

Notatki do ćwiczeń z Algebry z Geometrią II

Wojciech Niedziółka

A Zadania dodatkowe: Tw Cayleya-Hamiltona, wektory i wartości własne, diagonalizacja, postać Jordana

Zad. A.1

Oblicz

$$e^{itA}e^{itB}$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 5i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Zad. A.2

Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy endomorfizmu

$$M = \begin{pmatrix} 4-a & 6-2a & a-5 \\ a-2 & 2a-3 & 2-a \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Dla jakich wartości parametru a macierz nie jest diagonalizowalna? Znajdź dla tych wartości a rozkład Jordana (macierze S i J , że $M = S^{-1}JS$). Dla pozostałych wartości parametru a podaj macierz przejścia od bazy standardowej do bazy d , która diagonalizuje endomorfizm. Podaj postać (diagonalną) endomorfizmu w nowej bazie

Zad. A.3

Znajdź wartości własne i wektory własne następujących odwzorowań

a)

$$F : \mathbb{R}_2^2 \rightarrow \mathbb{R}_2^2$$
$$F(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}_n[\cdot] \rightarrow \mathbb{R}_n[\cdot]$$
$$(\mathbf{F}f)(t) = (t+1)f'(t)$$

Zad. A.4

Znajdź wektory i wartości własne cyrkulanty, oraz jej wyznacznik. Cykulantą nazywamy macierz $n \times n$ której pierwszy wiersz jest złożony z pewnych n liczb zespolonych $a_1, a_2 \dots a_n$, a kolejne wiersze są przesunięte, tzn

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

Zad. A.5

Znajdź wartości własne, przestrzenie własne, przestrzenie pierwiastkowe następujących macierzy. Oblicz wskazane wyrażenia

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} & \exp(A) = ? & \text{b) } B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix} & B^{2026} = ? \\ \text{c) } C &= \begin{pmatrix} 7 & -4 & -1 \\ 9 & -10 & 1 \\ 12 & -18 & 4 \end{pmatrix} & \exp(C) = ? & \text{d) } D = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} & D^{77} = ? \\ \text{e) } E &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \exp(E) = ? \end{aligned}$$

Zad. A.6

Niech $F \in \text{End}(\mathbb{K}_2[\cdot])$ będzie dany wzorem $F(v)(t) = v(t+1) - 2v'(t)$. Zbadać, czy istnieje baza, w której F ma macierz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Zad. A.7

Zbadać dla jakiej wartości $t \in \mathbb{C}$ macierz $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ t & t+3 \end{pmatrix}$ można wyrazić jako wielomian od macierzy $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Zad. A.8

Znaleźć bazę i postać Jordana następujących macierzy, znaleźć rozkład na część diagonalizowalną i nilpotentną

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Zad. A.9

Dla danych macierzy M znajdź macierz S taką, że $S^{-1}MS$ ma postać Jordana

$$\text{a) } M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{c) } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zad. A.10

Niech $V = \mathbb{K}_3[x, y]$ będzie przestrzenią wielomianów stopnia ≤ 3 zmiennych x i y . Znaleźć bazę i rozkład Jordana operatora $N \in \text{End}(V)$, zdefiniowanego wzorem $N = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$

Zad. A.11

Dana jest macierz

$$M_a = \begin{pmatrix} 2 & 3-a & 3-a \\ -1 & a-2 & a-3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Dla jakiej wartości parametru a macierz M_a nie jest diagonalizowalna? Dla tej wartości parametru znajdź rozkład M_a na część diagonalizowalną i nilpotentną, a ponadto podaj postać Jordana J_a oraz macierz S taką że $J_a = S^{-1}M_aS$
- b) Znajdź wartość parametru a dla którego macierz M_a ma dokładnie dwie wartości własne i jest diagonalizowalna. Oblicz $\exp(M_a)$ dla tej wartości a

Zad. A.12

Oblicz wyznaczniki (n to rozmiar macierzy)

$$\text{a) } D_n = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{b) } D_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Zad. A.13

Które z macierzy są macierzami tego samego endomorfizmu przestrzeni $\mathbb{R}^3$, ale w różnych bazach

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Zad. A.14

Znajdź postać Jordana następujących macierzy $n \times n$ dla $n \geq 2$

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a) } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Zad. A.15

