Notatki do ćwiczeń z Algebry z Geometrią II

Wojciech Niedziółka

1 Tw. Cayleya-Hamiltona i zastosowania: potęgowanie macierzy, rekurencje, funkcje od operatora

Na początek mała przypominajka z wykładu

Twierdzenie 1. *(Cayley-Hamilton)*
Niech $A \in \mathbb{K}^n_n$ będzie macierzą kwadratową $n \times n$, a $\omega_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1})$ jej wielomianem charakterystycznym. Wtedy $\omega_A(A) = 0$

Zanim przejdziemy do zastosowań, warto sobie sprawdzić to twierdzenie na palcach, by upewnić się, że rozumiemy o co w nim chodzi

Zad. 1.1

Sprawdź tw. Cayleya-Hamiltona dla następujących macierzy

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Rozw. 1.1

a) Najpierw znajdźmy wielomian charakterystyczny

$$\omega_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

Aby podstawić do tego wielomianu macierz A musimy znać A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

Możemy teraz sprawdzić tw. Cayleya-Hamiltona

$$\omega_A(A) = A^2 - 5A - 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Najpierw znajdźmy wielomian charakterystyczny

$$\omega_B(\lambda) = \det(B - \lambda\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) - 4 + 9 + 6(2-\lambda) + (1-\lambda) - 6\lambda$$
$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 15\lambda + 18$$

Aby podstawić do tego wielomianu macierz B musimy znać B^2 i B^3

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -11 \\ -6 & -7 & 1 \\ 3 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$
$$B^3 = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -11 \\ -6 & -7 & 1 \\ 3 & 5 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & -36 & 12 \\ -3 & -3 & 33 \\ -21 & -30 & -30 \end{pmatrix}$$

Możemy teraz sprawdzić tw. Cayleya-Hamiltona

$$\omega_B(B) = -B^3 + 3B^2 - 15B + 18\mathbb{1} = -\begin{pmatrix} -21 & -36 & 12 \\ -3 & -3 & 33 \\ -21 & -30 & -30 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -3 & -7 & -11 \\ -6 & -7 & 1 \\ 3 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$
$$- 15\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + 18\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zad. 1.2

Oblicz k-tą potęgę macierzy (używając tw. Cayleya-Hamiltona)
a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^k = ?$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B^k = ?$ c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$, $C^k = ?$
d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D^k = ?$

Rozw. 1.2

Kluczem do rozwiązania tego problemu jest sprytne zastosowanie naszej wiedzy o dzieleniu wielomianów, wiemy że jeśli $\omega_A(z)$ jest naszym wielomianem charakterystycznym, to istnieją dwa wielomiany $f(z)$ i $g(z)$, takie że

$$z^k = f(z)\omega_A(z) + g(z)$$

oraz $\deg(g) < \deg\omega_A = n$. Jeśli wstawimy w to równanie macierz A i użyjemy tw. Cayleya-Hamiltona dostaniemy

$$A^k = f(A)\omega_A(A) + g(A) = g(A)$$

Co znacząco upraszcza nasz problem, zamiast podnosić macierz do potęgi k, wystarczy znaleźć resztę z dzielenia z^k przez wielomian charakterystyczny. Tu wystarczy już się posłużyć trikiem, jeśli podstawimy do równania pod z dowolny z pierwiastków wielomianu charakterystycznego z_1 otrzymamy

$$z_1^k = f(z_1)\omega_A(z_1) + g(z_1) = g(z_1)$$

Zasadnicze tw. algebry mówi, że wielomian n-tego stopnia ma n pierwiastków zespolonych, a wielomian $g(z)$ ma n nieznanych współczynników, zatem jest nadzieja że pozwoli nam to znaleźć wszystkie współczynniki (tak długo jak pierwiastki są różne, ale z tym też sobie poradzimy, patrz podpunkt d)).

a) Znajdźmy najpierw wielomian charakterystyczny

$$\omega_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

Z tw. Cayleya-Hamiltona wynika, że $A^2 - 4A + 3 = 0$. Możemy zatem używając tego równania wyrazić k-tą potęgę macierzy jako

$$A^k = \alpha_k A + \beta_k \mathbb{1}$$

gdzie α_k i β_k to pewne liczby zależne od k. Wiedząc, że $z_1 = 1$ i $z_2 = 3$, które są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego, spełniają równanie $z^k = \alpha_k z + \beta_k$, możemy znaleźć współczynniki

$$\begin{cases} 1^k = \alpha_k 1 + \beta_k \\ 3^k = \alpha_k 3 + \beta_k \end{cases} \implies \begin{cases} 1 = \alpha_k 1 + \beta_k \\ 3^k - 1 = \alpha_k 2 \end{cases} \implies \begin{cases} \beta_k = 1 - \alpha_k = \frac{1}{2}(3 - 3^k) \\ \alpha_k = \frac{1}{2}(3^k - 1) \end{cases}$$

Daje nam to odpowiedź

$$A^k = \frac{1}{2}(3^k - 1)A + \frac{1}{2}(3 - 3^k)\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 3^k & 3^k - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Znajdźmy najpierw wielomian charakterystyczny

$$\omega_B(\lambda) = \det(B - \lambda\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

Z tw. Cayleya-Hamiltona wynika, że k-tą potęgę macierzy B można wyrazić jako

$$B^k = \alpha_k B + \beta_k \mathbb{1}$$

gdzie α_k i β_k to pewne liczby zależne od k. Wiedząc, że $z_1 = -1$ i $z_2 = 2$, które są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego, spełniają równanie $z^k = \alpha_k z + \beta_k$, możemy znaleźć współczynniki

$$\begin{cases} (-1)^k = \alpha_k(-1) + \beta_k \\ 2^k = \alpha_k 2 + \beta_k \end{cases} \implies \begin{cases} (-1)^k = \alpha_k(-1) + \beta_k \\ 2^k - (-1)^k = \alpha_k 3 \end{cases} \implies \begin{cases} \beta_k = (-1)^k + \alpha_k = \frac{1}{3}(2(-1)^k + 2^k) \\ \alpha_k = \frac{1}{3}(2^k - (-1)^k) \end{cases}$$

Daje nam to odpowiedź

$$B^k = \frac{1}{3}(2^k - (-1)^k)B + \frac{1}{3}(2(-1)^k + 2^k)\mathbb{1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2^{k+1} + (-1)^k) & \frac{2}{3}(2^k - (-1)^k) \\ \frac{1}{3}(2^k - (-1)^k) & \frac{1}{3}(2(-1)^k + 2^k) \end{pmatrix}$$

c) Znajdźmy najpierw wielomian charakterystyczny

$$\omega_C(\lambda) = \det(C - \lambda\mathbb{1}) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -5 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) + 5 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1 + i)(\lambda - 1 - i)$$

Z tw. Cayleya-Hamiltona wynika, że k-tą potęgę macierzy C można wyrazić jako

$$C^k = \alpha_k C + \beta_k \mathbb{1}$$

gdzie α_k i β_k to pewne liczby zależne od k. Wiedząc, że $z_1 = 1-i$ i $z_2 = 1+i$, które są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego, spełniają równanie $z^k = \alpha_k z + \beta_k$, możemy znaleźć współczynniki

$$\begin{cases} (1-i)^k = \alpha_k(1-i) + \beta_k \\ (1+i)^k = \alpha_k(1+i) + \beta_k \end{cases} \implies \begin{cases} (1-i)^k = \alpha_k(1-i) + \beta_k \\ (1+i)^k - (1-i)^k = \alpha_k 2i \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} \beta_k = (1-i)^k - \alpha_k(1-i) = \frac{1}{2i}((1+i)(1-i)^k - (1-i)(1+i)^k) \\ \alpha_k = \frac{1}{2i}((1+i)^k - (1-i)^k) \end{cases}$$

Daje nam to dobrą okazję do przypomnienia sobie trochę liczb zespolonych, używając $(1 \pm i) = \sqrt{2}e^{\pm i\pi/4}$, mamy

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{1}{2i}((1+i)(1-i)^k - (1-i)(1+i)^k) = \frac{2^{k/2}}{2i}((1+i)e^{-ik\pi/4} - (1-i)e^{ik\pi/4}) \\ &= \frac{2^{k/2}}{2i}(-2i\sin(k\pi/4) + 2i\cos(k\pi/4)) = 2^{k/2}(\cos(k\pi/4) - \sin(k\pi/4)) \\ \alpha_k &= \frac{1}{2i}((1+i)^k - (1-i)^k) = \frac{2^{k/2}}{2i}(e^{ik\pi/4} - e^{-ik\pi/4}) = 2^{k/2}\sin(k\pi/4) \end{aligned}$$

Daje nam to odpowiedź

$$C^k = 2^{k/2}\sin(k\pi/4)C + 2^{k/2}(\cos(k\pi/4) - \sin(k\pi/4))\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 2^{k/2}(2\sin(\frac{k\pi}{4}) + \cos(\frac{k\pi}{4})) & 2^{k/2}\sin(\frac{k\pi}{4}) \\ -5 \times 2^{k/2}\sin(\frac{k\pi}{4}) & 2^{k/2}(\cos(\frac{k\pi}{4}) - 2\sin(\frac{k\pi}{4})) \end{pmatrix}$$

d) Znajdźmy najpierw wielomian charakterystyczny

$$\omega_D(\lambda) = \det(D - \lambda\mathbb{1}) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Z tw. Cayleya-Hamiltona wynika, że k-tą potęgę macierzy C można wyrazić jako

$$D^k = \alpha_k D + \beta_k \mathbb{1}$$

gdzie α_k i β_k to pewne liczby zależne od k. Nasz wielomian ma miejsce zerowe tylko w $z = 1$ o krotności 2. Daje nam to jedno równanie na współczynniki α_k i β_k, aby dostać drugie musimy przyjrzeć się wzorowi

$$z^k = f(z)(z-1)^2 + \alpha_k z + \beta_k$$

Ponieważ krotność naszego pierwiastka jest większa niż jeden, jeśli zadziałamy obustronnie pochodną na nasze równanie, $z = 1$ wyzeruje problematyczny człon z $f(z)$

$$kz^{k-1} = f'(z)(z-1)^2 + f(z)2(z-1) + \alpha_k$$

Daje nam to układ równań

$$\begin{cases} 1^k = \alpha_k + \beta_k \\ k1^{k-1} = \alpha_k \end{cases} \implies \begin{cases} \beta_k = 1 - \alpha_k = 1 - k \\ \alpha_k = k \end{cases}$$

Daje nam to odpowiedź

$$D^k = kD + (1-k)\mathbb{1} = \begin{pmatrix} k+1 & k \\ -k & 1-k \end{pmatrix}$$

Zad. 1.3

Znajdź wzór ogólny na k-ty wyraz ciągu rekurencyjnego
a) $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$, $a_1 = 1$, $a_0 = 0$ b) $b_{k+1} = 4b_k - 5b_{k-1} + 2b_{k-2}$, $b_2 = e$, $b_1 = \pi$, $b_0 = 0$

Rozw. 1.3

a) Kluczem do rozwiązania tego zadania jest zdanie sobie sprawy, że liniowe ciągi rekurencyjne można przetłumaczyć na problem mnożenia macierzy. Zauważmy że skoro a_k i a_{k-1} pozwalają obliczyć a_{k+1} to możemy sobie zapisać przejście z pary a_k, a_{k-1} do pary a_{k+1}, a_k

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \end{pmatrix}$$

nasza macierz nie zależy od k, więc można napisać prosty wzór na a_k zależący od niej i warunków początkowych

$$\begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = A^{k-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

Nasz problem sprowadza się zatem do policzenia $k-1$ potęgi macierzy A

$$\omega_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}))(\lambda - \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))$$

Tw. Cayleya-Hamiltona implikuje że

$$A^{k-1} = \alpha_{k-1}A + \beta_{k-1}\mathbb{1} = \begin{pmatrix} \alpha_{k-1} + \beta_{k-1} & \alpha_{k-1} \\ \alpha_{k-1} & \beta_{k-1} \end{pmatrix}$$

Mamy dwa pierwiastki wielomianu charakterystycznego $z_{1/2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, daje nam to układ równań

$$\begin{cases} \frac{1}{2^{k-1}}(1-\sqrt{5})^{k-1} = \alpha_{k-1}\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) + \beta_{k-1} \\ \frac{1}{2^{k-1}}(1+\sqrt{5})^{k-1} = \alpha_{k-1}\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) + \beta_{k-1} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{1}{2^{k-1}}(1-\sqrt{5})^{k-1} = \alpha_{k-1}\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) + \beta_{k-1} \\ \frac{1}{2^{k-1}}\left((1+\sqrt{5})^{k-1} - (1-\sqrt{5})^{k-1}\right) = \alpha_{k-1}\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \beta_{k-1} = \frac{1}{2^{k-1}}(1-\sqrt{5})^{k-1} - \alpha_{k-1}\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) = \frac{1}{2^k\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})^{k-1} - (1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^{k-1}\right) \\ \alpha_{k-1} = \frac{1}{2^{k-1}\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^{k-1} - (1-\sqrt{5})^{k-1}\right) \end{cases}$$

Daje nam to odpowiedź

$$\begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{k-1} + \beta_{k-1} & \alpha_{k-1} \\ \alpha_{k-1} & \beta_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Trochę szybsze obliczeniowo będzie odczytanie że $a_{k-1} = \alpha_{k-1}$ i przesunięcie indeksu o jeden by otrzymać wynik

$$a_k = \alpha_k = \frac{(1+\sqrt{5})^k - (1-\sqrt{5})^k}{2^k\sqrt{5}}$$

b) Możemy zapisać naszą rekurencję jako

$$\begin{pmatrix} b_{k+1} \\ b_k \\ b_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k \\ b_{k-1} \\ b_{k-2} \end{pmatrix}$$

Daje nam to wzór na k-ty element ciągu

$$\begin{pmatrix} b_k \\ b_{k-1} \\ b_{k-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-2} \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}^{k-2} \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Musimy zatem znaleźć $k-2$ potęgę macierzy $\boldsymbol{B}$

$$\omega_{\boldsymbol{B}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(-\lambda)(-\lambda) + 2 - 5\lambda = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

Mamy zatem

$$z^{k-2} = f(z)(z-2)(z-1)^2 + \alpha_{k-2}z^2 + \beta_{k-2}z + \gamma_{k-2}$$

Mamy układ 3 równań na nasze współczynniki, pierwsze dwa biorą się z wstawienia pierwiastków 1 i 2, a trzecie z zadziałania pochodną na obie strony i wstawienia pierwiastka o krotności dwa czyli 1

$$\begin{cases} 1^{k-2} = \alpha_{k-2} + \beta_{k-2} + \gamma_{k-2} \\ 2^{k-2} = \alpha_{k-2}4 + \beta_{k-2}2 + \gamma_{k-2} \\ (k-2)1^{k-2} = \alpha_{k-2}2 + \beta_{k-2} \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_{k-2} = 1 + 2^{k-2} - k \\ \beta_{k-2} = \frac{1}{2}(-2^k + 6k - 8) \\ \gamma_{k-2} = \frac{1}{4}(2^k - 8k + 16) \end{cases}$$

Daje nam to poszukiwany wzór

$$\boldsymbol{B}^{k-2} = \alpha_{k-2}\boldsymbol{B}^2 + \beta_{k-2}\boldsymbol{B} + \gamma_{k-2}\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 11\alpha_{k-2} + 4\beta_{k-2} + \gamma_{k-2} & -18\alpha_{k-2} - 5\beta_{k-2} & 8\alpha_{k-2} + 2\beta_{k-2} \\ 4\alpha_{k-2} + \beta_{k-2} & -5\alpha_{k-2} + \gamma_{k-2} & 2\alpha_{k-2} \\ \alpha_{k-2} & \beta_{k-2} & \gamma_{k-2} \end{pmatrix}$$

Z dolnego wiersza można odczytać, że

$$b_{k-2} = \alpha_{k-2}b_2 + \beta_{k-2}b_1 + \gamma_{k-2}b_0$$

co daje ostatecznie

$$b_k = \alpha_k b_2 + \beta_k b_1 + \gamma_k b_0 = e(2^k - k - 1) + \pi\frac{1}{2}(-2^{k+2} + 6k + 4)$$

Zad. 1.4

Oblicz

a) $\exp\left(t\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)$ b) $\exp\left(t\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\right)$ c) $\sin\left(\frac{\pi}{6}\begin{pmatrix}4 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)$

d) $\varphi\left(\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & -3\end{pmatrix}\right)$, gdzie $\varphi(z) = \frac{1}{2-z}\frac{1}{3-z}\dots\frac{1}{n-z}$

Rozw. 1.4

a) To zadanie jest dość analogiczne do 1.2, okazuje się że dla funkcji analitycznych możemy użyć podobnego triku

$$\exp(tz) = f(z)\omega_A(z) + \alpha z + \beta$$

gdzie $f(z)$ jest pewną funkcją analityczną. Pozwala nam to łatwo obliczyć szukane wyrażenie

$$\omega_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix}-\lambda & 2\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (-\lambda)(1-\lambda) - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$$

Mamy dwa różne pierwiastki 2 i -1, daje nam to układ równań

$$\begin{cases} e^{2t} = 2\alpha + \beta \\ e^{-t} = -\alpha + \beta \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t}) \\ \beta = \frac{1}{3}(e^{2t} + 2e^{-t}) \end{cases}$$

Daje nam to

$$\exp\left(t\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right) = \alpha A + \beta\mathbb{1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}e^{2t}+2e^{-t} & 2e^{2t}-2e^{-t}\\ e^{2t}-e^{-t} & 2e^{2t}+e^{-t}\end{pmatrix}$$

b)

$$\omega_B(\lambda) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 3-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = (\lambda-2)^2$$

Daje to równanie

$$\exp(tz) = f(z)(z-2)^2 + \alpha z + \beta$$

Mamy jeden pierwiastek o krotności dwa, naszym drugim równaniem będzie równanie uzyskane po zadziałaniu pochodną i wstawieniu 2

$$\begin{cases} e^{2t} = 2\alpha + \beta \\ te^{2t} = \alpha \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = te^{2t} \\ \beta = e^{2t}(1-2t) \end{cases}$$

$$\exp\left(t\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\right) = \alpha B + \beta\mathbb{1} = e^{2t}\begin{pmatrix}1-t & -t\\ t & 1+t\end{pmatrix}$$

c)

$$\omega_C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

Mamy dwa różne pierwiastki 1 i 3, daje nam to układ równań

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{6}1\right) = \alpha + \beta \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}3\right) = 3\alpha + \beta \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \alpha C + \beta \mathbb{1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$\omega_D(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Mamy dwa różne pierwiastki 1 i -1, daje nam to układ równań

$$\begin{cases} \varphi(1) = \frac{1}{(n-1)!} = \alpha + \beta \\ \varphi(-1) = \frac{2}{(n+1)!} = -\alpha + \beta \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{2}{(n+1)!}\right) = \frac{n^2+n-2}{2(n+1)!} \\ \beta = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(n+1)!} + \frac{1}{(n-1)!}\right) = \frac{n^2+n+2}{2(n+1)!} \end{cases}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\right) = \alpha D + \beta \mathbb{1} = \frac{1}{2(n+1)!}\begin{pmatrix} 4n^2+4n-4 & 4(n^2+n-2) \\ -2(n^2+n-2) & -2n^2-2n+8 \end{pmatrix}$$

2 Wektory i wartości własne, diagonalizacja macierzy

Zaczynamy powtórką definicji z wykładu

Definicja 2. *Niech $T \in \mathrm{End}(V)$ będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V (tzn. przekształcenie liniowe tej przestrzeni w siebie), wektor $\mathbf{v} \neq 0$ taki, że $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ dla $\lambda \in \mathbb{C}$ nazywamy wektorem własnym, a λ wartością własną T odpowiadającą wektorowi własnemu $\mathbf{v}$*

