$	$a = 0$	$0 < a < \frac{1}{3}$	$a = \frac{1}{3}$
sygnatura	(2,1)	(0,1)	(0,3)	(0,1)	(2,1)	(2,1)
$\frac{1}{3} < a < \frac{2}{3}$	$a = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} < a < 1$	$a = 1$	$1 < a < 2$	$a = 2$	$2 < a$
(2,1)	(2,1)	(2,1)	(2,0)	(3,0)	(2,0)	(2,1)

Zad. B.3: Algorytm Lagrange'a dla $t \neq 0$ i $t \neq -1$ daje nam

$$Q(x) = t \left(x_1 + \frac{1}{t}x_2 + \frac{1}{t}x_3 \right)^2 + (t - \frac{1}{t})(x_2 + \frac{1}{t+1}x_3)^2 + \frac{t^2 + t - 2}{t+1}x_3^2 = ty_1^2 + (t - \frac{1}{t})y_2^2 + \frac{(t-1)(t+2)}{t+1}y_3^2$$

Sygnatura zależy od znaków współczynników $t, (t - \frac{1}{t})$ i $\frac{(t-1)(t+2)}{t+1}$. Musimy oddzielnie rozważyć przypadki $t = -1$ i $t = 0$

$$Q(x) = -(x_1 - x_2 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2 \text{ dla } t = -1$$

$$Q(x) = 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_3)^2 - 2x_1^2 \text{ dla } t = 0$$

Mamy następujące przypadki sygnatury

parametr	$t < -2$	$t = -2$	$-2 < t < -1$	$t = -1$
sygnatura	(0,3)	(0,2)	(1,2)	(1,2)
$-1 < t < 0$	$t = 0$	$0 < t < 1$	$t = 1$	$1 < t$
(1,2)	(1,2)	(1,2)	(1,0)	(3,0)

Bazę diagonalizującą otrzymujemy odwracając macierz A dającą związek między nowymi i starymi współrzędnymi $y = Ax$, jej kolumny to elementy bazy diagonalizującej

$$\begin{cases} f_1 = e_1 \\ f_2 = -\frac{1}{t}e_1 + e_2 \\ f_3 = -\frac{1}{1+t}e_1 - \frac{1}{1+t}e_2 + e_3 \end{cases} \quad \text{dla } t \neq 0 \wedge t \neq -1$$

$$\begin{cases} f_1 = e_1 \\ f_2 = e_1 + \frac{1}{2}(e_2 + e_3) \\ f_3 = \frac{1}{2}(e_2 - e_3) \end{cases} \quad \text{dla } t = -1$$

$$\begin{cases} f_1 = e_2 + e_3 \\ f_2 = \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3 \\ f_3 = e_1 - e_2 - e_3 \end{cases} \quad \text{dla } t = 0$$

Zad. B.4: Sygnatura P_n to $(n,0)$, a sygnatura Q_n to $(1,n-1)$. F istnieje tylko dla $n = 1$ i jest dane wzorem $F(x) = x$

Zad. B.5: Odpowiedź na to zadanie uzyskujemy badając sygnaturę formy kwadratowej $P(x) - Q(x)$, warunek a) będzie spełniony jeśli sygnatura jest równa $(3,0)$, a warunek b) jeśli sygnatura (p,q) spełnia $q = 0$. Podpunkt a) będzie spełniony dla $-2 < t < 2$, a podpunkt b) dla $-2 \leq t \leq 2$

Zad. B.6: Po zdiagonalizowaniu algorytmem Lagrange'a otrzymujemy (w $P(x)$ najpierw uzupełniamy kwadrat z x_3 , a w $Q(x)$ najpierw x_1 dla ładniejszych postaci wyników)

$$P(x) = (x_3 + x_2 + 2x_1)^2 + 4x_2^2 - x_1^2$$

$$Q(y) = (y_1 + 2y_2 + y_3)^2 + y_2^2 + (t-1)y_3^2$$

F będzie istniał tylko dla $t < 1$ kiedy sygnatura obu form to $(2,1)$. Żeby znaleźć postać F można przyrównać kwadraty, jeśli poniższe będzie zachodzić, możemy być pewni że $P(x) = Q(y)$ jeśli $y = Fx$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 = x_3 + x_2 + 2x_1 \\ y_2 = 2x_2 \\ \sqrt{1-t}y_3 = x_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{1-t}}x_1 - 3x_2 + x_3\right) \\ y_2 = 2x_2 \\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{1-t}}x_1 \end{cases}$$

Macierz F jest równa

$$F = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{\sqrt{1-t}} & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1-t}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$