Udowodnij że jeśli $v_1, v_2 \dots v_k$ są wektorami własnymi pewnej macierzy A (niekoniecznie wszystkimi) i odpowiadające im wartości własne są parami różne, to tworzą układ liniowo niezależny

WSKAZÓWKI

- Zad. A.1:** $AB \neq BA$, więc $e^{itA}e^{itB} \neq e^{it(A+B)}$, oba eksponensy trzeba policzyć oddzielnie (Cayley-Hamilton albo diagonalizacja)
- Zad. A.2:** Jeśli wielomian charakterystyczny ma $n = \dim(M)$ różnych pierwiastków o krotności 1, macierz jest diagonalizowalna, w przeciwnym wypadku możemy mieć klatkę Jordana 2×2 bądź większą
- Zad. A.3:** Znajdź macierz odwzorowania F w dowolnej bazie, będzie to macierz $n \times n$, którą można zdiagonalizować znanymi metodami
- Zad. A.4:** Problem tego typu najprościej rozwiązać przez zgadnięcie, poszukaj wektorów własnych postaci $v = (z \ z^2 \ z^3 \ \dots \ z^n)^T$. Dla jakich z jest to wektor własny? Czy możliwe jest że są inne wektory własne? Jak wpaść na takie podstawienie?
- Zad. A.5:** Wartości własne to pierwiastki wielomianu charakterystycznego $\omega_M(\lambda) = \det(M - \lambda \mathbb{1})$. Przestrzeń własna to $\ker(M - \lambda \mathbb{1})$, a przestrzeń pierwiastkowa to $\ker(M - \lambda \mathbb{1})^k$ gdzie λ to wartość własna, a k to jej krotność. Funkcje od operatora można obliczyć z postaci $M = S^{-1}DS$
- Zad. A.6:** Na początek znajdź macierz operatora F w dowolnej bazie. Warto skorzystać z własności macierzy, które nie zależą od bazy, np. wyznacznika. Co jeśli wyznaczniki okażą się te same?
- Zad. A.7:** Jaka jest ogólna postać wielomianu od macierzy A po uproszczeniu twierdzeniem Cayleya-Hamiltona?
- Zad. A.8:** Jest to standardowe zadanie w duchu zadania ?? z ćwiczeń. Znalezienie części diagonalizowalnej i nilpotentnej zwykle wymaga policzenia macierzy zmiany bazy, ale może da się tu prościej
- Zad. A.9:** Jest to standardowe zadanie w duchu zadania ?? z ćwiczeń. Macierz S to pewna macierz zmiany bazy
- Zad. A.10:** Wygodnie jest znaleźć macierz N w bazie jednomianów, a następnie użyć znanych metod szukania bazy i postaci Jordana. Przestrzeń V jest 10-wymiarowa, ale wiele wektorów własnych powinno być oczywistych, więc procedura szukania bazy i postaci Jordana może być zastosowana bez wypisywania macierzy 10×10
- Zad. A.11:** Jeśli macierz nie jest diagonalizowalna to jeden z pierwiastków wielomianu charakterystycznego ma krotność większą niż 1
- Zad. A.12:** Sprytnie zastosowanie wzoru Laplace'a wzdłuż odpowiednich wierszów/kolumn powinno dać wzór rekurencyjny na D_n , który można rozwiązać podnosząc pewną macierz do n -tej potęgi
- Zad. A.13:** Jakie własności macierzy nie zależą od bazy i pozwalają definitywnie stwierdzić, że dwie macierze nie mogą być macierzą tego samego endomorfizmu, ale w różnych bazach?
- Zad. A.14:** Czasem w tego typu problemach warto sprawdzić co się dzieje dla małych n , by wyrobić sobie intuicję
- Zad. A.15:** Wykorzystaj fakt, że $(A - \lambda_j \mathbb{1})v_i = (\lambda_i - \lambda_j)v_i$

ODPOWIEDZI

Zad. A.1: $e^{itA}e^{itB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(3e^{2it} - 10e^{6it} + 15e^{10it}) & \frac{15i}{8}(-e^{it} + e^{5it})^2 \\ -\frac{3i}{8}(-e^{it} + e^{5it})^2 & \frac{1}{8}(15e^{2it} - 10e^{6it} + 3e^{10it}) \end{pmatrix}$