Wniosek 3. *$T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow (T - \lambda\mathbb{1})\mathbf{v} = 0$, oznacza to, że jeśli λ jest wartością własną to $T - \lambda\mathbb{1}$ jest operatorem nieodwracalnym, co dla macierzy oznacza, że $\det(T - \lambda\mathbb{1}) = 0$. Wektor własny można znaleźć badając $\ker(T - \lambda\mathbb{1})$*

Przykład 4. *Przeanalizujmy macierz*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny jest równy $\omega_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda - 5)(\lambda + 2)$, więc mamy dwie wartości własne -2 i 5. Możemy teraz znaleźć wektory własne używając redukcji wierszowej (tzn. możemy dodawać wiersze i mnożyć wiersz przez stałą, oraz usuwać wiersz złożony z samych zer)

$$V_{-2} = \ker(A - (-2)\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_5 = \ker(A - 5\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

V_λ będziemy nazywać podprzestrzenią własną związaną z wartością własną λ. Ogólnie, jeśli krotność λ jako pierwiastka $\omega_A(\lambda)$ wynosi k, wymiar podprzestrzeni własnej spełnia $1 \leq \dim(V_\lambda) \leq k$

Definicja 5 (Tylko dla przestrzeni skończenie wymiarowych, ale innych nie będziemy robić)**.** *Spektrum to zbiór wartości własnych operatora T, oznaczamy je $\sigma(T)$*

Zad. 2.1

Znajdź spektrum i podprzestrzenie własne następujących macierzy

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Rozw. 2.1

a) Najpierw szukamy wartości własnych

$$\omega_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & -2 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(-(2 - \lambda)\lambda + 1) = (1 - \lambda)^3$$

Wartości własne to pierwiastki wielomianu charakterystycznego, więc mamy $\sigma(A) = \{1\}$. Aby znaleźć wektory własne, przeanalizujmy jądro używając redukcji wierszowej

$$\ker(A - 1\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Nasze jądro jest dwuwymiarową podprzestrzenią $\mathbb{C}^3$, mamy zatem dwa liniowo niezależne wektory własne o wartości własnej 1, np.

$$\mathbf{v}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podprzestrzeń własna związana z wartością własną 1 to

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

b) Najpierw szukamy wartości własnych

$$\omega_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 \\ 4 & -1-\lambda & -4 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = (3-\lambda)(-1-\lambda)^2$$

Mamy dwa pierwiastki: 3 o krotności jeden i -1 o krotności dwa, więc szukane spektrum to $\sigma(B) = \{-1, 3\}$ Wiemy, że każda wartość własna musi mieć co najmniej jeden wektor własny, a co najwyżej tyle ile wynosi krotność tej wartości własnej. Zanim zaczniemy analizę jądra wiemy już że mamy jeden wektor własny z wartością własną 3 i jeden bądź dwa wektory własne o wartości własnej -1. Możemy je teraz znaleźć i sprawdzić naszą intuicję

$$V_3 = \ker(B - 3\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 4 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Dla drugiej wartości własnej mamy

$$V_{-1} = \ker(B + 1\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Czyli ostatecznie mamy po jednym wektorze własnym do każdej wartości własnej

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Najpierw szukamy wartości własnych

$$\omega_C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda = (-\lambda)(1+i-\lambda)(1-i-\lambda)$$

Mamy trzy różne pierwiastki o krotności jeden, nasze spektrum to $\sigma(C) = \{0, 1-i, 1+i\}$ Badamy teraz podprzestrzenie własne

$$V_0 = \ker(C - 0\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{1-i} = \ker(C - (1-i)\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} -1+i & 0 & 0 \\ 1 & i & -1 \\ -1 & 1 & i \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -i \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}$$
$$= \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{1+i} = \ker(C - (1+i)\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} -1-i & 0 & 0 \\ 1 & -i & -1 \\ -1 & 1 & -i \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & i \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$$
$$= \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & i \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$$

Czyli ostatecznie mamy po jednym wektorze własnym do każdej wartości własnej

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_{1-i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_{1+i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Definicja 6. *Jeśli $T \in End(V)$ ma $n = \dim(V)$ LNZ wektorów własnych, to mówimy że T jest diagonalizowalny*

Wniosek 7. *Jeśli M to macierz operatora diagonalizowalnego T w pewnej bazie e (tzn. $M = [T]^e_e$, zwykle e to baza standardowa), istnieje macierz S i macierz diagonalna D takie że $M = S^{-1}DS$. Dodatkowo jeśli przez d oznaczymy bazę złożoną z wektorów własnych T to $D = [T]^d_d$ i $S = [id_V]^d_e$. Problem znalezienia macierzy D i S nazywamy problemem diagonalizacji macierzy*

Wracając do naszego dwuwymiarowego przykładu 4, mieliśmy dwa liniowo niezależne wektory własne, więc możemy zidentyfikować M, D i S. Macierz M to macierz A z początku przykładu, a D to macierz, która ma na diagonali -2 i 5. Łatwiej będzie znaleźć macierz S^{-1}, która jest równa $S^{-1} = [id]^e_d$. Jej kolumny to będą wektory własne zapisane w bazie standardowej (co ważne, są one w tej samej kolejności co wartości własne w macierzy D)

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{-2} & \mathbf{v}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Macierz S można znaleźć odwracając ją

$$S = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Mamy więc

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Zad. 2.2

Zdiagonalizuj następującą macierz (Znajdź S i D jak wyżej) i oblicz $\exp(M)$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -103 & 100 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Rozw. 2.2

Najpierw musimy znaleźć spektrum i wektory własne

$$\omega_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 2 \\ -103 & 100-\lambda & 2 \\ -4 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 100\lambda^2 + \lambda - 100 = (-1-\lambda)(1-\lambda)(100-\lambda)$$

Spektrum jest równe $\sigma(A) = \{-1, 1, 100\}$, następnie analizujemy podprzestrzenie własne

$$V_{-1} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -103 & 101 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -103 & 99 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -99 & 99 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{100} = \ker \begin{pmatrix} -103 & 0 & 2 \\ -103 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -97 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -103 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 97 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Macierz S^{-1} jest dużo prostsza do znalezienia, bo kolumnami są znalezione właśnie wektory własne, odwracając ją mamy

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

I mamy (co można sobie na palcach sprawdzić)

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -103 & 100 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = S^{-1}DS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Powyższy wzór pozwala nam łatwo obliczyć $\exp(A)$, mamy szereg Taylora dla $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Daje nam to definicję $\exp(A)$

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

Możemy wstawić tam wzór $A = S^{-1}DS$ i zauważyć że S^{-1} i S będą się parami skracać

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S^{-1}DSS^{-1}DS \dots S^{-1}DS = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S^{-1}D^nS = S^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n\right)S = S^{-1}\exp(D)S$$

Ponieważ D ma niezerowe elementy tylko na diagonali (jest tzw macierzą diagonalną), jej k-ta potęga to macierz, która ma na diagonali k-te potęgi wartości własnych, a poza tym ma 0, więc mamy prosty wzór na $\exp(D)$

$$\exp(D) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 100^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{100} \end{pmatrix}$$

3 Diagonalizacji ciąg dalszy, postać Jordana

Zacznijmy od przypomnienia o tym jak znajdujemy macierz odwzorowania liniowego. Mamy odwzorowanie $F : \mathbb{R}_2[\cdot] \to \mathbb{R}_2[\cdot]$ dane wzorem $(Fv)(t) = v(t-1)$ i chcemy znaleźć macierz tego odwzorowania w bazie $e = \{1, t, t^2\}$. Procedura jest następująca: zadziałaj odwzorowaniem na elementy bazy wejściowej i wyraź wynik w bazie wyjściowej. Odwzorowanie F przesuwa argument wielomianu z t do $t-1$, mamy więc

$$\begin{aligned} Fe_1 &= F1 = 1 = e_1 \\ Fe_2 &= (Ft) = t - 1 = e_2 - e_1 \\ Fe_3 &= (Ft^2) = (t-1)^2 = t^2 - 2t + 1 = e_3 - 2e_2 + e_1 \end{aligned}$$

Teraz pozostaje ułożyć z tego naszą macierz, kolejne równości dają nam kolumny

$$[F]_e^e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Przykład trochę bardziej związany z tym co robimy (tzn z macierzą zmiany bazy S^{-1}) to znalezienie macierzy odwzorowania id (identyczności) z bazy f do bazy e w sytuacji w której mamy elementy bazy f wyrażone przez el. bazy e (dokładnie taką sytuację mamy kiedy znaleźliśmy wektory własne). Np. jeśli $f = \{f_1, f_2, f_3\}$, $f_1 = 2e_1 + 3e_2$, $f_2 = 5e_1 - 2e_2$, $f_3 = 2e_1 - 4e_2 + 5e_3$, mamy

$$\begin{aligned} id\, f_1 &= f_1 = 2e_1 + 3e_2 \\ id\, f_2 &= f_2 = 5e_1 - 2e_2 \\ id\, f_3 &= f_3 = 2e_1 - 4e_2 + 5e_3 \end{aligned}$$

Nasza macierz może być prosto odczytana z tych równań jako

$$[id]_f^e = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Zad. 3.1

Zdiagonalizuj następujące macierze (Znajdź S i D jak wyżej) i oblicz funkcje od operatora

a) $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\exp(tA) = ?$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B^{2026} = ?$

c) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 8 & -8 & 0 \\ 10 & -14 & 2 \end{pmatrix}$, $\exp(tC) = ?$

d) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} D\right) = ?$

Rozw. 3.1

a) Najpierw musimy znaleźć spektrum i wektory własne

$$\omega_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -5 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 11\lambda + 18 = (2-\lambda)(9-\lambda)$$

Spektrum jest równe $\sigma(A) = \{2, 9\}$, następnie analizujemy podprzestrzenie własne

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_9 = \ker \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Macierz S^{-1} jest dużo prostsza do znalezienia, bo kolumnami są znalezione właśnie wektory własne, odwracając ją mamy

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

I mamy

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = S^{-1} D S = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Możemy użyć tej formy by łatwo obliczyć $\exp(tA)$

$$\exp(tA) = \exp\left(t \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \right) = S^{-1} \exp(tD) S = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{9t} \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2e^{2t} + 5e^{9t} & 5e^{2t} - 5e^{9t} \\ 2e^{2t} - 2e^{9t} & 5e^{2t} + 2e^{9t} \end{pmatrix}$$

b) Najpierw musimy znaleźć spektrum i wektory własne

$$\omega_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (-1-\lambda)(1-\lambda)$$

Spektrum jest równe $\sigma(B) = \{-1, 1\}$, następnie analizujemy podprzestrzenie własne

$$V_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Macierz S^{-1} jest dużo prostsza do znalezienia, bo kolumnami są znalezione właśnie wektory własne, odwracając ją mamy S

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

I mamy

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = S^{-1}DS = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Możemy użyć tej formy by łatwo obliczyć B^{2026}

$$B^{2026} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2026} = S^{-1}D^{2026}S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2026}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Najpierw musimy znaleźć spektrum i wektory własne

$$\omega_C(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 6-\lambda & -2 & -2 \\ 8 & -8-\lambda & 0 \\ 10 & -14 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 16\lambda = (-4-\lambda)(-\lambda)(4-\lambda)$$

Spektrum jest równe $\sigma(C) = \{-4, 0, 4\}$, następnie analizujemy podprzestrzenie własne

$$V_{-4} = \ker\begin{pmatrix} 10 & -2 & -2 \\ 8 & -4 & 0 \\ 10 & -14 & 6 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_0 = \ker\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 8 & -8 & 0 \\ 10 & -14 & 2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -7 & 1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_4 = \ker\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 8 & -12 & 0 \\ 10 & -14 & -2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & -7 & -1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Macierz S^{-1} jest dużo prostsza do znalezienia, bo kolumnami są znalezione właśnie wektory własne, odwracając ją mamy

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

I mamy

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 8 & -8 & 0 \\ 10 & -14 & 2 \end{pmatrix} = S^{-1}DS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Możemy użyć tej formy by łatwo obliczyć $\exp(tC)$

$$\exp(tC) = \exp\left(t\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 8 & -8 & 0 \\ 10 & -14 & 2 \end{pmatrix}\right) = S^{-1}\exp(tD)S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3e^{-4t} + 4 + 3e^{4t} & 5e^{-4t} + -8 + 3e^{4t} & -e^{-4t} + 4 - 3e^{4t} \\ -6e^{-4t} + 4 + 2e^{4t} & 10e^{-4t} - 8 + 2e^{4t} & -2e^{-4t} + 4 - 2e^{4t} \\ -9e^{-4t} + 8 + e^{4t} & 15e^{-4t} - 16 + e^{4t} & -3e^{-4t} + 8 - e^{4t} \end{pmatrix}$$

d) Najpierw musimy znaleźć spektrum i wektory własne

$$\omega_D(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -3 & 1 \\ 2 & -4-\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = (-2-\lambda)(2-\lambda)^2$$

Spektrum jest równe $\sigma(D) = \{-2, 2\}$, następnie analizujemy podprzestrzenie własne

$$V_{-2} = \ker\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 12 & -24 \\ 0 & 4 & -8 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$V_2 = \ker\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle$$

Macierz S^{-1} jest dużo prostsza do znalezienia, bo kolumnami są znalezione właśnie wektory własne, odwracając ją mamy

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

I mamy

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = S^{-1}DS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Możemy użyć tej formy by łatwo obliczyć $\sin\left(\frac{\pi}{2}D\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}D\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\right) = S^{-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}D\right)S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Po tych zadaniach z diagonalizacją macierzy możemy się pochylić nad ogólniejszym przypadkiem. Co jeśli nie mamy tyle niezależnych liniowo wektorów by zbudować z nich bazę?

Definicja 8. *Klatką Jordana będziemy nazywać macierz kwadratową $n \times n$, taką że na diagonali mamy n razy tę samą liczbę $\lambda \in \mathbb{C}$, na przekątnej ponad diagonalą mamy 1, a poza tym same 0*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Przykład 9. *Klatki Jordana*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Przyjrzyjmy się następującej klatce 3×3, która ma same zera na diagonali, możemy obliczyć jej działanie na wektorach bazowych f

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M f_1 &= 0 \\ M f_2 = f_1 \quad & M^2 f_2 = 0 \\ M f_3 = f_2 \quad & M^2 f_3 = f_1 \quad M^3 f_3 = 0 \end{aligned}$$

Czynimy teraz obserwację, że klatka Jordana z zerami na diagonali w pierwszej potędze zeruje pierwszy wektor bazy, w drugiej potędze zeruje pierwszy i drugi, a w trzeciej potędze zeruje pierwszy, drugi i trzeci. Ta własność będzie kluczowa przy znajdywaniu postaci Jordana.

Definicja 10. *Mówimy że macierz jest w postaci Jordana jeśli jest zbudowana z klatek Jordana (wartości własne mogą być te same dla różnych klatek), które są na diagonali, a poza nimi jest 0. Bazę w której macierz ma tę postać nazywamy bazą Jordana, a jej elementy uogólnionymi wektorami własnymi*

Przykład 11. *Macierze w postaci Jordana, z zaznaczonymi klatkami*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{c|cc|cc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{c|c|c} -3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Twierdzenie 12. *Każda macierz kwadratowa w pewnej bazie ma postać Jordana*

Jeśli macierz jest diagonalizowalna to oczywiście postać diagonalna (wartości własne na diagonali) jest szczególnym przykładem postaci Jordana. Istnieją macierze niediagonalizowalne, wtedy postać Jordana to (mówiąc lekko z angielskiego) "next best thing", pozwala ona też liczyć funkcje od operatora, choć

jest to trochę bardziej zawiłe (ale o tym kiedy indziej). Teraz skupmy się na zrozumieniu procedury znajdywania postaci Jordana

Przykład 13. *Rozważmy następującą macierz w postaci Jordana, użyjemy jej jako przykładu tego jak szukać uogólnionych wektorów własnych*

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Jeśli policzymy wielomian charakterystyczny otrzymamy $\omega_M(\lambda) = (5-\lambda)^2(2-\lambda)^3$ *(używając kilka razy rozwinięcia Laplace'a wzdłuż pierwszej kolumny). Wyznacznik nie zależy od bazy, w której jest wyrażona macierz odwzorowania liniowego* $\det\left(S^{-1}AS\right) = \det\left(S^{-1}\right)\det(A)\det(S) = \frac{1}{\det(S)}\det(A)\det(S) = \det(A)$*, więc wielomian charakterystyczny daje nam informacje o wartościach własnych na diagonali i ich krotnościach. Pozostaje znaleźć sposób ustalania uogólnionych wektorów własnych w sposób niezależny od bazy w której jest wyrażona macierz.*

Obserwujemy, że można te wektory te są powiązane z jądrem macierzy $(M-\lambda\mathbb{1})^k$*, jeśli oznaczymy bazę standardową* $e_1, e_2 \dots e_5$*, to mamy następujące zależności*

$$\ker(M-5\mathbb{1}) = \langle e_1\rangle \quad \ker(M-5\mathbb{1})^2 = \langle e_1, e_2\rangle$$
$$\ker(M-2\mathbb{1}) = \langle e_3\rangle \quad \ker(M-2\mathbb{1})^2 = \langle e_3, e_4\rangle \quad \ker(M-2\mathbb{1})^3 = \langle e_3, e_4, e_5\rangle$$

Daje nam to pomysł na wyznaczenie uogólnionych wektorów własnych: rozważamy każdą wartość własną z osobna, najpierw $\lambda = 5$*, ponieważ ma ona krotność 2, musimy znaleźć 2 uogólnione wektory własne, najpierw szukamy* e_2 *- wektor należący do* $\ker(M-5\mathbb{1})^2$ *ale nie do* $\ker(M-5\mathbb{1})$ *(może to być dowolny taki wektor),* e_1 *można wtedy znaleźć ze wzoru* $e_1 = (M-5\mathbb{1})e_2$*. Następnie wartość własna* $\lambda = 2$ *o krotności 3, najprościej najpierw znaleźć* e_5*, które będzie dowolnym wektorem należącym do* $\ker(M-2\mathbb{1})^3$ *ale nie do* $\ker(M-2\mathbb{1})^2$*, pozostałe dwa uogólnione wektory własne możemy znaleźć z zależności* $e_4 = (M-2\mathbb{1})e_5$*,* $e_3 = (M-2\mathbb{1})^2 e_5$*. Elementy bazy Jordana można oznaczać też* $\mathbf{v}_i^{(j)}$ *gdzie i to numer klatki Jordana, a j to numer wektora w tej klatce, jest to minimalne j dla którego* $(M-\lambda_i\mathbb{1})^j\mathbf{v}_i^{(j)} = 0$*. W naszym przykładzie mamy* $\mathbf{v}_1^{(1)} = e_1$*,* $\mathbf{v}_1^{(2)} = e_2$*,* $\mathbf{v}_2^{(1)} = e_3$*,* $\mathbf{v}_2^{(2)} = e_4$*,* $\mathbf{v}_2^{(3)} = e_5$

Zad. 3.2

Znajdź postać Jordana i bazę Jordana następującej macierzy $\quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 5 & -6 \\ 8 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

Rozw. 3.2

Rozpoczynamy analogicznie do diagonalizacji macierzy od wielomianu charakterystycznego

$$\omega_M(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 8 & 5-\lambda & -6 \\ 8 & 4 & -5-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1 = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

Mamy dwie wartości własne, 1 o krotności dwa i -1 o krotności jeden, już teraz możemy czynić przypuszczenia jak będzie wyglądać postać Jordana, na pewno będzie miała jedną klatkę 1×1 z wartością

własną -1, dla wartości własnej 1 możemy mieć jedną klatkę 2×2 lub dwie klatki 1×1 (w tym przypadku macierz byłaby diagonalizowalna). Żeby ustalić jaki przypadek mamy musimy poszukać wektorów własnych.

$$\ker(M - (-1)\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 8 & 6 & -6 \\ 8 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=f_1} \right\rangle$$

$$\ker(M - \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & -6 \\ 8 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=f_2} \right\rangle$$

Mamy dwa wektory własne f_1 i f_2, po jednym do każdej wartości własnej, ewidentnie diagonalizacja nie jest możliwa, bo mamy za mało liniowo niezależnych wektorów własnych, by stworzyć bazę $\mathbf{R}^3$. Wartość własna -1 ma krotność jeden, więc jej klatka Jordana jest 1×1 i na $\mathbf{v}_1^{(1)}$ można wybrać f_1 Wiemy teraz że wartość własna 1 ma klatkę Jordana 2×2, żeby znaleźć brakujący wektor patrzymy na

$$\ker(M - \mathbb{1})^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & -6 \\ 8 & 4 & -6 \end{pmatrix}^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -16 & 0 & 4 \\ -16 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Można się łatwo upewnić że f_2 należy do powyższego jądra, tak jak powinno być, teraz musimy wybrać wektor z tej dwuwymiarowej podprzestrzeni, który nie jest f_2, ten wektor to poszukiwany $\mathbf{v}_2^{(2)}$. Wyborów mamy nieskończenie wiele, ale każdy jest dobry, np

$$\mathbf{v}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wtedy naszym drugim wektorem będzie

$$\mathbf{v}_2^{(1)} = (M - \mathbb{1})\mathbf{v}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & -6 \\ 8 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Podsumowując mamy postać Jordana J i bazę Jordana

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(2)}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Możemy zapisać macierz M używając macierzy zmiany bazy $S^{-1} = [id]_{\mathcal{B}}^{e} = \left(\mathbf{v}_1^{(1)} \mathbf{v}_2^{(1)} \mathbf{v}_2^{(2)}\right)$ jako $M = S^{-1} J S$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 5 & -6 \\ 8 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Oczywiście można było wybrać jakiś inny wektor na $\mathbf{v}_2^{(2)}$, jeśli dokonalibyśmy alternatywnego wyboru dostalibyśmy równie dobrą bazę Jordana, np.

$$\tilde{\mathbf{v}}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_2^{(1)} = (M - \mathbb{1})\tilde{\mathbf{v}}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & -6 \\ 8 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1^{(1)}, \tilde{\mathbf{v}}_2^{(1)}, \tilde{\mathbf{v}}_2^{(2)}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ -16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Zauważmy, że $\tilde{\mathbf{v}}_2^{(1)}$ jest przeskalowanym wektorem $\mathbf{v}_2^{(1)}$, w momencie policzenia wektorów własnych wiedzieliśmy że jeden z wektorów bazy będzie proporcjonalny do f_2, ale nie dokonywaliśmy wyboru, bo nie byliśmy pewni współczynnika jaki musi być by zachodziło $\mathbf{v}_2^{(1)} = (M - \mathbb{1})\mathbf{v}_2^{(2)}$. Wybór wektora $\mathbf{v}_2^{(2)}$ daje nam dowolność, ale musimy się upewnić że pozostałe wektory z klatki Jordana są "zgodne" z wyborem $\mathbf{v}_2^{(2)}$, dlatego najlepiej je wygenerować mnożąc przez $(M - \mathbb{1})$. Dla wartości własnej -1 mieliśmy klatkę Jordana 1×1, więc mieliśmy pełną swobodę wyboru.

4 Szukanie bazy i postaci Jordana

Definicja 14. *Przestrzenią pierwiastkową nazywamy* $\ker(M-\lambda\mathbb{1})^k$ *gdzie* λ *jest wartością własną macierzy o krotności* k

Przestrzeń pierwiastkowa jest rozpięta na wszystkich uogólnionych wektorach własnych związanych z wartością własną λ. Może się jednak zdarzyć, że już dla mniejszej potęgi będziemy mieli jądro wymiaru k, które będzie rozpięte przez wszystkie uogólnione wektory własne, dzieje się tak kiedy mamy co najmniej dwie klatki Jordana z wartością własną λ

Przypomnijmy sobie ogólny schemat szukania bazy i postaci Jordana. Najpierw szukamy wielomianu charakterystycznego, oraz jego pierwiastków wraz z krotnościami. Następnie analizujemy po kolei każdą wartość własną i ich klatki Jordana. Pierwszym krokiem jest zbadać jądro $M - \lambda\mathbb{1}$, jego wymiar powie nam ile mamy wektorów własnych dla danej wartości własnej, a ponieważ każda klatka ma dokładnie jeden wektor własny to będziemy wiedzieć ile jest klatek Jordana dla danej wartości własnej. Przydatna jest tu wiedza, że jeśli mamy jądro macierzy, która ma m niezależnych wierszy i n kolumn, to wymiar jądra wynosi $n-m$. Następnie badamy jądra kolejnych potęg $(M-\lambda\mathbb{1})^2$, $(M-\lambda\mathbb{1})^3$ …, aż do momentu, w którym dostaniemy jądro wymiaru k-krotność λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego. Mając nasze jądra możemy zbudować część bazy związaną z wartością własną λ korzystając z tego że uogólnione wektory własne tworzą serię

$$\begin{aligned}(M-\lambda_i)v_i^{(1)} &= 0\\ (M-\lambda_i)v_i^{(2)} &= v_i^{(1)}\\ (M-\lambda_i)v_i^{(3)} &= v_i^{(2)}\\ &\vdots\end{aligned}$$

gdzie λ_i to i-ta wartość własna, $v_i^{(j)}$ to j-ty z serii uogólniony wektor własny z i-tej klatki Jordana. Procedura jest następująca: wybieramy ostatni wektor z serii, a następnie mnożąc przez $M-\lambda\mathbb{1}$ generujemy jej resztę. Ponieważ ostatni wektor z serii to taki wektor, który należy do $\ker(M-\lambda\mathbb{1})^j$, ale nie należy do $(M-\lambda\mathbb{1})^{j-1}$ mamy dużą swobodę wyboru (w jakimś sensie wybierając losowo wektor z przestrzeni j-wymiarowej prawie zawsze dostaniemy coś, co nie należy do $j-1$ wymiarowej podprzestrzeni). Na podstawie wymiarów jąder można też wywnioskować jakie są rozmiary klatek Jordana korzystając z faktu, że $\ker(M-\lambda\mathbb{1})^j$ zawiera wszystkie wektory z klatek o wartościach własnych λ, które mają w ramach klatki numer co najwyżej j (dla $j=1$ mamy wektory własne, dla $j=2$ mamy wektory własne i drugie wektory z serii długości ≥ 2 itd). Co jeśli mamy dwie klatki o tej samej wartości własnej? Należy zacząć od najdłuższej serii, a po jej znalezieniu szukać drugiej najdłuższej i tak do skutku.

Zad. 4.1

Znaleźć bazę i postać Jordana macierzy

a) $M = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & -5\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$

Rozw. 4.1

a) Pierwszy krok to znalezienie wielomianu charakterystycznego

$$\omega_M(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+1)^2(\lambda-2)^2$$

Mamy dwie wartości własne -1 i 2, obie mają krotność dwa, zanim powiemy coś o postaci Jordana trzeba przyjrzeć się podprzestrzeniom własnym.

$$\ker(M-(-1)\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -5\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 3\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\ker(M-2\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Mamy po jednym wektorze własnym dla każdej wartości własnej. Wiedząc, że każda z klatek Jordana ma dokładnie jeden wektor własny, możemy wywnioskować że każda z wartości własnych będzie miała po jednej klatce, które będą miały rozmiar związany z krotnością czyli 2×2

$$J = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Wiemy też, że baza będzie się składać z dwóch części, dwuelementowej serii dla pierwszej klatki i drugiej dwuelementowej serii dla drugiej klatki

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(2)}\}$$

Pozostaje znaleźć uogólnione wektory własne, poprzez przeanalizowanie kolejnych potęg macierzy

$$\ker(M-(-1)\mathbb{1})^2 = \ker\begin{pmatrix}0 & 6 & 0 & -9\\ 0 & 9 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0 & 9\\ 0 & -6 & 0 & 9\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

Dostaliśmy dwuwymiarowe jądro, a wiemy że wartość własna -1 ma krotność 2, więc mamy już wszystkie potrzebne informacje. Jądro w pierwszej potędze jest rozpięte przez $\mathbf{v}_1^{(1)}$, a jądro drugiej potęgi przez $\mathbf{v}_1^{(1)}$ i $\mathbf{v}_1^{(2)}$.

$$\ker(M-(-1)\mathbb{1}) = \left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle\mathbf{v}_1^{(1)}\right\rangle$$

$$\ker(M-(-1)\mathbb{1})^2 = \left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle\mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)}\right\rangle$$

Na $\mathbf{v}_1^{(2)}$ - nasz uogólniony wektor własny dla wartości własnej -1, możemy wybrać dowolny wektor należący do drugiej przestrzeni, który nie należy do pierwszej, na przykład

$$\mathbf{v}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wtedy naszym drugim wektorem z klatki Jordana będzie

$$\mathbf{v}_1^{(1)} = (M - (-1)\mathbb{1})\mathbf{v}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dla drugiej wartości własnej mamy

$$\ker(M - 2\mathbb{1})^2 = \ker \begin{pmatrix} 15 & 0 & -6 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Znowu wystarczy jądro drugiej potęgi, bo jego wymiar to dwa i jest równy krotności 2 jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego, podsumowując

$$\ker(M - 2\mathbb{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \mathbf{v}_2^{(1)} \right\rangle$$

$$\ker(M - 2\mathbb{1})^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \mathbf{v}_2^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(2)} \right\rangle$$

Mamy zatem $\mathbf{v}_2^{(2)}$ nasz uogólniony wektor własny dla wartości własnej 2, jest to dowolny wektor z drugiej przestrzeni, który nie należy do pierwszej, na przykład

$$\mathbf{v}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wtedy naszym drugim wektorem będzie

$$\mathbf{v}_2^{(1)} = (M - 2\mathbb{1})\mathbf{v}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Podsumowując mamy bazę Jordana i postać Jordana naszej macierzy

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(2)}\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Możemy też zapisać naszą macierz M jako $S^{-1}JS$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Można sprawdzić, że $S^{-1}JS$ daje faktycznie naszą początkową macierz M, więc znaleźliśmy poprawną postać i bazę Jordana. Ponieważ mieliśmy dużą dowolność w konstrukcji bazy, użycie wzoru $M = S^{-1}JS$ jest najpewniejszym sposobem upewnienia się czy nie ma błędu

b) Pierwszy krok to znalezienie wielomianu charakterystycznego

$$\omega_M(\lambda) = (1 - \lambda)^5$$

Mamy jedną wartość własną 1 o krotności 5, zbadajmy przestrzeń własną by dowiedzieć się ile klatek Jordana ma nasza macierz

$$\ker(M - \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Mamy dwa wektory własne $\mathbf{v}_1^{(1)}$ i $\mathbf{v}_2^{(1)}$. Wiedząc, że każda z klatek Jordana ma dokładnie jeden wektor własny, możemy wywnioskować że mamy dwie klatki Jordana, ich rozmiary muszą się sumować do 5 (krotności wartości własnej), ale nie wiemy jak wymiary rozkładają się na nasze klatki, czy mamy jedną klatkę 1×1 i jedną 4×4 czy może klatkę 2×2 i 3×3? Aby to sprawdzić musimy badać jądra kolejnych potęg $M - \mathbb{1}$

$$\ker(M - \mathbb{1})^2 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Jądro drugiej potęgi jest rozpięte przez wektory własne i uogólnione wektory własne, które są drugie w swojej serii. Wymiar jądra wynosi cztery, a już wiemy że są dwa wektory własne, więc możemy być

pewni że obie klatki są co najmniej 2×2. Suma rozmiarów klatek to 5 -krotność pierwiastka, więc postać Jordana ma postać

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wiemy że baza będzie się składać z dwóch części, dwuelementowej serii dla pierwszej klatki i trzyelementowej dla drugiej klatki.

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(3)}\}$$

Wiemy że jest 5 uogólnionych wektorów własnych, więc musimy jeszcze zbadać $\ker(M-\mathbb{1})^3$, które jak się okaże jest 5 wymiarową przestrzenią, więc skoro wymiar jest równy krotności pierwiastka wielomianu charakterystycznego, możemy zakończyć badanie jąder i rozpocząć konstrukcję bazy

$$\ker(M-\mathbb{1})^3 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^5$$

Moglibyśmy się zastanowić nad tym jaka jest tu przestrzeń pierwiastkowa $\ker(M-\mathbb{1})^5$, ale widać, że dla trzeciej potęgi mamy, jak to się mówi, wysycenie i każda wyższa potęga będzie dawać to samo. W ogólności musimy obliczyć $\ker(M-\lambda\mathbb{1})^j$ dla takiej potęgi j, dla której będziemy mieli k (krotność wartości własnej λ) wektorów w jądrze, j będzie rozmiarem największej klatki Jordana dla danej wartości własnej. Jeśli każda wartość własna ma jedną klatkę będzie to przestrzeń pierwiastkowa, ale jeśli (jak w naszym przypadku) mamy dwie klatki Jordana z tą samą wartością własną to j będzie mniejsze. Podsumowując mamy trzy jądra, które nas interesują, jeśli oznaczymy wektory bazy Jordana jak w poprzednich przykładach to mamy

$$\ker(M-\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(1)} \rangle$$

$$\ker(M-\mathbb{1})^2 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(2)} \rangle$$

$$\ker(M-\mathbb{1})^3 = \mathbb{R}^5 = \langle \mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(3)} \rangle$$

Do tej pory mieliśmy tylko jedną klatkę Jordana, procedura polegała na znalezieniu ostatniego wektora z serii i wygenerowanie reszty przez działanie $(M-\lambda\mathbb{1})$, tutaj mamy jednak dwie serie co daje niewielką

komplikację, musimy zacząć od którejś serii. Dobrą strategią jest najpierw znaleźć wektory z dłuższej serii. Dlaczego? Analizując powyższe wzory widzimy, że $\mathbf{v}_2^3$ należy do $\ker(M-\mathbb{1})^3$ ale nie należy do $\ker(M-\mathbb{1})^2$, co ważne jest to JEDYNY wektor z tą własnością. Jeśli byśmy chcieli teraz znaleźć $\mathbf{v}_1^2$ mielibyśmy dylemat, jest to wektor, który należy do $\ker(M-\mathbb{1})^2$ ale nie należy do $\ker(M-\mathbb{1})$, ale $\mathbf{v}_2^2$ też ma tą własność. Nie mamy możliwości na tym etapie by z pełną pewnością ustalić który wektor to $\mathbf{v}_1^2$, jest szansa że wybralibyśmy coś, co potem okazałoby się $\mathbf{v}_2^2$. Szukamy $\mathbf{v}_2^3$, dowolnego wektora, który należy do $\ker(M-\mathbb{1})^3$ ale nie należy do $\ker(M-\mathbb{1})^2$, możemy na przykład wybrać

$$\mathbf{v}_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resztę znajdujemy niemal automatycznie

$$\mathbf{v}_2^{(2)} = (M-\mathbb{1})\mathbf{v}_2^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2^{(1)} = (M-\mathbb{1})\mathbf{v}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Żeby znaleźć $\mathbf{v}_1^2$ poszukujemy wektora należącego do $\ker(M-\mathbb{1})^2$, ale nie do $\ker(M-\mathbb{1})$, który dodatkowo jest liniowo niezależny od już znalezionych wektorów. Dodatkowy warunek jest istotny, bo szukamy bazy, więc chcemy mieć coś "nowego". Zanim zaczniemy szukanie $\mathbf{v}_1^2$ warto sobie trochę zmienić postać jądra $(M-\mathbb{1})^2$, możemy dodawać do siebie wektory i mnożyć je przez stałe, odejmijmy zatem od pierwszego wektora drugi, mamy

$$\ker(M-\mathbb{1})^2 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(2)} \rangle$$

Rozpoznajemy, że pierwszy wektor to $\mathbf{v}_2^2$, drugi to $\mathbf{v}_2^{(1)}$, a trzeci należy do $\ker(M-\mathbb{1})$. Pozwala nam to stwierdzić że $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ jest wektorem, który należy do $\ker(M-\mathbb{1})^2$, ale nie do $\ker(M-\mathbb{1})$ (kto nie wierzy może sobie sprawdzić z definicji jądra, czy ten wektor daje zero po przemnożeniu przez wiersze?). Dodatkowo jest liniowo niezależny od tego, co już znaleźliśmy, mamy więc nasz poszukiwany

$\mathbf{v}_1^{(2)}$ i po krótkim rachunku też $\mathbf{v}_1^{(1)}$

$$\mathbf{v}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1^{(1)} = (M - \mathbb{1})\mathbf{v}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podsumowując mamy bazę Jordana i postać Jordana naszej macierzy

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(3)}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Możemy też zapisać naszą macierz M jako $S^{-1}JS$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Można sprawdzić, że $S^{-1}JS$ daje faktycznie naszą początkową macierz M, więc znaleźliśmy poprawną postać i bazę Jordana. Ponieważ mieliśmy dużą dowolność w konstrukcji bazy, użycie wzoru $M = S^{-1}JS$ jest najpewniejszym sposobem upewnienia się czy nie ma błędu

5 Część diagonalizowalna i nilpotentna macierzy, formy kwadratowe, diagonalizacja i sygnatura (algorytm Lagrange'a)

W ramach dopowiedzenia do ostatnich zajęć zastanówmy się nad tym, jak skutecznie szukać wektorów, które należą do $\ker(M-\lambda\mathbb{1})^j$, a nie należą do $\ker(M-\lambda\mathbb{1})^{j-1}$. Zgadywanie jest jedną z metod, jeśli mamy bazy jąder, to czasem widać, jaki wektor musimy wybrać przy konstrukcji bazy Jordana, ale można zrobić to w sposób algorytmiczny. Można wykorzystać fakt, że jądra kolejnych potęg mają coraz większy wymiar (aż do wysycenia, tzn. momentu, gdy wymiar jądra $\ker(M-\lambda\mathbb{1})^j$ to krotność pierwiastka λ), więc $\dim(\ker(M-\lambda\mathbb{1})^j) > \dim(\ker(M-\lambda\mathbb{1})^{j-1})$. W naszych przykładach objawiało się to tym, że kolejne jądra były rozpinane przez coraz większe zestawy wektorów. Oznacza to, że co najmniej jeden z wektorów rozpinających $\ker(M-\lambda\mathbb{1})^j$ nie należy do $\ker(M-\lambda\mathbb{1})^{j-1}$. Biorąc za przykład ostatnie zadanie z poprzednich zajęć, mamy

$$\ker(M-\mathbb{1})^2 = \ker\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\ker(M-\mathbb{1})^3 = \mathbb{R}^5 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Wiemy, że co najmniej jeden z pięciu wektorów drugiej podprzestrzeni nie należy do pierwszej. Kiedy poszukujemy kandydata na $\mathbf{v}_2^{(3)}$ wystarczy po kolei sprawdzić czy dany wektor należy do $\ker(M-\mathbb{1})^2$ i wybrać pierwszy, który nie należy. Jak łatwo sprawdzić czy dany wektor należy do jądra? Wystarczy pomnożyć go przez wiersze i jeśli któryś wynik da coś niezerowego, to wiemy, że mamy wektor nienależący do jądra. Możemy sprawdzić pierwszy z nich, okazuje się, że

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

zatem ten wektor należy do $\ker(M-\mathbb{1})^3$, ale nie należy do $\ker(M-\mathbb{1})^2$

Teraz omówimy bardzo przydatną własność postaci Jordana, jeśli rozdzielimy postać Jordana na dwie części: diagonalną i ponad diagonalną możemy zauważyć dwie ciekawe własności. Omówmy to na przykładzie jednej klatki

$$J = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\0 & \lambda & 0\\0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} = D + N$$