Zad. A.2: Wartości własne 1, -1 i $a - 1$, jeśli są różne to macierz jest diagonalizowalna i ma 3 wektory własne. Jeśli wartości własne się powtarzają trzeba być ostrożnym, dla $a = 2$ macierz jest diagonalizowalna i powyższe wzory na wektory własne są poprawne, dla $a = 0$ mamy klatkę Jordana dla wartości własnej -1 . Rozkład Jordanowski to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -5 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Dla pozostałych wartości a mamy (szukana macierz zmiany bazy to trzecia macierz z lewej strony równania)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1-a \\ 0 & -1 & a \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a-1 \\ a & a & -a \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & 6-2a & a-5 \\ a-2 & 2a-3 & 2-a \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Zad. A.3: a) $\sigma(F) = \{-2, -1, 2, 4\}$, $\mathbf{v}_{-2} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\sigma(F) = \{0, 1, 2 \dots n\}$, $\mathbf{v}_k(t) = (t+1)^k$, $F\mathbf{v}_k = k\mathbf{v}$

Zad. A.4: Wektory własne to $\mathbf{v}_k = (z_k \ z_k^2 \ z_k^3 \ \dots \ z_k^n)^T$ dla $k = 0, 1, 2 \dots n-1$, gdzie $z_k = e^{\frac{2\pi k}{n}}$ to pierwiastki 1 stopnia n . Daje nam to $n = \dim(M)$ niezależnych liniowo wektorów własnych, więc nie może być innych wektorów własnych. Wartości własne to $\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} z_k^j$, a wyznacznik jest iloczynem wartości własnych

Zad. A.5: a) Macierz jest diagonalizowalna, mamy trzy różne wartości i wektory własne, przestrzeń własne (równe przestrzeniom pierwiastkowym) to podprzestrzeń rozpięta na danym wektorze własnym

$$\sigma(A) = \{1, \frac{1}{8}(1 - 3i\sqrt{7}), \frac{1}{8}(1 + 3i\sqrt{7})\}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_{\frac{1}{8}(1-3i\sqrt{7})} = \begin{pmatrix} 4i \\ 3i + \sqrt{7} \\ \sqrt{3}(\sqrt{7} - i) \end{pmatrix} \quad v_{\frac{1}{8}(1+3i\sqrt{7})} = \begin{pmatrix} -4i \\ -3i + \sqrt{7} \\ \sqrt{3}(\sqrt{7} + i) \end{pmatrix}$$

$\exp(A)$ jest paskudny

b) Macierz ma postać Jordana z dwoma klatkami o tej samej wartości własnej, przykładowa baza Jordana poniżej, przestrzeń własna jest rozpięta przez dwa pierwsze wektory bazy, przestrzeń pier-

wiastkowa to $\mathbb{R}^3$

$$\sigma(B) = \{1\}$$

$$v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$B^{2026} = \begin{pmatrix} 2027 & -4052 & 2026 \\ 4052 & -8103 & 4052 \\ 6078 & -12156 & 6079 \end{pmatrix}$$

c) Macierz jest diagonalizowalna, mamy trzy różne wartości i wektory własne, przestrzeń własna (równe przestrzeniom pierwiastkowym) to podprzestrzeń rozpięta na danym wektorze własnym

$$\sigma(C) = \{-4, 1, 4\}$$

$$v_{-4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(C) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4e^4} + e + \frac{3e^4}{4} & \frac{5}{4e^4} - 2e + \frac{3e^4}{4} & -\frac{1}{4e^4} + e - \frac{3e^4}{4} \\ -\frac{3}{2e^4} + e + \frac{e^4}{2} & \frac{5}{2e^4} - 2e + \frac{e^4}{2} & -\frac{1}{2e^4} + e - \frac{e^4}{2} \\ -\frac{9}{4e^4} + 2e + \frac{e^4}{4} & \frac{15}{4e^4} - 4e + \frac{e^4}{4} & -\frac{3}{4e^4} + 2e - \frac{e^4}{4} \end{pmatrix}$$

d) Macierz ma postać Jordana z jedną klatką, przykładowa baza Jordana poniżej, przestrzeń własna jest rozpięta przez wektor własny (pierwszy wektor bazy), przestrzeń pierwiastkowa to $\mathbb{R}^3$

$$\sigma(B) = \{1\}$$

$$v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{77} = \begin{pmatrix} -17863 & -17633 & -9163 \\ 11858 & 11705 & 6083 \\ 12012 & 11858 & 6161 \end{pmatrix}$$

e) Macierz ma postać Jordana z jedną klatką, przykładowa baza Jordana poniżej, przestrzeń własna jest rozpięta przez wektor własny (pierwszy wektor bazy), przestrzeń pierwiastkowa to $\mathbb{R}^3$

$$\sigma(B) = \{1\}$$

$$v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp(E) = \begin{pmatrix} e & e & e \\ -e & \frac{3e}{2} & \frac{e}{2} \\ e & -\frac{e}{2} & \frac{e}{2} \end{pmatrix}$$

Zad. A.6: Tak, można znaleźć postać Jordana obu macierzy i ponieważ są one takie same wnioskujemy że macierz F i macierz z zadania to ta sama macierz, ale w różnych bazach. Bazą w której macierz F przybiera postać z zadania jest $f = \{t^2 - t, 1, -t\}$

Zad. A.7: Tw. Cayleya-Hamiltona mówi nam, że dowolny wielomian od macierzy A upraszcza się do wielomianu liniowego $\alpha A + \beta \mathbb{1}$, bo jest to macierz 2×2 . Wystarczy sprawdzić czy istnieje takie t , by $B = \alpha A + \beta \mathbb{1}$ dla pewnych stałych α i β . Odpowiedź to tak, dla $t = \frac{4}{5}$ macierz B może zostać wyrażona jako wielomian od macierzy A

Zad. A.8: Postać Jordana i części diagonalizowalna i nilpotentna są jednoznaczne, baza Jordana ma pewną swobodę, by upewnić się że jest poprawna najlepiej sprawdzić czy zachodzi wzór $M = S^{-1}JS$. Ponieważ mamy jedną wartość własną część diagonalizowalna jest łatwa do znalezienia, można użyć $N = M - D$ zamiast liczyć macierze zmiany bazy

a)

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad v_2^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \quad v_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zad. A.9: Macierz S to macierz zmiany bazy z bazy Jordana do bazy standardowej tzn $S = [id]_f^e$, na ćwiczeniach oznaczaliśmy ją S^{-1} , ale tu oznaczenie zostało zmienione by sprawdzić czujność.

Jej kolumny to wektory bazy Jordana zapisane w bazie standardowej, przez to macierz ta nie jest jednoznaczna, poniżej przykładowe macierze S i (jednoznaczne) postacie Jordana a)

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Zad. A.10: Wybieramy bazę $e = \{1, x, x^2, x^3, y, y^2, y^3, xy, x^2y, xy^2\}$, zauważmy że N zawiera pochodną po x i y , więc pierwsze siedem elementów bazy jest zerowanych przez operator N , są to wektory własne, trzeba się przyjrzeć pozostałym elementom bazy. Mamy $Ne_8 = e_1$, $Ne_9 = 2e_2$, $Ne_{10} = 2e_5$, więc są 3 klatki 2×2 , oraz 4 klatki 1×1 . Baza Jordana to $\mathcal{B} = \{x^2, x^3, y^2, y^3, 1, xy, 2x, x^2y, 2y, xy^2\}$, a postać Jordana ma kolejno 4 klatki 1×1 i trzy klatki 2×2 z zerami jako wartościami własnymi. Rozkład Jordana to $M = S^{-1}JS$, który sobie można łatwo zapisać z powyższymi informacjami.

Zad. A.11: Wartości własne to $\sigma(M_a) = \{1, 2, a\}$, macierz może być niediagonalizowalna jeśli a jest równe 1 albo 2 (wartość własna się powtarza, tylko wtedy może być klatka Jordana większa niż 1×1). Przypadek a) odpowiada $a = 2$, natomiast b) odpowiada $a = 1$ a) Macierz S to macierz zmiany bazy z bazy Jordana do bazy standardowej, nie jest jednoznaczna i najlepiej sprawdzić czy $J_a = S^{-1}M_aS$ zachodzi

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\exp(M_1) = \begin{pmatrix} e^2 & 2(e^2 - e) & 2(e^2 - e) \\ e - e^2 & 3e - 2e^2 & -2(e^2 - e) \\ e^2 - e & 2(e^2 - e) & 2e^2 - e \end{pmatrix}$$