Pierwsza macierz D mnoży wektor przez stałą, a macierz N to macierz która kasuje pierwszy wektor bazy ($Ne_1 = 0$) i "przesuwa" pozostałe (tzn. $Ne_i = e_{i-1}$). Nietrudno się przekonać że zachodzi $DN = ND$ (w

takim wypadku mówi się że macierze komutują), oraz $N^3 = 0$. Dodatkowo D jest diagonalny i np. łatwo policzyć exp tej macierzy. Taki rozkład nazywamy podziałem na część diagonalizowalną i nilpotentną, dla ścisłości można podać definicję

Definicja 15. *Macierz nazywamy nilpotentną, jeśli dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $N^k = 0$, dodatkowo jeśli $N^{k-1} \neq 0$ to k nazywamy stopniem nilpotentności (jest to najmniejsza potęga dla której mamy $N^k = 0$)*

Ponieważ klatki Jordana są niezależne (macierz w formie Jordana jest blokowo diagonalna), można dokonać takiego podziału dla dowolnej postaci Jordana i mieć przydatne własności, że $DN = ND$, $N^k = 0$ i D jest diagonalne. Dla postaci Jordana macierzy, które przeliczyliśmy tydzień temu taki rozkład wygląda następująco

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{D}_1 + \tilde{N}_1$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{D}_2 + \tilde{N}_2$$

Korzystając z macierzy zmiany bazy i postaci $M = S^{-1}DS$ możemy znaleźć część diagonalizowalną ($D = S^{-1}\tilde{D}S$) i nilpotentną ($N = S^{-1}\tilde{N}S$) macierzy oryginalnych macierzy.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D_1 + N_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = D_2 + N_2$$

Nietrudno się przekonać że faktycznie tak jak w powyższym przykładzie $DN = ND$, mamy nasz rozkład na część diagonalizowalną i nilpotentną. Części nilpotentne zerują się przy potędze, która jest rozmiarem największej klatki Jordana danej macierzy, mamy

$$N_1^2 = 0$$
$$N_2^3 = 0$$

Teraz omówimy jak obliczyć funkcję analityczną od takiej macierzy. Ponieważ mnożenie naszych dwóch macierzy jest przemienne $DN = ND$, okazuje się że można stosować pewne wzory, które zachodzą dla liczb. Np. znany wzór $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ jest prawdziwy dla macierzy jeśli mamy dwie macierze komutujące (tzn. $M_1M_2 = M_2M_1$), tylko wtedy $\exp\big(M_1 + M_2\big) = \exp\big(M_1\big)\exp\big(M_2\big)$, dla dwóch dowolnych macierzy nie będzie to prawdą. Nas będzie interesował szereg Taylora, dla liczb mamy

$$f(x_0 + h) = \sum_{j=0}^{\infty} f^{(j)}(x_0)\frac{h^j}{j!}$$

Okazuje się, że można uzasadnić podobny wzór dla macierzy D i N (dzięki temu, że $DN = ND$), dodatkowo możemy wykorzystać fakt, że $N^k = 0$, który pozwoli nam uzyskać skończoną sumę

$$f(D + N) = \sum_{j=0}^{\infty} f^{(j)}(D)\frac{N^j}{j!} = \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(D)\frac{N^j}{j!}$$

Możemy policzyć przykładowo $f(x) = \exp(tx)$ dla macierzy z poprzedniego tygodnia

$$\exp\left(t\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & -5\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\right) = \exp\big(tD_1\big) + t\exp\big(tD_1\big)N_1$$
$$= \begin{pmatrix}(1-t)e^{-t} & te^{2t} & te^{-t} & e^{-t} - 2te^{-t} - e^{2t}\\ 0 & e^{2t} & 0 & 0\\ -te^{-t} & -te^{2t} & (1+t)e^{-t} & -e^{-t} - 2te^{-t} + e^{2t}\\ 0 & -te^{2t} & 0 & e^{2t}\end{pmatrix}$$

$$\exp\left(t\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 2 & 2\end{pmatrix}\right) = \exp\big(tD_2\big) + t\exp\big(tD_2\big)N_2 + \frac{t^2}{2}\exp\big(tD_2\big)N_2^2$$
$$= \begin{pmatrix}e^t - te^t + \frac{t^2}{2}e^t & te^t & -te^t + \frac{t^2}{2}e^t & te^t - \frac{t^2}{2}e^t & te^t - \frac{t^2}{2}e^t\\ te^t & e^t & te^t & -te^t & -te^t\\ 0 & 0 & e^t & te^t & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^t & 0\\ -te^t + \frac{t^2}{2}e^t & te^t & -te^t + \frac{t^2}{2}e^t & 2te^t - \frac{t^2}{2}e^t & e^t + te^t - \frac{t^2}{2}e^t\end{pmatrix}$$

To kończy naszą przygodę z diagonalizacją macierzy, postacią Jordana i obliczaniem funkcji od operatorów. Następnym działem są formy kwadratowe. Zacznijmy od wprowadzenia form dwuliniowych

Definicja 16. *Formą dwuliniową nazywamy*

$$b : V \times V \to \mathbb{R}$$

takie, że jest liniowe w pierwszym i drugim argumencie, tzn. dla $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ i $v_i, w_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) mamy

$$b(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 b(v_1, w) + \alpha_2 b(v_2, w)$$
$$b(v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \beta_1 b(v, w_1) + \beta_2 b(v, w_2)$$

Jeśli $e = \{e_1, e_2 \dots e_n\}$ jest bazą to macierz $\boldsymbol{B} = [b(e_i, e_j)]_{i,j\in\{1,2\dots n\}}$ nazywamy macierzą formy dwuliniowej, można zapisać formę dwuliniową wzorem $b(v, w) = v^T \boldsymbol{B} w$.

Przykład 17. *W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ mamy przykładową formę dwuliniową $b(x, y) = x_1 y_1 + 4x_2 y_1 - x_3 y_3$, gdzie x_i, y_i to współrzędne wektorów x, y. Jej macierz jest postaci*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Można się przekonać, że zachodzi wzór

$$b(x, y) = x^T \boldsymbol{B} y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & b(e_1, e_2) & b(e_1, e_3) \\ b(e_2, e_1) & b(e_2, e_2) & b(e_2, e_3) \\ b(e_3, e_1) & b(e_3, e_2) & b(e_3, e_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Definicja 18. *Formą kwadratową nazywamy odwzorowanie*

$$Q : V \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto b_{sym}(v, v)$$

dla pewnej symetrycznej formy dwuliniowej $b_{sym}(v, w)$ (oznacza to że $b_{sym}(v, w) = b_{sym}(w, v)$, lub w języku macierzy $\boldsymbol{B}_{sym} = \boldsymbol{B}_{sym}^T$). Tzn. $Q(v) = b_{sym}(v, v)$, forma kwadratowa powstaje przez wstawienie w oba argumenty tego samego wektora. Jeśli $e = \{e_1, e_2 \dots e_n\}$ jest bazą to macierz $Q = [b_{sym}(e_i, e_j)]_{i,j\in\{1,2\dots n\}}$ nazywamy macierzą formy kwadratowej, można zapisać formę kwadratową wzorem $Q(v) = v^T Q v$. Z formy kwadratowej można też odtworzyć odpowiadającą symetryczną formę dwuliniową traktując jej macierz jako macierz formy dwuliniowej.

Kontynuując poprzedni przykład, chcemy znaleźć części symetryczną i antysymetryczną macierzy $\boldsymbol{B}$, mamy $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{sym} + \boldsymbol{B}_{asym}$, gdzie $\boldsymbol{B}_{sym}^T = \boldsymbol{B}_{sym}$, $\boldsymbol{B}_{asym}^T = -\boldsymbol{B}_{asym}$. Możemy zapostulować

$$\boldsymbol{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}_{sym}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}_{asym}}$$

Mamy równania $a + b = 4, a - b = 0$, co daje nam $a = b = 2$. Można też znaleźć część symetryczną i antysymetryczną używając ogólnych wzorów $\boldsymbol{B}_{sym} = \frac{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^T}{2}$, $\boldsymbol{B}_{asym} = \frac{\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^T}{2}$. Nietrudno się przekonać, że

faktycznie ich suma daje B i transpozycja nie zmienia pierwszej, a na drugiej produkuje minus. Ponieważ $B^T_{asym} = -B_{asym}$, $v^T B_{asym} v = 0$ dla dowolnego wektora, wkład do formy kwadratowej daje tylko część symetryczna, a informacja o część antysymetrycznej jest tracona. Forma kwadratowa, którą uzyskujemy to $x_1^2 + 4x_1x_2 - x_3^2$

Teraz chcemy się przyjrzeć problemowi diagonalizacji formy kwadratowej. Można użyć podejścia już znanego dla macierzy i diagonalizować macierz formy kwadratowej, ale istnieją też prostsze metody korzystające z własności form kwadratowych. Ważna uwaga jest taka, że diagonalizacja form kwadratowych jest czymś zupełnie innym niż diagonalizacja macierzy, co powinno stać się zaraz jasne, mamy tu zupełnie inne własności i zadajemy inne pytania.

Najbardziej podstawową metodą sprowadzenia formy kwadratowej do postaci diagonalnej jest metoda Lagrange'a, opiera się ona na tak zwanym dopełnieniu do kwadratu. Zobaczmy to na przykładzie

$$Q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_3^2 = (x_1 + 2x_2)^2 - 4x_2^2 - x_3^2$$

Uzyskujemy w rezultacie wyrażenie zawierające tylko kwadraty współrzędnych. Mówimy, że

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_1 + 2x_2 \\ \tilde{x}_2 &= x_2 \\ \tilde{x}_3 &= x_3 \end{aligned}$$

są współrzędnymi diagonalizującymi formę kwadratową, mamy $Q(\tilde{x}) = \tilde{x}_1^2 - 4\tilde{x}_2^2 - \tilde{x}_3^2$. Może się pojawić pokusa, by powiedzieć że mamy wartości własne $1, -4, -1$, ale jeśli byśmy wprowadzili $\tilde{x}_2 = 2x_2$, to nasza forma kwadratowa miałaby postać $Q(\tilde{x}) = \tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2 - \tilde{x}_3^2$, więc mielibyśmy "wartości własne" $1, -1, -1$. To spostrzeżenie to główna różnica pomiędzy diagonalizacją formy kwadratowej i macierzy, wartości własne nie są tu czymś "uniwersalnym", ale (dzięki temu że pracujemy w liczbach rzeczywistych) znaki tych wyrazów są niezależne od bazy diagonalizującej, to motywuje następującą definicję.

Definicja 19. *Jeśli forma kwadratowa jest diagonalna w bazie, tzn. ma postać*

$$Q(\xi) = \sum_{i=1}^{p} \xi_i^2 - \sum_{j=1}^{q} \xi_{p+j}^2$$

gdzie ξ_i to współrzędne wektora ξ to parę (p, q) nazywamy sygnaturą formy kwadratowej. Sygnatura nie zależy od bazy diagonalizującej, dodatkowo ich sumę $p + q$ nazywamy rzędem formy kwadratowej i oznaczamy $\mathrm{rk}(Q) = p + q$

W naszym przykładzie sygnatura wynosi (1, 2), a rząd jest równy 3.

Formy kwadratowe pojawiają się naturalnie przy badaniu pochodnej wielu zmiennych i zawierają informację o drugiej pochodnej. Dla funkcji jednej zmiennej znak drugiej pochodnej mówił nam czy mamy minimum czy maksimum, dla funkcji wielu zmiennych rolę tą będzie pełnić sygnatura, ale to raczej temat na Analizę II.

Zad. 5.1

Znajdź sygnaturę i rząd następujących form kwadratowych
a) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$ b) $x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3 + 7x_2^2 + 8x_3^2$ c) x_1x_2

Rozw. 5.1

a) Wybieramy współrzędną x_1 i uzupełniamy kwadrat, pamiętając o wzorze skróconego mnożenia $(x_1 + a)^2 = x_1^2 + 2x_1a + a^2$ mamy

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = \left(x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2\right) - 4x_2^2 + 3x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 - x_2^2$$

Mamy zatem sygnaturę $(1, 1)$ (jeden plus, jeden minus), oraz rząd $\mathrm{rk}(Q) = 2$, współrzędne diagonalizujące to

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1 + 2x_2 \\ \xi_2 = x_2 \end{cases}$$

b) Chcemy uzupełnić kwadrat dla zmiennej x_1, mamy dwa człony liniowe, które musimy "wciągnąć"

$$\begin{aligned} x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3 + 7x_2^2 + 8x_3^2 &= \left(x_1^2 + 2x_1(2x_2 - 3x_3) + (2x_2 - 3x_3)^2\right) - (2x_2 - 3x_3)^2 \\ +8x_2x_3 + 7x_2^2 + 8x_3^2 &= (x_1 + 2x_2 - 3x_3)^2 + 3x_2^2 + 20x_2x_3 - x_3^2 = (x_1 + 2x_2 - 3x_3)^2 \\ +3\left(x_2^2 + 2x_2\frac{10}{3}x_3 + \frac{100}{9}x_3^2\right) - \frac{100}{3}x_3^2 - x_3^2 &= (x_1 + 2x_2 - 3x_3)^2 + 3(x_2 + \frac{10}{3}x_3)^2 - \frac{103}{3}x_3^2 \end{aligned}$$

Mamy zatem sygnaturę $(2, 1)$ (dwa plusy, jeden minus), oraz rząd $\mathrm{rk}(Q) = 3$, współrzędne diagonalizujące to

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ \xi_2 = x_2 + \frac{10}{3}x_3 \xi_3 = x_3 \end{cases}$$

c) Co jeśli nie ma wyrazu kwadratowego (x_i^2), aby uzupełnić kwadrat? Musimy sobie stworzyć jakiś, standardowym pomysłem jest zmienić zmienne (np. "pomieszać" pierwszą i drugą)

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \end{cases}$$

Otrzymujemy wtedy

$$x_1x_2 = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = y_1^2 - y_2^2$$

Dostaliśmy od razu zdiagonalizowaną formę kwadratową, ogólnie nie byłoby tak prosto i trzeba by kontynuować procedurę według przepisu z poprzednich podpunktów. Mamy zatem sygnaturę $(1, 1)$ (jeden plus, jeden minus), oraz rząd $\mathrm{rk}(Q) = 2$, współrzędne diagonalizujące to

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \end{cases}$$

6 Diagonalizacja form kwadratowych, algorytm Lagrange'a i kryterium Sylvestera

Najpierw omówmy zmianę bazy formy kwadratowej. Są tu pewne analogie do zmiany bazy endomorfizmu (które pojawiały się co chwila przy diagonalizacji), ale są też istotne różnice. Przyjrzyjmy się formie kwadratowej

$$Q(\vec{v}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 - x_2^2$$
$$\vec{v} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2$$

$\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ to elementy bazy, a x_1, x_2 to współrzędne wektora w tej bazie. Możemy też napisać $[\vec{v}]^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Jeśli wprowadzimy podstawienie

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1 + 2x_2 \\ \xi_2 = x_2 \end{cases}$$

To dostaniemy diagonalną postać $\xi_1^2 - \xi_2^2$ ξ_1, ξ_2 to współrzędne wektora $\vec{v}$ w bazie diagonalizującej (tzw. współrzędne diagonalizujące). Jaka jest baza diagonalizująca? Przyjrzyjmy się następującej równości, jeśli $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$ to baza diagonalizująca, musi zachodzić

$$\vec{v} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 = \xi_1\hat{f}_1 + \xi_2\hat{f}_2$$

Innymi słowy, możemy zapisać $[\vec{v}]^f = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ (znaczy to dokładnie tyle, że w bazie f, pierwsza współrzędna to ξ_1, a druga ξ_2, czyli $\vec{v} = \xi_1\hat{f}_1 + \xi_2\hat{f}_2$). Wiemy, jak transformują się współrzędne, możemy wykorzystać tę wiedzę, by znaleźć transformację wektorów bazy. Zapiszmy transformację współrzędnych w postaci macierzowej

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Możemy zinterpretować tę równość jako zmianę bazy

$$[\vec{v}]^f = [id]_e^f [\vec{v}]^e$$

Czyli powyższa macierz jest macierzą zmiany bazy $[id]_e^f$, możemy ją odwrócić

$$[id]_f^e = ([id]_e^f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tutaj przypominamy sobie wiedzę, której nauczyliśmy się przy okazji diagonalizacji, jeśli mamy macierz zmiany bazy z bazy f do e, to jej kolumny są elementami bazy f zapisanymi w bazie e. Innymi słowy

$$\hat{f}_1 = \hat{e}_1$$
$$\hat{f}_2 = -2\hat{e}_1 + \hat{e}_2$$

Na koniec tego wstępu omówmy jeszcze jedną różnicę między formami kwadratowymi a endomorfizmami. Podczas diagonalizacji stosowaliśmy wzór $M = S^{-1}DS$, gdzie M było macierzą w bazie standardowej e, D macierzą w bazie diagonalnej d, a $S = [id]_e^d$ macierzą zmiany bazy. Spróbujmy znaleźć

analogię tego wzoru dla form kwadratowych, mamy interpretację macierzową, którą można zapisać w różnych bazach

$$Q(\vec{v}) = ([v]^e)^T [Q]_e [v]^e$$
$$Q(\vec{v}) = ([v]^f)^T [Q]_f [v]^f$$

Podstawiając do drugiego transformację współrzędnych i przyrównując do pierwszego dostajemy

$$([v]^f)^T [Q]_f [v]^f = ([id]_e^f [v]^e)^T [Q]_f [id]_e^f [v]^e = ([v]^e)^T ([id]_e^f)^T [Q]_f [id]_e^f [v]^e = ([v]^e)^T [Q]_e [v]^e$$

Czyli dostajemy wzór na zmianę bazy macierzy formy kwadratowej (który działa też dla form dwuliniowych)

$$([id]_e^f)^T [Q]_f [id]_e^f = [Q]_e$$

Widzimy, że jest on podobny do wzoru dla endomorfizmów, z tą różnicą, że mamy transpozycję zamiast odwrotności

Zad. 6.1

Zdiagonalizuj następujące formy kwadratowe, znajdź bazę diagonalizującą, sygnaturę i rząd
a) $Q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1, x \in \mathbb{R}^4$
b) $Q(X) = \det(X) + \mathrm{Tr}\left(X^2\right), X \in \mathbb{R}_2^2$
c) $Q(v) = v(-1)v'(1), v \in \mathbb{R}_2[\cdot]$ (dodatkowe dla chętnych)

Rozw. 6.1

a) Chcemy zastosować algorytm Lagrange'a "dopełniania do kwadratu", opierający się na wzorze $(x_i + a)^2 = x_i^2 + 2x_ia + a^2$, pozwala on nam połączyć wyraz kwadratowy x_i^2 z liniowym. Nasza forma kwadratowa nie ma jednak żadnego wyrazu typu x_i^2, musimy więc wyprodukować sobie wyrazy kwadratowe sprytną zmianą bazy, skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $4x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = y_4 \end{cases}$$

lub w drugą stronę

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \\ y_3 = x_3 \\ y_4 = x_4 \end{cases}$$

Nasza forma kwadratowa w nowej bazie ma postać, która pozwala na użycie algorytmu Lagrange'a

$$\begin{aligned} Q(x(y)) &= y_1^2 - y_2^2 + (y_1 - y_2)y_3 + y_3y_4 + y_4(y_1 + y_2) \\ &= (y_1^2 + 2y_1\frac{1}{2}(y_3 + y_4) + \frac{1}{4}(y_3 + y_4)^2) - \frac{1}{4}(y_3 + y_4)^2 - y_2^2 - y_2y_3 + y_3y_4 + y_2y_4 \\ &= (y_1 + \frac{1}{2}(y_3 + y_4))^2 - \frac{1}{4}(y_3 + y_4)^2 - (y_2^2 + 2y_2\frac{1}{2}(y_3 - y_4) + \frac{1}{4}(y_3 - y_4)^2) + \frac{1}{4}(y_3 - y_4)^2 + y_3y_4 \\ &= (y_1 + \frac{1}{2}(y_3 + y_4))^2 - (y_2 + \frac{1}{2}(y_3 - y_4))^2 \end{aligned}$$