Zad. A.12: Ponieważ pierwszy element diagonalii różni się od pozostałych, trzeba użyć rozwinięcia Laplace'a wzdłuż ostatniej kolumny, a następnie ponownie dla jednego z powstałych członów, by odtworzyć postać macierzy z zadania, daje to wzór rekurencyjny. a) $D_{n+2} = 3D_{n+1} - D_n$, $D_1 = 2$, $D_2 = 4$, $D_n = 2^n$
b) $D_{n+2} = D_{n+1} + 6D_n$, $D_1 = -1$, $D_2 = 5$, $D_n = \frac{1}{5}((-2)^{n+2} + 3^n)$

Zad. A.13: Wyznacznik i wielomian charakterystyczny nie zależą od bazy, więc jeśli dla dwóch macierzy są różne to możemy być pewni, że nie są to macierze tego samego endomorfizmu. Wyznaczniki macierzy z zadania to $D_1 = -8$, $D_2 = -2$, $D_3 = -1$, $D_4 = 1$, $D_5 = 1$, $D_6 = 1$. Możemy definitywnie stwierdzić że macierze A_1 , A_2 i A_3 to macierze różnych endomorfizmów i żadna inna macierz z zadania nie jest macierzą tego samego endomorfizmu w innej bazie. Macierze A_4 , A_5 i A_6 mają ten sam wyznacznik, więc możliwe jest że mamy tu dwie macierze tego samego endomorfizmu, ale nie jest to jeszcze pewne. Spójrzmy na wielomiany charakterystyczne, $\omega_{A_4}(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1$, $\omega_{A_5}(\lambda) = -\lambda^3 + 1$, $\omega_{A_6}(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1$. Macierz A_5 ma inny wielomian charakterystyczny, ale A_4 i A_6 mają takie same wielomiany charakterystyczne. Niestety -1 jest podwójnym pierwiastkiem, więc możliwe że A_6 ma postać Jordana z klatką 2×2 , ale jak łatwo sprawdzić ma ona 3 wektory własne i jest diagonalizowalna. Macierze A_4 i A_6 to macierze tego samego endomorfizmu, ale w innych bazach.

Zad. A.14: a) Wielomian charakterystyczny to $\omega_B(\lambda) = (\lambda - 1)^n$, postać Jordana ma 1 na diagonalu, pozostaje pytanie ile jest klatek i jakie są ich rozmiary, aby na nie odpowiedzieć trzeba zbadać $A - \mathbb{1}$. Nie trudno się przekonać, że $(A - \mathbb{1})^k$ w działaniu na wektor bazy e_j produkuje element bazy o indeksie $j - k$, oraz elementy bazy o mniejszych indeksach. Zachodzi $(A - \mathbb{1})^{n-1}e_n = e_1$ i $(A - \mathbb{1})^ne_n = 0$, więc mamy serię długości n , która jest możliwa tylko jeśli mamy klatkę Jordana $n \times n$, ponieważ przestrzeń wektorowa ma wymiar n , nie możemy mieć więcej klatek i postać Jordana to pojedyncza klatka $n \times n$

b) Wielomian charakterystyczny to $\omega_B(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - 1)$, więc mamy n różnych wartości własnych (zespolonych pierwiastków 1). Macierz jest diagonalizowalna, a postać Jordana to macierz z pierwiastkami jedynek na diagonalu tzn $\lambda_k = e^{i2\pi k/n}$, $k \in \{0, 1 \dots n-1\}$

Zad. A.15: Szkic dowodu jest następujący: rozważmy równość dla pewnych liczb α_i $\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_k v_k = 0$, jeśli są to wektory niezależne liniowo to suma może być równa zeru tylko jeśli wszystkie α_i . Jeśli zadziałamy na obie strony $A - \lambda_j \mathbb{1}$, wyraz z v_j się skasuje, a pozostałych możemy zastąpić macierz przez $(\lambda_i - \lambda_j)$ (patrz wskazówka). Jeśli będziemy teraz to powtarzać, po kolei możemy kasować wektory własne, jeśli pomnożymy równość przez $A - \lambda_j \mathbb{1}$ dla wszystkich j poza pewnym j_0 skasujemy wszystkie wektory poza jednym i dostaniemy $\prod_{j \neq j_0} (\lambda_{j_0} - \lambda_j) \alpha_{j_0} v_{j_0} = 0$. Ponieważ z założenia wartości własne są parami różne, to α_{j_0} musi się równać 0, ponieważ jest to prawda dla dowolnego j_0 , wnioskujemy że wszystkie $\alpha_j = 0$, więc jest to układ LNZ.