Mamy sygnaturę (1,1) i rząd 2. Warto tu zwrócić uwagę, że dostaliśmy rząd 2, mimo że mamy 4-wymiarową przestrzeń wektorową, taką sytuację nazywamy degeneracją i mówimy, że forma kwadratowa jest zdegenerowana, po diagonalizacji mamy zera na diagonali. Współrzędne diagonalizujące to

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{1}{2}(y_3 + y_4) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ z_2 = y_2 + \frac{1}{2}(y_3 - y_4) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \\ z_3 = y_3 = x_3 \\ z_4 = y_4 = x_4 \end{cases}$$

Zapiszmy to w formie macierzowej

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Powyższa macierz to macierz zmiany bazy ze standardowej e do bazy diagonalizującej f ($[id]_e^f$). Kolumny macierzy odwrotnej do niej ($[id]_f^e$) to baza diagonalizująca

$$[id]_f^e = ([id]_e^f)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Odwrócenie powyższej macierzy może zostać zrobione metodą Gaussa - Jordana. Dozwolone ruchy to dodawanie do siebie wierszy i mnożenie ich przez liczby, mamy wtedy $[A|\mathbb{1}] \sim [\mathbb{1}|A^{-1}]$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 \to -w_1 + w_2]{w_1 \to w_1 + w_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_2 \to -(w_2 + w_4)]{w_1 \to w_1 - w_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

W tych bazach nasza forma kwadratowa ma poniższe postacie i spełnia $[Q]_f = ([id]_f^e)^T [Q]_e [id]_f^e$ (co można sprawdzić, jeśli ktoś wątpi)

$$[Q]_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad [Q]_e = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Jeśli ktoś wątpi w te postacie macierzowe to można sprawdzić, że dają poprawne formy kwadratowe według definicji

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = z_1^2 - z_2^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$$

b) W przypadku gdy wzór formy kwadratowej jest dany przez bardziej skomplikowaną formułę jak w tym podpunkcie, pierwszym krokiem jest zapisanie formy kwadratowej w bazie. Dla macierzy 2×2 mamy bazę standardową e

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dowolną macierz można rozpisać w tej bazie ze współrzędnymi a, b, c, d

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$$

Teraz przeanalizujmy oba człony i rozpiszmy je używając tych współrzędnych, wyznacznik jest dość prosty

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$$

Ślad macierzy (oznaczany $\mathrm{Tr}(A)$) to suma elementów na diagonali, ma on kilka ciekawych własności, jak np. to, że jest cykliczny ($\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$) i że nie zależy od bazy ($\mathrm{Tr}\left([F]_e^e\right) = \mathrm{Tr}\left([F]_f^f\right)$), co jest prostym wnioskiem z pierwszego faktu.

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}\right) = a^2 + bc + bc + d^2$$

Możemy zapisać formę kwadratową we współrzędnych

$$Q(X) = ad - bc + a^2 + 2bc + d^2 = a^2 + ad + bc + d^2$$

Jest to postać, która umożliwia proste zastosowanie algorytmu Lagrange'a

$$\begin{aligned} Q(X) &= a^2 + ad + bc + d^2 = (a^2 + 2a\frac{1}{2}d + \frac{1}{4}d^2) - \frac{1}{4}d^2 + bc + d^2 \\ &= (a + \frac{1}{2}d)^2 + bc + \frac{3}{4}d^2 \\ &= (a + \frac{1}{2}d)^2 + \frac{1}{4}(b + c)^2 - \frac{1}{4}(b - c)^2 + \frac{3}{4}d^2 \end{aligned}$$

Gdzie na koniec zastosowaliśmy podobną sztuczkę co w poprzednim podpunkcie, by poradzić sobie z członem bc przy braku wyrazów kwadratowych b^2 i c^2. Nasze współrzędne diagonalizujące to

$$\begin{cases} \tilde{a} = a + \frac{1}{2}d \\ \tilde{b} = b + c \\ \tilde{c} = b - c \\ \tilde{d} = d \end{cases}$$

Zapisując to w formie macierzowej, możemy odczytać macierze zmiany bazy

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \\ \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$[id]_f^e = ([id]_e^f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Odwrócenie powyższej macierzy może zostać zrobione metodą Gaussa - Jordana. Dozwolone ruchy to dodawanie do siebie wierszy i mnożenie ich przez liczby, mamy wtedy $[A|\mathbb{1}] \sim [\mathbb{1}|A^{-1}]$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 \to -(w_3 - w_2)/2]{w_1 \to w_1 - w_4/2 \\ w_2 \to (w_2 + w_3)/2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Baza $f = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ jest bazą diagonalizującą, w niej nasza forma kwadratowa ma poniższą postać

i (co można sprawdzić) spełnia jak poprzednio $[Q]_f = ([id]_f^e)^T [Q]_e [id]_f^e$

$$[Q]_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$
$$[Q]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Wybieramy najpierw bazę $\mathbb{R}_2[\cdot]$, będzie to baza jednomianów $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2$. Obliczmy formę kwadratową dla ogólnego wielomianu, ze współrzędnymi x_k. Potem można od razu użyć algorytmu Lagrange'a by zdiagonalizować ją najpierw dopełniając kwadrat dla x_3, a potem dla x_1

$$\begin{aligned} Q(x_1 + x_2 t + x_3 t^2) &= (x_1 - x_2 + x_3)(x_2 + 2x_3) = x_1 x_2 - x_2^2 + 2x_1 x_3 - x_2 x_3 + 2x_3^2 \\ &= x_1 x_2 - x_2^2 + 2(x_3^2 + 2x_3(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2) + (\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2)^2) - 2(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2)^2 \\ &= -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_1 x_2 - \frac{9}{8}x_2^2 + 2(x_3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2)^2 \\ &= -\frac{1}{2}(x_1^2 - 2x_1\frac{3}{2}x_2 + \frac{9}{4}x_2^2) + \frac{9}{8}x_2^2 - \frac{9}{8}x_2^2 + 2(x_3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2)^2 \\ &= -\frac{1}{2}(x_1 - \frac{3}{2}x_2)^2 + 2(x_3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2)^2 \end{aligned}$$

Sygnatura wynosi (1,1), rząd jest równy 2, a współrzędne diagonalizujące dane są wzorami

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{3}{2}x_2 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + x_3 \end{cases}$$

Wektory bazy uzyskujemy odwracając powyższą macierz zmiany bazy

$$[id]_f^e = ([id]_e^f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1/4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$
$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Macierze formy kwadratowej w obu bazach dane są niżej i spełniają $[Q]_f = ([id]_f^e)^T [Q]_e [id]_f^e$

$$[Q]_e = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \quad [Q]_f = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Inną metodą znalezienia sygnatury jest tak zwane kryterium Sylvestera, polega ono na badaniu minorów macierzy formy kwadratowej.

Twierdzenie 20. *(Kryterium Sylvestera)*
Niech $[Q]_e$ będzie macierzą $n \times n$ formy kwadratowej, a D_i wyznacznikami macierzy $i \times i$ powstałymi z lewego górnego bloku macierzy $[Q]_e$, . kolumn i wierszy o indeksach nie większych niż i. Jej wyznacznik nazywamy minorem (czasem sama macierz jest nazywana minorem, ale będziemy się trzymać nomenklatury z wykładu) Jeśli dla wszystkich i zachodzi $D_i \neq 0$, to istnieje baza, w której macierz formy kwadratowej jest diagonalna i na diagonali ma liczby $D_1, \frac{D_2}{D_1}, \frac{D_3}{D_2} \ldots, \frac{D_n}{D_{n-1}}$. Pozwala to na proste odczytanie sygnatury.

Zad. 6.2

Znajdź sygnaturę formy kwadratowej stosując kryterium Sylvestera
$Q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$, $x \in \mathbb{R}^2$

Rozw. 6.2

W tym zadaniu możemy się posłużyć pewną obserwacją. Jak wiemy forma kwadratowa może zostać zdefiniowana przez symetryczną formę dwuliniową $Q(v) = b_{sym}(v, v)$. Innymi słowy mając formę dwuliniową możemy znaleźć formę kwadratową. Okazuje się że jest też wzór w drugą stronę, tzn. można znaleźć symetryczną formę dwuliniową jeśli znamy odpowiadającą jej formę kwadratową. Ten wzór to

$$b_{sym}(v, w) = \frac{1}{2}(Q(v + w) - Q(v) - Q(w))$$

Łatwo to sprawdzić, podstawiając do prawej strony $Q(v) = b_{sym}(v, v)$ i korzystając z liniowości w obu argumentach oraz symetryczności ($b_{sym}(v, w) = b_{sym}(w, v)$), że dostajemy równość lewej i prawej strony

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(b_{sym}(v + w, v + w) - b_{sym}(v, v) - b_{sym}(w, w)) \\
= &\frac{1}{2}(b_{sym}(v, v) + b_{sym}(v, w) + b_{sym}(w, v) + b_{sym}(w, w) - b_{sym}(v, v) - b_{sym}(w, w)) \\
&= \frac{1}{2}(b_{sym}(v, w) + b_{sym}(w, v)) = b_{sym}(v, w)
\end{aligned}$$

Można wykorzystywać ten wzór przy szukaniu macierzy formy kwadratowej zamiast zgadywania użytego w poprzednim zadaniu. Obliczmy elementy macierzowe (ponieważ macierz jest symetryczna wystarczą nam elementy na i nad diagonalą, element pod diagonalą $b_{sym}(e_2, e_1) = b_{sym}(e_1, e_2)$)

$$\begin{aligned}
b_{sym}(e_1, e_1) &= \frac{1}{2}(Q(2e_1) - 2Q(e_1)) = \frac{1}{2}(4 - 2) = 1 \\
b_{sym}(e_2, e_2) &= \frac{1}{2}(Q(2e_2) - 2Q(e_2)) = \frac{1}{2}(12 - 6) = 3 \\
b_{sym}(e_1, e_2) &= \frac{1}{2}(Q(e_1 + e_2) - Q(e_1) - Q(e_2)) = \frac{1}{2}(8 - 1 - 3) = 2
\end{aligned}$$

Macierz formy kwadratowej w bazie e jest równa macierzy formy symetrycznej

$$[Q]_e = [b_{sym}]_e = \begin{pmatrix} b_{sym}(e_1, e_1) & b_{sym}(e_1, e_2) \\ b_{sym}(e_2, e_1) & b_{sym}(e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

By zastosować kryterium Sylvestera potrzebujemy

$$D_1 = 1$$
$$D_2 = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = -1$$

Istnieje więc baza w której elementy diagonalne to $D_1 = 1$, $D_2/D_1 = -1$, sygnatura jest równa (1,1).

7 Diagonalizacja form kwadratowych, kryterium Sylvestera, formy kwadratowe z parametrem

Kryterium Sylvestera pozwala określić sygnaturę formy kwadratowej poprzez liczenie minorów, np. jeśli macierz formy kwadratowej to

$$[Q]_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

To jej minory są równe $D_1 = -1$, $D_2 = \det\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right) = -9$, więc istnieje baza, w której forma jest diagonalna i na diagonali ma $D_1 = -1$ i $D_2/D_1 = 9$. Jej sygnatura to (1,1).

Aby skutecznie stosować to kryterium warto nabrać intuicji tego jak macierz formy kwadratowej wiąże się z samą formą kwadratową. Możemy znaleźć formę kwadratową dla powyższej macierzy korzystając z wzoru $Q(x) = x^T [Q]_e x$.

$$Q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1^2 + 2 \times 2x_1x_2 + 5x_2^2$$

Śledząc związek elementów macierzowych i współczynników w formie kwadratowej łatwo się przekonać, że współczynnik -1 przy x_1^2 pochodzi z elementu (1,1) macierzy, współczynnik 5 przy x_2^2 pochodzi z elementu (2,2) macierzy, a współczynnik przy x_1x_2 to dwa razy element (1,2) (równy elementowi (2,1), bo macierz jest symetryczna). Gdybyśmy wzieli ogólną macierz 2×2 formy kwadratowej dostalibyśmy

$$Q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ax_1^2 + 2 \times bx_1x_2 + cx_2^2$$

Powyższe przykłady powinny uzasadnić intuicję, że jeśli mamy formę kwadratową $Q(x)$ rozpisaną we współrzędnych $x_1, x_2 \dots x_n$, możemy odczytać, że: element macierzowy na pozycji (j,j) to współczynnik przy x_j^2, a element macierzowy na pozycji (j,j') dla $j \neq j'$ to połowa współczynnika przy $x_j x_{j'}$.

Zad. 7.1

Znajdź sygnaturę formy kwadratowej stosując kryterium Sylvestera
a) $Q(x) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$, $x \in \mathbb{R}^3$
b) $Q(x) = -3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_4$ c) $Q(x) = 4x_1x_2 + 5x_2^2$, $x \in \mathbb{R}^2$
d) $Q(w) = \int_0^1 w(it)w(-it)dt$, $w \in \mathbb{R}_2[\cdot]$

Rozw. 7.1

a) Macierz formy kwadratowej w bazie standardowej e to

$$[Q]_e = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Jej minory to

$$D_1 = -1$$
$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -3$$
$$D_3 = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = -11$$

Istnieje więc baza w której forma jest diagonalna i jej elementy diagonalne to $D_1 = -1, D_2/D_1 = 3, D_3/D_2 = 11/3$, sygnatura jest równa (2,1)

b) Macierz formy kwadratowej w bazie standardowej e to

$$[Q]_e = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Jej minory to

$$D_1 = -3$$
$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -6$$
$$D_3 = \det \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -26$$
$$D_4 = \det \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 13$$

Istnieje więc baza w której forma jest diagonalna i jej elementy diagonalne to $D_1 = -3, D_2/D_1 = 2, D_3/D_2 = 13/3, D_4/D_3 = -1/2$, sygnatura jest równa (2,2)

c) Macierz formy kwadratowej w bazie standardowej e to

$$[Q]_e = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Jej minory to

$$D_1 = 0$$
$$D_2 = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right) = -4$$

Pojawia się tu problem, kryterium Sylvestera wymaga by wyznaczniki minorów były niezerowe, co nie jest tu spełnione. Jest to poważne ograniczenie tej metody, ale okazuje się że czasem można poradzić sobie sprytną zmianą bazy. Jeśli zamienimy wektory bazy, tzn. wprowadzimy $f_1 = e_2, f_2 = e_1$ (przez co nowe współrzędne będą dane przez $y_1 = x_2, y_2 = x_1$), to macierz w nowej bazie będzie miała postać

$$[Q]_f = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

I będzie miała niezerowe minory $D_1 = 5, D_2 = -4$ i wiemy, że w pewnej bazie diagonalizującej elementy diagonalne to $D_1 = 5, D_2/D_1 = -4/5$, więc sygnatura formy z zadania jest równa (1,1). Ta sztuczka udała się tylko dlatego, że rząd formy kwadratowej jest równy wymiarowi przestrzeni wektorowej. Jeśli by tak nie było, tzn. mielibyśmy degenerację, po diagonalizacji byłyby zera na diagonali jak w a), c) zadania 6.1, to kryterium Sylvestera nie dałoby nam żadnej informacji o sygnaturze formy kwadratowej. Drugą oczywistą wadą tej metody jest to, że nie można z niej "wyciągnąć" informacji o bazie diagonalizującej, aby to zrobić trzeba użyć algorytmu Lagrange'a dopełniania do kwadratu.

d) Musimy tu wykonać dodatkowy krok, najpierw trzeba znaleźć wzór na formę kwadratową we współrzędnych by móc odczytać jej macierz. Wybieramy bazę $\mathbb{R}_2[\cdot]$ w postaci $e = \{1, t, t^2\}$, tzw. bazę jednomianów. Dowolny wielomian może być zapisany w tej bazie jako $w(t) = x_1 1 + x_2 t + x_3 t^2$, gdzie x_1, x_2, x_3 to współrzędne. Wykorzystamy też własność $w(-it) = \overline{w(it)}$, która pozwoli nam przepisać wyraz pod całką jako $w(it)w(-it) = |w(it)|^2$. Podsumowując, mamy

$$Q(x_1 1 + x_2 t + x_3 t^2) = \int_0^1 \left|x_1 1 + x_2 it - x_3 t^2\right|^2 dt = \int_0^1 ((x_1 - x_3 t^2)^2 + x_2^2 t^2) dt = x_1^2 + \frac{1}{5}x_3^2 - 2x_1 x_3 \frac{1}{3} + x_2^2 \frac{1}{3}$$

Teraz możemy zapisać macierz formy kwadratowej w bazie jednomianów e

$$[Q]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Jej minory to

$$D_1 = 1$$
$$D_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$
$$D_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{4}{3 \times 5 \times 9}$$

Istnieje więc baza w której forma jest diagonalna i jej elementy diagonalne to $D_1 = 1, D_2/D_1 = \frac{1}{3}, D_3/D_2 = \frac{4}{5\times 9}$, sygnatura jest równa (3,0)

Zad. 7.2

W zależności od wartości $\lambda \in \mathbb{R}$ wyznacz sygnaturę formy kwadratowej

$$\begin{aligned} Q_\lambda : \mathbb{R}_2[\cdot] &\to \mathbb{R} \\ w &\mapsto \int_{-1}^{1} w(t)w(t+\lambda)dt \end{aligned}$$

Rozw. 7.2

Plan na zadanie jest następujący, chcemy zastosować kryterium Sylvestera, by przeanalizować sygnaturę w zależności od wartości λ, najpierw musimy znaleźć macierz formy kwadratowej. Moglibyśmy postąpić jak w poprzednim zadaniu, wybrać bazę jednomianów $e = \{1, t, t^2\}$ obliczyć $Q(w)$ dla $w(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$ i odczytać macierz ze wzoru, ale spróbujmy innej metody. Macierz formy kwadratowej jest równa macierzy stowarzyszonej formy dwuliniowej

$$[Q]_e = [b_{sym}]_e^e = \begin{pmatrix} b_{sym}(e_1,e_1) & b_{sym}(e_1,e_2) & b_{sym}(e_1,e_3) \\ b_{sym}(e_2,e_1) & b_{sym}(e_2,e_2) & b_{sym}(e_2,e_3) \\ b_{sym}(e_3,e_1) & b_{sym}(e_3,e_2) & b_{sym}(e_3,e_3) \end{pmatrix}$$

Elementy macierzowe możemy policzyć ze wzoru na formę dwuliniową wyrażoną przez stowarzyszoną formę kwadratową

$$b_{sym}(x,y) = \frac{1}{2}\left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right)$$

Obliczmy najpierw elementy na diagonali, wykorzystamy obserwację, że całka z funkcji nieparzystej po odcinku $[-1,1]$ daje zero. Innymi słowy, dla k nieparzystych, $\int_{-1}^{1} t^k dt = \frac{1}{k+1} t^{k+1}\Big|_{-1}^{1} = 0$

$$\begin{aligned} b_{sym}(e_1,e_1) &= \frac{1}{2}\left(Q(2e_1) - 2Q(e_1)\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} 2\times 2dt - 2\int_{-1}^{1} 1\times 1dt\right) \\ &= \int_{-1}^{1} 1dt = 2 \\ b_{sym}(e_2,e_2) &= \frac{1}{2}\left(Q(2e_2) - 2Q(e_2)\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} 2t\times 2(t+\lambda)dt - 2\int_{-1}^{1} t\times(t+\lambda)dt\right) \\ &= \int_{-1}^{1} t\times(t+\lambda)dt = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3} \\ b_{sym}(e_3,e_3) &= \frac{1}{2}\left(Q(2e_3) - 2Q(e_3)\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} 2t^2\times 2(t+\lambda)^2 dt - 2\int_{-1}^{1} t^2\times(t+\lambda)^2 dt\right) \\ &= \int_{-1}^{1} t^2\times(t+\lambda)^2 dt = \int_{-1}^{1} t^4 + t^2\lambda^2 dt = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\lambda^2 \end{aligned}$$

Teraz policzymy elementy pozadiagonalne, ponieważ macierz jest symetryczna musimy znaleźć tylko 3 nad diagonalą, elementy pod diagonalą będą z symetrii takie same. Wykorzystamy też, to że policzyliśmy

już $Q(e_j, e_j)$ wyżej, oraz to że całka z t^k dla nieparzystej potęgi daje zero

$$\begin{aligned}
b_{sym}(e_1, e_2) &= \frac{1}{2}\left(Q(e_1+e_2) - Q(e_1) - Q(e_2)\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}(1+t)(1+t+\lambda)dt - 2 - \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}(1+t+\lambda+t+t^2+t\lambda)dt - 2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}(1+\lambda+t^2)dt - 2 - \frac{2}{3}\right) = \lambda \\
b_{sym}(e_1, e_3) &= \frac{1}{2}\left(Q(e_1+e_3) - Q(e_1) - Q(e_3)\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}(1+t^2)(1+(t+\lambda)^2)dt - 2 - \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\lambda^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}(1+2t^2+\lambda^2+t^4+\lambda t^2)dt - 2 - \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\lambda^2\right) = \frac{2}{3} + \lambda^2 \\
b_{sym}(e_2, e_3) &= \frac{1}{2}\left(Q(e_2+e_3) - Q(e_2) - Q(e_3)\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}(t+t^2)(t+\lambda+(t+\lambda)^2)dt - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\lambda^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}(t^2+3\lambda t^2+t^4+t^2\lambda^2)dt - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\lambda^2\right) = \lambda
\end{aligned}$$

Mamy macierz formy kwadratowej

$$[Q]_e = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \frac{2}{3}+\lambda^2 \\ \lambda & \frac{2}{3} & \lambda \\ \frac{2}{3}+\lambda^2 & \lambda & \frac{2}{5}+\frac{2}{3}\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Obliczamy jej minory

$$\begin{aligned}
D_1 &= 2 \\
D_2 &= \det\begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{4}{3} - \lambda^2 \\
D_3 &= \det\begin{pmatrix} 2 & \lambda & \frac{2}{3}+\lambda^2 \\ \lambda & \frac{2}{3} & \lambda \\ \frac{2}{3}+\lambda^2 & \lambda & \frac{2}{5}+\frac{2}{3}\lambda^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{3}\lambda^4 - \frac{16}{15}\lambda^2 + \frac{32}{135} = \frac{2}{135}\left(45\lambda^4 - 72\lambda^2 + 16\right)
\end{aligned}$$

Kryterium Sylvestera da nam sygnaturę jeśli ustalimy znaki minorów, ewidentnie będą one zależeć od λ, więc przeanalizujmy znaki poszczególnych minorów. Do tego przydatne będzie zauważenie, że D_3 jest wielomianem drugiego stopnia w zmiennej λ^2, więc szybkie zastosowanie wzoru na zera funkcji kwadratowej daje nam

$$D_3 = \frac{2}{135}\left(45\lambda^4 - 72\lambda^2 + 16\right) = \frac{2}{3}\left(\lambda^2 - \frac{4}{3}\right)\left(\lambda^2 - \frac{4}{15}\right)$$

Możemy teraz znaleźć znaki minorów

$$D_1 = 2 > 0$$

$$D_2 = \frac{4}{3} - \lambda^2 = \begin{cases} = 0 & \text{jeśli } \lambda^2 = \frac{4}{3} \\ > 0 & \text{jeśli } \lambda^2 < \frac{4}{3} \\ < 0 & \text{jeśli } \lambda^2 > \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$D_3 = \frac{2}{135}\left(\lambda^2 - \frac{4}{3}\right)\left(\lambda^2 - \frac{4}{15}\right) = \begin{cases} = 0 & \text{jeśli } \lambda^2 = \frac{4}{3} \text{ lub } \lambda^2 = \frac{4}{15} \\ > 0 & \text{jeśli } \lambda^2 < \frac{4}{15} \\ < 0 & \text{jeśli } \frac{4}{15} < \lambda^2 < \frac{4}{3} \\ > 0 & \text{jeśli } \frac{4}{3} < \lambda^2 \end{cases}$$

Daje nam to następujące przypadki

Przypadek 1: $\lambda^2 < \frac{4}{15}$
Mamy $D_1 > 0, D_2/D_1 > 0, D_3/D_2 > 0$, więc sygnatura to (3,0)

Przypadek 2: $\frac{4}{15} < \lambda^2 < \frac{4}{3}$
Mamy $D_1 > 0, D_2/D_1 > 0, D_3/D_2 < 0$, więc sygnatura to (2,1)

Przypadek 3: $\frac{4}{3} < \lambda^2$
Mamy $D_1 > 0, D_2/D_1 < 0, D_3/D_2 < 0$, więc sygnatura to (1,2)

Przypadek 4: $\frac{4}{3} = \lambda^2$
Kryterium Sylvestera zawodzi, należy skorzystać z algorytmu Lagrange'a i "na piechotę" zdiagonalizować formę kwadratową. Okazuje się że sygnatura to (1,1)

Przypadek 5: $\lambda^2 = \frac{4}{15}$
Kryterium Sylvestera zawodzi, należy skorzystać z algorytmu Lagrange'a i "na piechotę" zdiagonalizować formę kwadratową. Okazuje się że sygnatura to (2,0)

8 Równoważność form kwadratowych

Zad. 8.1

Dane są pary form kwadratowych $Q : V \to \mathbb{R}$, oraz $Q_0 : V_0 \to \mathbb{R}$. Zdiagonalizuj je i podaj sygnaturę, znajdź (jeśli istnieje) operator liniowy $F : V \to V_0$, taki że $\forall_{v \in V} : Q(v) = Q_0(Fv)$

a) $V = \mathbb{R}^2$, $Q(x) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2$ $\quad V_0 = \mathbb{R}^2$, $Q_0(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $Q(x) = x_1x_2 - x_2x_3 + x_3x_1$ $\quad V_0 = \mathbb{R}^3$, $Q_0(x) = x_1^2 + 4x_2x_3$

c) $V = \mathbb{R}^2_2$, $Q(X) = \det(X)$ $\quad V_0 = \mathbb{R}_3[\cdot]$, $Q_0(v) = \int_0^1 v(t)^2 dt$

d) $V = \mathbb{R}^2_2$, $Q(X) = \det(X)$ $\quad V_0 = \mathbb{R}^2_2$, $Q_0(X) = \mathrm{Tr}\left(X^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \right)$

e) $V = \mathbb{R}^2$, $Q(x) = x_1^2 - x_2^2$ $\quad V_0 = \mathbb{R}^3$, $Q_0(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$

Rozw. 8.1

a) Sygnaturę możemy łatwo znaleźć algorytmem Lagrange'a, dostaniemy w ten sposób informacje przydatne do znalezienia operatora F, w obu przypadkach będzie wygodniej dopełnić do kwadratu człon x_2 (dla drugiej formy kwadratowej zmienimy oznaczenie na y, by się odróżniała bardziej od pierwszej w dalszych rachunkach)

$$Q(x) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 = \frac{9}{2}x_1^2 + 2(\frac{1}{2}x_1 + 2x_2)^2$$
$$Q_0(y) = 2y_1^2 - 2y_1y_2 + 5y_2^2 = 2(y_1 - \frac{1}{2}y_2)^2 + \frac{9}{2}y_2^2$$

Sygnatura obu form to (2,0), ponieważ obie formy mają taką samą sygnaturę operator F istnieje, możemy wykorzystać wynik algorytmu Lagrange'a do podania postaci F. Nasz warunek $Q(x) = Q_0(y)$ z $y = Fx$ na pewno będzie spełniony jeśli zajdzie

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 & = y_1 - \frac{1}{2}y_2 \\ x_1 & = y_2 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy to narzucając warunek, że pierwszy wyraz $Q(x)$ będzie równy drugiemu $Q_0(y)$, a drugi wyraz $Q(x)$ będzie równy pierwszemu wyrazowi $Q_0(y)$. Rozwiązując układ równań dostajemy y wyrażone przez x

$$\begin{cases} y_1 & = x_1 + 2x_2 \\ y_2 & = x_1 \end{cases}$$

Czyli nasz poszukiwany operator liniowy wyrażony jest przez macierz

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Oczywiście wybór był arbitralny i mogliśmy dokonać wielu innych, np. dając inne znaki lub przyrównując człony w "na drugi sposób", tzn

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 & = \frac{3}{2}y_2 \\ \frac{3}{2}x_1 & = y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 & = \frac{5}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \\ y_2 & = \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 \end{cases}$$

Zatem moglibyśmy dać też inną odpowiedź, że operator liniowy spełniający $Q(x) = Q_0(F(x))$ to

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

b) Zaczynamy od algorytmu Lagrange'a dopełnienia do kwadratu, dla pierwszej formy kwadratowej trzeba zastosować standardową sztuczkę zmiany zmiennych, by otrzymać wyraz kwadratowy

$$\begin{aligned} Q(x) = x_1x_2 - x_2x_3 + x_3x_1 &= \left\{ \begin{matrix} x_1 = t_1 + t_2 \\ x_2 = t_1 - t_2 \\ x_3 = t_3 \end{matrix} \right\} = t_1^2 - t_2^2 + 2t_2t_3 \\ &= t_1^2 - (t_2 - t_3)^2 + t_3^2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{2} - x_3 \right)^2 + x_3^2 \\ Q_0(y) = y_1^2 + 4y_2y_3 &= y_1^2 + (y_2 + y_3)^2 - (y_2 - y_3)^2 \end{aligned}$$

Obie formy mają sygnaturę (2,1), więc F istnieje i aby podać jego postać możemy zażądać by wyrazy z tymi samymi znakami zgadzały się

$$\begin{cases} \frac{x_1+x_2}{2} & = y_1 \\ x_3 & = y_2 + y_3 \\ \frac{x_1-x_2}{2} - x_3 & = y_2 - y_3 \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 & = \frac{x_1+x_2}{2} \\ y_2 & = \frac{x_1-x_2}{4} \\ y_3 & = x_3 - \frac{x_1-x_2}{4} \end{cases}$$

Co daje nam

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

c) Formę $Q(X)$ diagonalizujemy standardowo, rozpisujemy formę dla ogólnej macierzy

$$Q(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}) = x_1x_4 - x_2x_3 = \frac{1}{4}(x_1 + x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{4}(x_2 - x_3)^2$$

Sygnatura tej formy to (2,2). Sygnatura drugiej formy nie jest potrzebna do ustalenia istnienia F, zauważmy, że forma jest zdefiniowana przez z całkę z kwadratu, wyraz pod całką jest nieujemny, więc mamy $Q_0(v) \geq 0$, możemy być pewni zatem, że sygnatura tej formy (p,q) spełnia $q = 0$, czyli jest postaci (p,0). Możemy z tego wywnioskować, że taki F nie istnieje, gdyby istniał to $Q(x) = Q_0(F(x))$, ale sygnatura Q to (2,2), istnieje x, taki że $Q(x) < 0$, ale jednocześnie $Q_0(F(x)) \geq 0$, mamy sprzeczność. Jeśli ktoś nie wierzy w powyższy argument, to można uczciwie zdiagonalizować formę $Q_0(v)$, wybierając bazę jednomianów $\{1, t, t^2, t^3\}$ i zapisując w tej bazie wielomian v, by znaleźć postać formy Q_0 we współrzędnych

$$\begin{aligned} Q_0(v) &= \int_0^1 (x_1 + x_2t + x_3t^2 + x_4t^3)^2 dt = \dots \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \right)^2 + \frac{1}{12}\left(x_2 + x_3 + \frac{9}{10}x_4 \right)^2 + \frac{1}{180}\left(x_3 + \frac{3}{2}x_4 \right)^2 + \frac{1}{2800}x_4^2 \end{aligned}$$

Sygnatura to (4,0) i teraz ewidentnie widać, że nie możemy znaleźć F, które powiązałoby tą formę z $Q(x)$, które ma sygnaturę (2,2)

d) Formę $Q(X)$ diagonalizujemy jak w poprzednim podpunkcie, dowolna macierz może być zapisana we współrzędnych $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

$$Q(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}) = x_1x_4 - x_2x_3 = \frac{1}{4}(x_1 + x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{4}(x_2 - x_3)^2$$

Sygnatura tej formy to (2,2). W tej samej bazie możemy rozpisać formę $Q_0(X)$, użyjemy y jako oznaczenia współrzędnych by odróżnić je od tych w $Q(X)$, mamy $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$ i

$$\begin{aligned} Q_0(Y) &= \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_2 & y_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_2 & y_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 + 2y_3 & y_2 + 2y_4 \\ 2y_1 + 3y_3 & 2y_2 + 3y_4 \end{pmatrix}\right) \\ &= y_1^2 + 4y_1y_3 + 3y_3^2 + y_2^2 + 4y_2y_4 + 3y_4^2 = (y_1 + 2y_3)^2 - y_3^2 + (y_2 + 2y_4)^2 - y_4^2 \end{aligned}$$

Sygnatura to (2,2), możemy więc znaleźć F. Żeby mieć $Y = F(X)$ wystarczy zażądać następujących równości (tak, by wyrazy z tymi samymi znakami się zgadzały), wtedy ewidentnie $Q(X) = Q(Y)$ i związek między współrzędnymi jest liniowy

$$\begin{cases} \frac{x_1+x_4}{2} &= y_1 + 2y_3 \\ \frac{x_2-x_3}{2} &= y_2 + 2y_4 \\ \frac{x_1-x_4}{2} &= y_3 \\ \frac{x_2+x_3}{2} &= y_4 \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 &= \frac{-x_1+3x_4}{2} \\ y_2 &= \frac{-x_2-3x_3}{2} \\ y_3 &= \frac{x_1-x_4}{2} \\ y_4 &= \frac{x_2+x_3}{2} \end{cases}$$

Nasz F jest zatem dany wzorem

$$F : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{-x_1+3x_4}{2} & \frac{-x_2-3x_3}{2} \\ \frac{x_1-x_4}{2} & \frac{x_2+x_3}{2} \end{pmatrix}$$

e) Dotychczas rozważaliśmy przypadki, w których $\mathrm{rk}(Q) = \mathrm{rk}(Q_0)$, co jeśli tak nie jest? W tym podpunkcie mamy sygnaturę $Q(x)$ równą (1,1) i sygnaturę $Q_0(x)$ równą (2,1). Nie są one sobie równe, ale można zgadnąć F, z definicji będzie to odwzorowanie z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Chcemy, by zachodziło

$$x_1^2 - x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

Możemy przykładowo zażądać, by $x_1 = y_1$, $x_2 = y_3$,a $y_2 = 0$, wtedy

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Sprawdźmy, czy to działa

$$Q(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = x_1^2 - x_2^2$$

$$Q_0(F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix})) = Q_0(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}) = x_1^2 + 0^2 - x_2^2$$

Faktycznie, taki F spełnia wymaganą równość.

Ogólny schemat postępowania dla takich zadań powinien być już jasny, jeśli sygnatury są równe możemy być pewni, że F istnieje, a algorytm Lagrange'a pozwala nam znaleźć przykład (podpunkty a), b), d)). Jeśli sygnatury się różnią, ale rzędy są takie same to F nie może istnieć (podpunkt c)). Jeśli rzędy są różne, F może istnieć nawet dla różnych sygnatur (podpunkt e)), nietrudno się przekonać, że może istnieć tylko jeśli $p \leq p_0$ i $q \leq q_0$, gdzie (p,q) to sygnatura $Q(x)$, a (p_0, q_0) to sygnatura $Q_0(x)$.

Zad. 8.2

W zależności od wartości parametrów $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ znajdź sygnaturę formy

$$\mathbb{R}^3 \ni x \mapsto Q(x) = a_1x_2x_3 + a_2x_1x_3 + a_3x_1x_2$$

Rozw. 8.2

Pomysł na to zadanie jest następujący: postać formy kwadratowej zależy od tego czy nasze parametry są równe zero czy nie, przeanalizujemy oddzielnie przypadki gdy wszystkie, dwa, jeden lub zero z nich jest równe zero. Użyjemy do tego algorytmu Lagrange'a, kryterium Sylvestera tu zawodzi, bo macierz tej formy kwadratowej na diagonali ma same 0 i pierwszy minor jest przez to zerowy, co nie pozwala użyć kryterium.

Przypadek 1: $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$
Mamy $Q(x) = 0$ i sygnaturę równą (0,0)

Przypadek 2: $a_1 \neq 0, a_2 = 0, a_3 = 0$ (przypadki z a_2 i a_3 - jedynymi niezerowymi są analogiczne i mają te same wyniki)
Mamy $Q(x) = a_1x_2x_3$, możemy użyć wzoru skróconego mnożenia i otrzymać

$$Q(x) = a_1x_2x_3 = a_1\left(\frac{1}{4}(x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_2 - x_3)^2\right)$$

Jeśli a_1 jest dodatnie mamy $+$ i $-$, jeśli a_1 jest ujemne mamy $-$ i $+$, więc niezależnie od znaku sygnatura to (1,1)

Przypadek 3: $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 = 0$ (przypadki z a_1 i a_2 - jedynym zerowym są analogiczne i mają te same wyniki)
Mamy $Q(x) = a_1x_2x_3 + a_2x_1x_3$, można łatwo pozbyć się zależności od parametrów, ponieważ są niezerowe możemy wprowadzić nowe współrzędne

$$\begin{cases} y_1 = a_2x_1 \\ y_2 = a_1x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

Wtedy

$$a_1x_2x_3 + a_2x_1x_3 = y_2y_3 + y_1y_3 = \left\{\begin{matrix} y_1 = t_1 \\ y_2 = t_2 + t_3 \\ y_3 = t_2 - t_3 \end{matrix}\right\} = t_2^2 - t_3^2 + t_1t_2 - t_1t_3$$
$$= (t_2 + \frac{1}{2}t_1)^2 - \frac{1}{4}t_1^2 - (t_3 + \frac{1}{2}t_1)^2 + \frac{1}{4}t_1^2 = (t_2 + \frac{1}{2}t_1)^2 - (t_3 + \frac{1}{2}t_1)^2$$

I otrzymujemy sygnaturę (1,1) niezależnie od znaków parametrów

Przypadek 4: $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$
Chcielibyśmy znowu zmienić zmienne, by uprościć problem, niestety nie jest możliwe "wchłonięcie" parametrów do zmiennych i otrzymanie formy kwadratowej niezależnej od a_1, a_2, a_3. Możemy jednak wyciągnąć je przed nawias, jeśli podstawimy

$$\begin{cases} y_1 = x_1/a_1 \\ y_2 = x_2/a_2 \\ y_3 = x_3/a_3 \end{cases}$$

Otrzymamy

$$a_1x_2x_3 + a_2x_1x_3 + a_3x_1x_2 = a_1a_2a_3(y_2y_3 + y_1y_3 + y_1y_2) = \left\{\begin{matrix} y_1 = t_1 \\ y_2 = t_2 + t_3 \\ y_3 = t_2 - t_3 \end{matrix}\right\}$$
$$= a_1a_2a_3(t_2^2 - t_3^2 + t_1t_2 - t_1t_3 + t_1t_2 + t_1t_3)$$
$$= a_1a_2a_3((t_2 + t_1)^2 - t_1^2 - t_3^2)$$

Sygnatura zatem zależy od znaku $a_1a_2a_3$, jeśli $a_1a_2a_3 > 0$ sygnatura wynosi (1,2), a jeśli $a_1a_2a_3 < 0$ to sygnatura jest równa (2,1)

9 Iloczyn skalarny, wektory ortogonalne/ortonormalne, dopełnienie ortogonalne

Definicja 21. *Niech V będzie przestrzenią wektorową. Iloczynem skalarnym w V nazywamy odwzorowanie*

$$\begin{aligned}\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times V &\to \mathbb{K}\\ v, w &\mapsto \langle v|w\rangle\end{aligned}$$

(u nas $\mathbb{K}$ będzie równe $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{R}$) takie, że
1) $\langle v|w\rangle$ jest liniowe w drugim argumencie, tzn $\langle v|\lambda w + \lambda' w'\rangle = \lambda \langle v|w\rangle + \lambda' \langle v|w'\rangle$
2) $\langle v|w\rangle$ jest antyliniowe w pierwszym argumencie, tzn $\langle \lambda v + \lambda' v'|w\rangle = \overline{\lambda} \langle v|w\rangle + \overline{\lambda'} \langle v'|w\rangle$
3) $\langle v|w\rangle = \overline{\langle w|v\rangle}$ (iloczyn skalarny jest hermitowski)
4) $\forall_{V \ni v \neq 0} \langle v|v\rangle > 0$

Przykład 22.

- *$V = \mathbb{R}^n$, mamy iloczyn skalarny zwany standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$*

$$\langle x|y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_n y_n$$

- *$V = \mathbb{C}^n$, mamy iloczyn skalarny zwany standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{C}^n$*

$$\langle x|y\rangle = \overline{x_1} y_1 + \overline{x_2} y_2 + \dots \overline{x_n} y_n$$

- *$V = \mathbb{R}_2[\cdot]$, mamy iloczyn skalarny*

$$\langle v|w\rangle = v(0)w(0) + v(1)w(1) + v(2)w(2)$$

- *$V = C([-1, 1])$ (ciągłe funkcje na odcinku [-1,1]), mamy iloczyn skalarny (pojawiający się też w mechanice kwantowej, jest on tam standardowym iloczynem skalarnym na przestrzeni funkcji całkowalnych w kwadracie)*

$$\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} \overline{f(x)} g(x) dx$$

Zad. 9.1

Dana jest macierz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Definiujemy odwzorowanie $\langle\cdot|\cdot\rangle_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dane przez

$$\langle x|y\rangle_A = \langle x|Ay\rangle$$

Udowodnij, że $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ jest iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^3$, jeśli $\langle\cdot|\cdot\rangle$ to standardowy iloczyn skalarny. Co możemy powiedzieć o wektorach własnych macierzy A?

Rozw. 9.1

Sprawdźmy czy nasze odwzorowanie spełnia własności iloczynu skalarnego:

1) $\langle v|\lambda w + \lambda' w'\rangle_A \overset{?}{=} \lambda \langle v|w\rangle_A + \lambda' \langle v|w'\rangle_A$

Oznaczenia LHS (Left Hand Side) - lewa strona równania, RHS (Right Hand Side) - prawa strona równania. Użyjemy tego, że $\langle v|w\rangle$ jest iloczynem skalarnym, a co za tym idzie, jest liniowy w drugim argumencie

$$LHS = \left\langle v\middle|\lambda w + \lambda' w'\right\rangle_A = \left\langle v\middle|A(\lambda w + \lambda' w')\right\rangle = \left\langle v\middle|\lambda Aw + \lambda' Aw'\right\rangle = \lambda \langle v|Aw\rangle + \lambda' \left\langle v\middle|Aw'\right\rangle = RHS$$

2) $\langle \lambda v + \lambda' v'|w\rangle_A \overset{?}{=} \lambda \langle v|w\rangle_A + \lambda' \langle v'|w\rangle_A$

Podobnie jak w 1) używamy tego, że $\langle v|w\rangle$ jest liniowy w pierwszym argumencie (pracujemy z liczbami rzeczywistymi, więc sprzężenie zespolone nie pojawia się)

$$LHS = \left\langle \lambda v + \lambda' v'\middle|w\right\rangle_A = \left\langle \lambda v + \lambda' v'\middle|Aw\right\rangle = \lambda \langle v|Aw\rangle + \lambda' \left\langle v'\middle|Aw\right\rangle = RHS$$

3) $\langle v|w\rangle_A \overset{?}{=} \overline{\langle w|v\rangle_A}$

Zauważmy, że dla standardowego iloczynu skalarnego mamy

$$\langle v|w\rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v^T w$$

W związku z tym $LHS = v^T Aw$, a $RHS = w^T Av$. Żeby zobaczyć, że te dwa wyrażenia są równe, zastosujemy sztuczkę, iloczyn skalarny daje nam liczbę, więc jeśli zadziałamy na LHS transpozycją to nie zmieni się ona (można tu myśleć o liczbie jak o macierzy 1×1). Stosując wzór na transpozycję iloczynu ($(AB)^T = B^T A^T$) i fakt, że nasza macierz jest symetryczna ($A^T = A$) dostajemy

$$LHS = v^T Aw = (v^T Aw)^T = w^T A^T v = w^T Av = RHS$$

4) $\forall_{V \ni x \neq 0} \langle v|v\rangle_A > 0$

Ponownie powołamy się na wzór $\langle v|v\rangle_A = v^T Av$, rozpoznajemy w tym formę kwadratową, której macierzą jest A, możemy wykorzystać naszą wiedzę o sygnaturze formy kwadratowej by sprawdzić dodatniość iloczynu skalarnego. Minory macierzy są równe

$$D_1 = 2$$
$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3$$
$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

Kryterium Sylvestera mówi nam, że istnieje baza diagonalizująca tę formę w której na diagonali są $D_1 = 2 > 0$, $D_2/D_1 = 3/2 > 0$, $D_3/D_2 = 4/3 > 0$. Sygnatura jest równa zatem (3,0), a więc forma kwadratowa jest dodatnia i dla niezerowych wektorów v mamy $\langle v|v\rangle > 0$

W celach edukacyjnych przyjrzyjmy się jeszcze wektorom własnym macierzy A, możemy sobie przypomnieć procedurę ich znajdywania. Najpierw szukamy zer wielomianu charakterystycznego (wartości własnych), a potem badamy jądra $A - \lambda \mathbb{1}$

$$\omega_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = (2-\lambda)^3 + 2 - 3(2-\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = (\lambda - 1)^2(4 - \lambda)$$

Mamy wartości własne $\lambda = 1$ i $\lambda = 4$

$$\ker(A - \mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=v_2} \rangle$$

$$\ker(A - 4\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_3} \rangle$$

Możemy zaobserwować tu ciekawą rzecz, mamy 3 wektory własne v_1, v_2, v_3, które tworzą bazę i dodatkowo mają własność $\left\langle v_i \middle| v_j \right\rangle = 0$ dla $i \neq j$, o takich wektorach mówimy, że są ortogonalne (po fizycznemu prostopadłe, definicja niżej). Co więcej ponieważ to wektory własne, mamy $\left\langle v_i \middle| v_j \right\rangle_A = \left\langle v_i \middle| A v_j \right\rangle = \left\langle v_i \middle| \lambda_j v_j \right\rangle = 0$, więc są to też wektory ortogonalne dla iloczynu skalarnego $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$.

Teraz wprowadzimy sobie trochę definicji motywowanych przez poprzednie zadanie.

Definicja 23. *Niech V będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym, jeśli $\langle v|w\rangle = 0$, mówimy że wektory v, w są ortogonalne*

Czwarta własność iloczynu skalarnego pozwala nam na następującą definicję

Definicja 24. *Normą wektora $v \in V$ należącego do przestrzeni wektorowej z iloczynem skalarnym nazywamy wielkość $\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$ (jest to dobrze zdefiniowane, bo $\langle v|v\rangle > 0$). Dodatkowo jeśli norma wektora jest równa 1 ($\|v\| = 1$), mówimy że wektor jest znormalizowany (alternatywnie nazywamy go unormowanym, jednostkowym lub wersorem)*

Definicja 25. *Układem ortogonalnym nazywamy zestaw wektorów $\{v_1, v_2 \dots v_n\}$ taki, że dla $i \neq j$ zachodzi $\left\langle v_i \middle| v_j \right\rangle = 0$. Jeśli dodatkowo mamy $\langle v_i | v_i \rangle = 1$ (wektory są znormalizowane), mówimy że jest to układ ortonormalny (możemy wtedy napisać $\left\langle v_i \middle| v_j \right\rangle = \delta_{i,j}$, gdzie $\delta_{i,j}$ to delta Kroneckera, równa 1 jeśli indeksy są takie same i 0 jeśli są różne). Jeśli ten zestaw wektorów jest bazą przestrzeni wektorowej (lub pewnej podprzestrzeni) to nazywamy go bazą ortogonalną (lub ortonormalną jeśli wektory są unormowane) ten (pod)przestrzeni wektorowej*

Definicja 26. *Dopełnieniem ortogonalnym podprzestrzeni $W \subset V$ nazywamy podprzestrzeń $W^\perp = \{v \in V | \forall_{w \in W} \langle w|v\rangle = 0\}$. Jest to podprzestrzeń zawierająca wszystkie wektory ortogonalne do podprzestrzeni W*

Zad. 9.2

Niech $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni wektorowej V, a $W = \langle e_1 + e_2 + e_3 + 2e_4 + 3e_5, e_1 + e_2 + e_3 - e_4 \rangle$ podprzestrzenią V. Znajdź dopełnienie ortogonalne W (tzn $W^\perp$), oraz bazy ortonormalne W i $W^\perp$

Rozw. 9.2

Możemy wprowadzić sobie zapis kolumnowy, by uprościć zadanie

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5$$

Wiemy, że nasza baza jest bazą ortonormalną ($\left\langle e_i \middle| e_j \right\rangle = \delta_{i,j}$), więc iloczyn skalarny w tym zapisie to standardowy iloczyn skalarny

$$\langle x|y\rangle = \langle x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 | y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 + y_4e_4 + y_5e_5\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5$$

Korzystając z tego zapisu możemy wyrazić W jako

$$W = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=w_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=w_2} \rangle$$

Dopełnienie ortogonalne można znaleźć przez rachunek z definicji. Jest to zbiór wektorów ortogonalnych do wszystkich wektorów z W, co jest równoważne temu, że są ortogonalne do bazy W (z liniowości iloczynu skalarnego). Czyli jeśli $x \in W^\perp$ spełnione są równania

$$\begin{cases} \langle x|w_1\rangle = 0 \\ \langle x|w_2\rangle = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[w_2 \to w_2]{w_1 \to w_1 - w_2} \begin{cases} 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

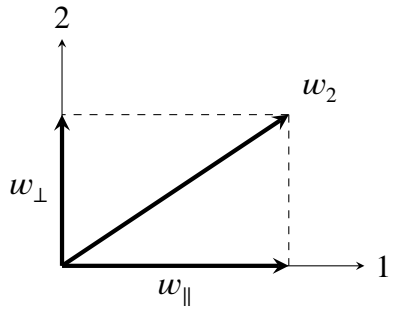
$$\rightarrow \begin{cases} x_4 = -x_5 \\ x_1 = -x_2 - x_3 - x_5 \end{cases}$$

Czyli dowolny element $W^\perp$ ma postać

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wnioskujemy, że $W^\perp$ to podprzestrzeń rozpięta na tych trzech wektorach, oznaczamy je w_3, w_4, w_5 do dalszych obliczeń

$$W^\perp = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=w_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=w_4}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=w_5} \rangle$$



Możemy dokonać też obserwacji, że wektory w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 są liniowo niezależne i tworzą bazę V, jest to przykładowe potwierdzenie faktu, że $V = W \oplus W^\perp$.

Mamy bazy W i $W^\perp$, zastanówmy się jak możemy znaleźć bazy ortonormalne tych podprzestrzeni. Baza W ma dwa elementy w_1, w_2, więc baza ortogonalna też będzie złożona z pewnych dwóch wektorów f_1, f_2, na pierwszy z nich wybierzmy w_1, tzn $f_1 = w_1$. Żeby znaleźć f_2 posłużymy się następującym obrazkiem Wektor w_2 ma dwie składowe $w_\parallel$ równoległą do f_1 i $w_\perp$ prostopadłą do f_1 (i równoległą do f_2). Naszym kandydatem na f_2 - wektor prostopadły do f_1 i należący do podprzestrzeni W będzie składowa $w_\perp$. Jak znaleźć łatwo $w_\perp$? Wykorzystamy do tego iloczyn skalarny, wiemy że wektor w_2 można zapisać w bazie f_1, f_2 z pewnymi stałymi

$$w_2 = \alpha f_1 + \beta f_2$$

Jeśli obliczymy teraz iloczyn skalarny w_2 z f_1 i f_2 dostaniemy równania (pamiętaj, że f_1, f_2 są ortogonalne)

$$\langle f_1 | w_2 \rangle = \alpha \langle f_1 | f_1 \rangle + \beta \langle f_1 | f_2 \rangle = \alpha \| f_1 \|^2$$
$$\langle f_2 | w_2 \rangle = \alpha \langle f_2 | f_1 \rangle + \beta \langle f_2 | f_2 \rangle = \beta \| f_2 \|^2$$

Czyli współczynniki rozkładu są dane przez iloczyn skalarny

$$w_2 = \underbrace{\frac{\langle f_1 | w_2 \rangle}{\| f_1 \|^2} f_1}_{=w_\parallel} + \underbrace{\frac{\langle f_2 | w_2 \rangle}{\| f_2 \|^2} f_2}_{w_\perp}$$

Mamy zatem nasz szukany wektor z W ortogonalny do f_1

$$f_2 = w_\perp = w_2 - \underbrace{\frac{\langle f_1 | w_2 \rangle}{\| f_1 \|^2} f_1}_{\substack{\text{składowa } w_2 \\ \text{równoległa do } f_1}}$$

Intuicja jest następująca, wzięliśmy pierwszy element bazy w_1, następnie by dostać bazę ortogonalną wycięliśmy składową w_2 równoległą do w_1 otrzymując wektor prostopadły do w_1. Rachunki na naszych

konkretnych wektorach dają

$$f_1 = w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\|f_1\|^2 = \langle f_1 | f_1 \rangle = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 16$$

$$\langle f_1 | w_2 \rangle = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2 * (-1) + 3 * 0 = 1$$

$$f_2 = w_\perp = w_2 - \frac{\langle f_1 | w_2 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{16} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Można sprawdzić, że faktycznie $\langle f_1 | f_2 \rangle = 0$. Jest to baza ortogonalna W, bo otrzymaliśmy ją liniową i odwracalną transformacją poprzedniej bazy. Żeby dostać bazę ortonormalną $\{\hat{f}_1, \hat{f}_2\}$musimy podzielić wektory przez ich normy

$$\|f_1\|^2 = \langle f_1 | f_1 \rangle = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 16$$

$$\|f_2\|^2 = \langle f_2 | f_2 \rangle = \left(\frac{3}{16}\right)^2 (5^2 + 5^2 + 5^2 + (-6)^2 + (-1)^2) = \left(\frac{3}{16}\right)^2 112$$

$$\hat{f}_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \hat{f}_2 = \frac{1}{\|f_2\|} f_2 = \frac{1}{\sqrt{112}} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sytuacja z bazą ortonormalną $W^\perp$ jest analogiczna, najpierw szukamy bazy ortogonalnej, w tym celu na pierwszy jej element g_1 wybieramy sobie w_3, na jej drugi element g_2 wybieramy składową w_4 prostopadłą do w_3

$$g_1 = w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_2 = w_\perp = w_4 - \underbrace{\frac{\langle g_1 | w_4 \rangle}{\|g_1\|^2} g_1}_{\substack{\text{składowa } w_4 \\ \text{równoległa do } g_1}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nasza podprzestrzeń jest trójwymiarowa, więc potrzebujemy jeszcze trzeciego wektora bazy ortogonalnej g_3, który będzie prostopadły do g_1 i g_2 jednocześnie. Sztuczka jest podobna jak poprzednio, bierzemy w_5

i wycinamy z niego składowe równoległe do g_1 i g_2 tak, by został wektor prostopadły do nich, ponieważ g_1 i g_2 pochodzą od w_3 i w_4 możemy być pewni że nie dostaniemy wektora zerowego.

$$g_3 = \overbrace{w_5 - \underbrace{\frac{\langle g_1 | w_5 \rangle}{\|g_1\|^2} g_1}_{\substack{\text{składowa } w_5 \\ \text{równoległa do } g_1}} - \underbrace{\frac{\langle g_2 | w_5 \rangle}{\|g_2\|^2} g_2}_{\substack{\text{składowa } w_5 \\ \text{równoległa do } g_2}}}^{\text{wektor prostopadły do } g_1 \text{ i } g_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1/2}{3/2} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Po znormalizowaniu tych wektorów dostajemy bazę ortonormalną

$$\hat{g}_1 = \frac{1}{\|g_1\|} g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{g}_2 \qquad = \frac{1}{\|g_2\|} g_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{g}_3 = \frac{1}{\|g_3\|} g_3 = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

10 Ortogonalizacja Grama-Schmidta, wielomiany Laguerre'a, odległość punktu od prostej

Na początek sformalizujmy algorytm, który pojawił się na poprzednich zajęciach. Nietrudno się przekonać, że uogólnia się on do układu n wektorów

Twierdzenie 27. *Ortogonalizacja Grama-Schmidta Niech $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ będzie bazą przestrzeni (podprzestrzeni) V, wtedy wektory $f_1, f_2, \dots f_n$ dane poniższą rekurencją są bazą ortogonalną V*

$$
\begin{aligned}
f_1 &= e_1 \\
f_2 &= e_2 - \frac{\langle f_1 | e_2 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 \\
f_3 &= e_3 - \frac{\langle f_1 | e_3 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 - \frac{\langle f_2 | e_3 \rangle}{\|f_2\|^2} f_2 \\
&\vdots \\
f_k &= e_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle f_j | e_k \rangle}{\|f_j\|^2} f_j \\
&\vdots \\
f_n &= e_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle f_j | e_n \rangle}{\|f_j\|^2} f_j
\end{aligned}
$$

Możemy zastosować ten algorytm do znalezienia bazy ortogonalnej jak w zadaniu z poprzednich ćwiczeń, aby jednak uniknąć robienia żmudnych (choć zapewne bardzo kształcących) zadań, przyjrzymy się bardziej "fizycznym" problemom

Zad. 10.1

Znajdź bazę ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}_3[\cdot]$ z iloczynem skalarnym $\langle v|w\rangle = \int_0^\infty v(x)w(x)e^{-x}dx$

Rozw. 10.1

Algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta wymaga od nas liczenia iloczynów skalarnych, warto więc policzyć najpierw następującą całkę

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

skorzystamy tu z całkowania przez części

$$I_n = \int_0^\infty \underbrace{x^n}_{f(x)} \underbrace{e^{-x}}_{g'(x)} dx = \underbrace{x^n}_{f(x)} \underbrace{-e^{-x}}_{g(x)} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \underbrace{nx^{n-1}}_{f'(x)} \underbrace{-e^{-x}}_{g(x)} dx = \begin{cases} 0 + nI_{n-1} \text{ dla } n \neq 0 \\ 1 \text{ dla } n = 0 \end{cases}$$

Mając wzór rekurencyjny nietrudno się przekonać, że $I_n = n!$ (choćby rozpisując pierwsze kilka wyrazów: $I_1 = 1, I_2 = 1 \cdot 2, I_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$), uzbrojeni w tę wiedzę możemy zacząć procedurę ortogonalizacji bazy, zaczynamy jak to zwykle od bazy standardowej $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3$

$$f_1 = e_1 = 1$$

$$\begin{aligned}
\|f_1\|^2 &= \int_0^\infty e^{-x} dx = I_0 = 1 \\
\langle f_1 | e_2 \rangle &= \int_0^\infty x^1 e^{-x} dx = I_1 = 1 \\
f_2 &= e_2 - \frac{\langle f_1 | e_2 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 = x - \frac{1}{1} 1 = x - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|f_2\|^2 &= \int_0^\infty (x-1)^2 e^{-x} dx = I_2 - 2I_1 + I_0 = 1 \\
\langle f_1 | e_3 \rangle &= \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = I_2 = 2 \\
\langle f_2 | e_3 \rangle &= \int_0^\infty (x-1) x^2 e^{-x} dx = I_3 - I_2 = 4 \\
f_3 &= e_3 - \frac{\langle f_1 | e_3 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 - \frac{\langle f_2 | e_3 \rangle}{\|f_2\|^2} f_2 \\
&= x^2 - \frac{2}{1} 1 - \frac{4}{1}(x-1) = x^2 - 4x + 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|f_3\|^2 &= \int_0^\infty (x^2 - 4x + 2)^2 e^{-x} dx = I_4 - 8I_3 + 20I_2 - 16I_1 + 4I_0 = 4 \\
\langle f_1 | e_4 \rangle &= \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = I_3 = 6 \\
\langle f_2 | e_4 \rangle &= \int_0^\infty (x-1) x^3 e^{-x} dx = I_4 - I_3 = 18 \\
\langle f_3 | e_4 \rangle &= \int_0^\infty (x^2 - 4x + 2) x^3 e^{-x} dx = I_5 - 4I_4 + 2I_3 = 36 \\
f_4 &= e_4 - \frac{\langle f_1 | e_4 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 - \frac{\langle f_2 | e_4 \rangle}{\|f_2\|^2} f_2 - \frac{\langle f_3 | e_4 \rangle}{\|f_3\|^2} f_3 \\
&= x^3 - \frac{6}{1} 1 - \frac{18}{1}(x-1) - \frac{36}{4}(x^2 - 4x + 2) = x^3 - 9x^2 + 18x - 6
\end{aligned}$$

Wielomiany, które uzyskaliśmy to pierwsze 4 wielomiany Laguerre'a, pojawiają się one naturalnie w mechanice kwantowej podczas rozwiązywania atomu wodoru (oczywiście powyższą procedurę można ciągnąć dalej i dostać kolejne wielomiany Laguerre'a, ale pierwsze cztery nam wystarczą na razie)

W nazwie przedmiotu znajduje się słowo "geometria" i nadszedł czas na spełnienie tej długo wyczekiwanej obietnicy. Rozpoczynamy temat szukania odległości między punktami, prostymi i płaszczyznami od zadania rozgrzewkowego.

Zad. 10.2

Znajdź odległość punktu $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ od prostej L przechodzącej przez punkty $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Rozw. 10.2

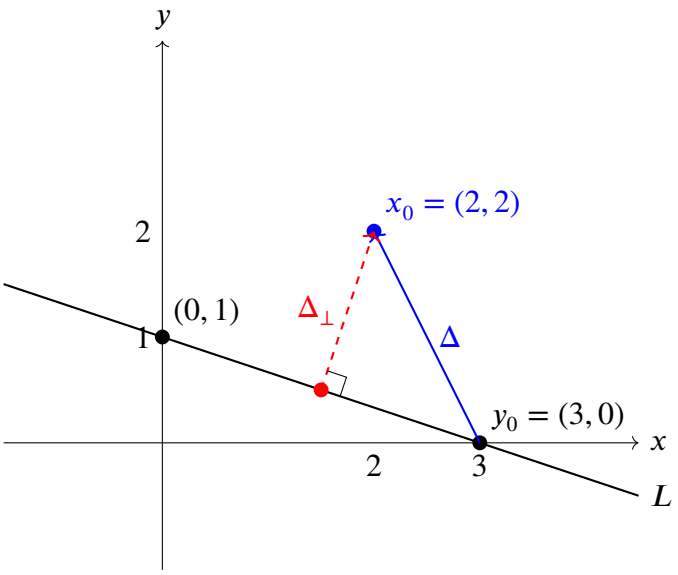


Figure 1: Rysunek do zadania 10.2

Zastanówmy się nad tym jak opisywać proste, sposób pierwszy to przez punkty, jeśli mamy dane dwa punkty jak w treści zadania to jednoznacznie nam to określa naszą prostą. Sposób drugi to przez układ równań, w naszym wypadku prosta jest opisana równaniem $x + 3y = 3$. Wreszcie sposób trzeci, który będzie najbardziej przydatny w szukaniu odległości punktu od prostej to opis parametryczny, dowolny punkt prostej L można zapisać jako

$$L \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3y \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{y_0} + y \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v}$$

Innymi słowy, prosta L to podprzestrzeń rozpięta przez wektor v, która została przesunięta o wektor y_0. Interpretacja tych wektorów jest następująca: y_0 to dowolny wektor należący do prostej, a v to wektor dający nam kierunek prostej.

$$L = y_0 + \langle v \rangle$$

Niech $\Delta = x_0 - y_0$, jest to pewien wektor łączący punkt x_0 z prostą L. Fakt, który wykorzystamy jest taki, że najkrótszy wektor łączący punkt x_0 z prostą L $\Delta_\perp$ tworzy z nią kąt prosty, czyli jest ortogonalny do v. Wiemy, że nasz wektor Δ jest sumą $\Delta_\perp$ i wektora v z pewnym współczynnikiem $s \in \mathbb{R}$

$$\Delta = \Delta_\perp + sv$$

Jeśli obliczymy iloczyn skalarny $\langle v|\Delta\rangle = s\|v\|^2$ otrzymamy ten nieznany współczynnik i możemy znaleźć składową $\Delta_\perp$

$$\Delta_\perp = \Delta - \frac{\langle v|\Delta\rangle}{\|v\|^2} v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{10} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Powyższy wzór to nic innego jak ortogonalizacja Grama-Schmidta układu wektorów v i Δ, w ten sposób znajdujemy składową Δ prostopadłą do v (czyli do prostej), jest to najkrótszy wektor łączący prostą z punktem i jego długość to nasz wynik

$$d = \|\Delta_\perp\| = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

11 Odległość pomiędzy podprzestrzeniami afinicznymi przestrzeni euklidesowej, macierz Grama

Będziemy kontynuować materiał z poprzednich ćwiczeń, ale najpierw dwie definicje, by oswoić się z bardziej technicznym słownictwem

Definicja 28. *Przestrzenią euklidesową wymiaru n będziemy nazywać $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym*

Definicja 29. *Podprzestrzenią afiniczną przestrzeni wektorowej V nazywamy zbiór postaci*

$$x_0 + W = \{x_0 + v \Big| v \in W\}$$

gdzie x_0 należy do V, a W jest jej podprzestrzenią wektorową. Przykładami podprzestrzeni afinicznych są punkty, proste, płaszczyzny

Zad. 11.1

Wyznaczyć odległość pomiędzy danymi podprzestrzeniami afinicznymi przestrzeni euklidesowej wymiaru n, dla
a) punktu y_0 i płaszczyzny Π, gdzie

$$y_0 = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \Pi = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \Big| \begin{smallmatrix} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ x_2+2x_3+3x_4=5 \end{smallmatrix} \right\}$$

b) prostej L i płaszczyzny Π, gdzie

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \Big| \frac{x_1-1}{1} = \frac{x_2-1}{-1} = \frac{x_3-1}{2} = \frac{x_4+3}{4} \right\}$$
$$\Pi = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \Big| \begin{smallmatrix} x_1+2x_2-x_4=0 \\ 2x_2+x_3+2x_4=2 \end{smallmatrix} \right\}$$

c) prostej L_1 i prostej L_2, gdzie

$$L_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \Big| x_1 + 3x_3 = 1, x_2 = 0 \right\}$$
$$L_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \Big| \frac{x_1+1}{3} = \frac{x_2+1}{2} = \frac{x_3-1}{2} \right\}$$

Rozw. 11.1

a) Najpierw przejdźmy do opisu parametrycznego płaszczyzny Π, wyznaczmy x_1 i x_2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases} \xrightarrow[w_2 \to w_2]{w_1 \to w_1 - 2w_2} \begin{cases} x_1 - x_3 - 6x_4 = -9 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = -9 + x_3 + 6x_4 \\ x_2 = 5 - 2x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

Każdy element Π można zapisać jako

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Płaszczyzna Π ma zatem opis parametryczny

$$\Pi = \underbrace{\begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=y_1} + \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_2} \right\rangle = y_1 + W$$

gdzie W to podprzestrzeń rozpięta przez wektory v_1, v_2. O y_1 można myśleć jako o rozwiązaniu szczególnym równania niejednorodnego (RSRN) tzn. układu równań z liczbami po prawej stronie, a o podprzestrzeni W jako o zbiorze rozwiązań ogólnych równania jednorodnego (RORJ) tzn. układu równań z zerami po prawej stronie. Ogólnie rozwiązanie naszego układu równań, tak zwane rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego to zbiór y_1 plus element W, czasem można się spotkać z (symbolicznym) zapisem RORN = RSRN + RORJ. Taka parametryzacja pozwoli na proste rachunki w dalszej części zadania, można próbować innych parametryzacji (np. wyznaczając x_1 i x_4, ale dałoby to bardziej problematyczne rachunki w dalszej części zadania). Dalsze postępowanie jest analogiczne do problemu z zeszłego tygodnia, definiujemy wektor łączący punkt y_0 z płaszczyzną Π, nazwijmy go

$$\Delta = y_0 - y_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Wiemy, że ma on składową leżącą w płaszczyźnie (należącą do podprzestrzeni W tzn. będącą kombinacją liniową v_1 i v_2), oraz składową prostopadłą do płaszczyzny $\Delta_\perp$, która jest najkrótszym wektorem łączącym punkt y_0 z płaszczyzną, mamy

$$\Delta = \Delta_\perp + s_1 v_1 + s_2 v_2$$

dla pewnych $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Aby znaleźć $\Delta_\perp$ posłużymy się schematem rozumowania z ortogonalizacji Grama-Schmidta, najpierw zortogonalizujmy układ $\{v_1, v_2\}$.

$$e_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle e_1 | v_2 \rangle = 12$$

$$\|e_1\|^2 = 6$$

$$e_2 = v_2 - \frac{\langle e_1 | v_2 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{12}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\{e_1, e_2\}$ to baza ortogonalna podprzestrzeni W. Możemy teraz znaleźć składową Δ prostopadłą do podprzestrzeni W

$$\Delta_\perp = \Delta - \frac{\langle e_1|\Delta\rangle}{\|e_1\|^2}e_1 - \frac{\langle e_2|\Delta\rangle}{\|e_2\|^2}e_2 = \begin{pmatrix}20\\10\\-12\\-4\end{pmatrix} - \frac{-12}{6}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{110}{22}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\-9\end{pmatrix}$$

Odległość y_0 od płaszczyzny Π wynosi zatem $\|\Delta_\perp\| = \sqrt{2^2+1^2+0^2+(-9)^2} = \sqrt{86}$

b) Ten podpunkt można zrobić korzystając z dowolnej z metod już poznanych, najpierw przechodzimy do opisu parametrycznego, dla prostej możemy zgadnąć rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego (RSRN) i znaleźć łatwo rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (RORJ)

$$\frac{x_1-1}{1} = \frac{x_2-1}{-1} = \frac{x_3-1}{2} = \frac{x_4+3}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1=1, x_2=1, x_3=1, x_4=-3 \text{ (RSRN)} \\ \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{-1} = \frac{x_3}{2} = \frac{x_4}{4} \text{ (RORJ)} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-3\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix}$$

$$L = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-3\end{pmatrix}}_{=y_1} + \langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix}}_{=v_1} \rangle$$

Podobnie możemy znaleźć opis parametryczny płaszczyzny, rozwiązaniem szczególnym jest $\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}$. RORJ znajdziemy wyznaczając x_1, x_2 z jednorodnego układu równań (z zerami po prawej stronie)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[w_2 \to w_2]{w_1 \to w_1 - w_2} \begin{cases} x_1 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 - x_4 \end{cases}$$

Każdy element Π można zapisać jako

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}}_{RSRN} + \underbrace{\frac{x_3}{2}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{RORJ}$$

Płaszczyzna Π ma zatem opis parametryczny

$$\Pi = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}}_{=y_2} + \langle \underbrace{\begin{pmatrix}2\\-1\\2\\0\end{pmatrix}}_{=v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{=v_3} \rangle = y_2 + W$$

Wiemy, że zachodzi

$$\Delta = y_1 - y_2 = \Delta_\perp + s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3$$

Moglibyśmy znowu zortogonalizować układ wektorów $\{v_1, v_2, v_3\}$ i znaleźć $\Delta_\perp$ jak ostatnio, ale łatwo się przekonać, że rachunkowo nie jest to takie proste. Posłużymy się tu trickiem, $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ jest podprzestrzenią wymiaru 3, więc jej dopełnienie ortogonalne ma wymiar $\dim(V) - \dim(W) = 4 - 3 = 1$, czyli jest rozpięte przez pewien wektor n (innymi słowy każdy wektor ortogonalny do W jest proporcjonalny do n). Z drugiej strony wiemy, że $\Delta_\perp$ jest ortogonalne do prostej i płaszczyzny, jest więc elementem $W^\perp$ i mamy $\Delta_\perp = \alpha n$. Możemy łatwo znaleźć n, jest on ortogonalny do v_1, v_2, v_3, więc spełnia poniższy układ równań, który możemy przepisać w języku jądra macierzy

$$\begin{cases} \langle v_1 | n \rangle = 0 \\ \langle v_2 | n \rangle = 0 \\ \langle v_3 | n \rangle = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1n_1 - 1n_2 + 2n_3 + 4n_4 = 0 \\ 2n_1 - 1n_2 + 2n_3 + 0n_4 = 0 \\ 3n_1 - 1n_2 + 0n_3 + 1n_4 = 0 \end{cases} \rightarrow n \in \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 13 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} 8 \\ 26 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = n$$

Wybieramy dowolny element jądra jako n (mamy tu swobodę współczynnika przed wektorem, np. $7n$ byłby równie dobrym wyborem), możemy teraz powiązać wektor n i $\Delta_\perp$ korzystając z tego, że n jest ortogonalne do v_1, v_2 i v_3, a $\Delta_\perp = \alpha n$

$$\langle n | \Delta \rangle = \underbrace{\langle n | \Delta_\perp \rangle}_{= \alpha \|n\|^2} + s_1 \underbrace{\langle n | v_1 \rangle}_{=0} + s_2 \underbrace{\langle n | v_2 \rangle}_{=0} + s_3 \underbrace{\langle n | v_3 \rangle}_{=0} = \alpha \|n\|^2$$

Podstawiając dostajemy szukany wektor

$$\Delta_\perp = \alpha n = \frac{\langle n | \Delta \rangle}{\|n\|^2} n$$

Szukana odległość to $\left\| \Delta_\perp \right\| = \frac{|\langle n | \Delta \rangle|}{\|n\|} = \frac{23}{\sqrt{769}}$

c) Krok pierwszy to jak zawsze przejście do opisu parametrycznego, dla pierwszej prostej mamy

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 3x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= x_1} + \langle \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= v_1} \rangle$$

a dla drugiej możemy zgadnąć rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego (RSRN) i rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (RORJ)

$$\frac{x_1+1}{3}=\frac{x_2+1}{2}=\frac{x_3-1}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=-1,x_2=-1,x_3=1\text{ (RSRN)}\\ \frac{x_1}{3}=\frac{x_2}{2}=\frac{x_3}{2}\text{ (RORJ)}\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$L_2=\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}}_{=x_2}+\langle\underbrace{\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}}_{=v_2}\rangle$$

Wiemy, że zachodzi

$$\Delta=x_1-x_2=\Delta_\perp+s_1v_1+s_2v_2$$

Zastosujemy tu kolejną sztuczkę, nasz przypadek jest dość szczególny, przestrzeń wektorowa ma wymiar 3, a nasza podprzestrzeń rozpięta na v_1, v_2 wymiar 2. $\Delta_\perp$ należy jak poprzednio do dopełnienia ortogonalnego, które jest jednowymiarową podprzestrzenią, więc jeśli znajdziemy dowolny wektor n prostopadły do v_1 i v_2 będziemy mieli jak w poprzednim podpunkcie $\Delta_\perp=\frac{\langle n|\Delta\rangle}{\|n\|^2}n$. Zamiast rozwiązywać układ równań i szukać wektora prostopadłego do v_1, v_2, możemy skorzystać z iloczynu wektorowego, wiemy że $v_1\times v_2$ jest prostopadły do v_1 i v_2, więc jest to dobry kandydat na n

$$n=v_1\times v_2=\det\begin{pmatrix}-3&0&1\\3&2&2\\e_x&e_y&e_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\9\\-6\end{pmatrix}$$

$$\|\Delta_\perp\|=\frac{|\langle n|\Delta\rangle|}{\|n\|}=\frac{11}{\sqrt{121}}=1$$

Poznaliśmy trzy sposoby na znalezienie odległości pomiędzy podprzestrzeniami afinicznymi, pierwszym krokiem zawsze jest znalezienie opisu parametrycznego z którego otrzymujemy Δ - dowolny wektor łączący podprzestrzenie afiniczne, oraz $v_1, v_2, \dots v_k$ - wektory rozpinające przestrzenie afiniczne. Kolejne podpunkty prezentowały różne podejścia do znalezienia odległości: a) ortogonalizację Grama-Schmidta układu $\{v_1, v_2, \dots v_k\Delta\}$, która w rezultacie daje $\{e_1, \dots e_k\Delta_\perp\}$ działającą zawsze, ale mogącą być rachunkowo skomplikowaną. W przypadku gdy dopełnienie ortogonalne $\langle v_1, v_2, \dots v_k\rangle$ ma wymiar 1 (tzn. $\dim V - k = 1$) możemy b) znaleźć wektor n rozwiązując układ równań lub w szczególnym przypadku $\mathbb{R}^3$ użyć iloczynu wektorowego i zdefiniować $n = v_1 \times v_2$. Daje to prosty wzór na $\Delta_\perp=\frac{\langle n|\Delta\rangle}{\|n\|^2}n$, który wynika z tego, że dopełnienie ortogonalne ma wymiar 1, więc n i $\Delta_\perp$ są proporcjonalne.

Okazuje się, że jest jeszcze jedna metoda, która jest dość uniwersalna i rachunkowo nieskomplikowana, potrzebujemy najpierw paru definicji i faktów

Definicja 30. *Macierzą Grama układu wektorów $v_1, v_2, \dots v_k$ nazywamy macierz $G(v_1, v_2, \dots v_k)$, której elementy macierzowe są równe $[G(v_1, v_2, \dots v_k)]^i_j = \left\langle v_i \middle| v_j \right\rangle$*

Twierdzenie 31. *Objętość (k wymiarowa) równoległoboku rozpiętego na wektorach $v_1, v_2, \dots v_k$ tzn. zbioru $\{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k \big| 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$ jest równa $Vol(v_1, v_2, \dots v_k) = \sqrt{\det G(v_1, v_2 \dots v_k)}$. Dodatkowo jest spełniona zależność $Vol(v_1, v_2, \dots v_k) = Vol(v_1, v_2, \dots v_{k-1})H$, gdzie H jest długością składowej v_k prostopadłej do podprzestrzeni rozpiętej na wektorach $v_1, v_2, \dots v_{k-1}$, jest to k-wymiarowy analog wzoru "objętość = pole powierzchni razy wysokość"*

Macierz Grama pozwala na alternatywny schemat rozwiązania: pierwszy krok pozostaje ten sam, musimy wyznaczyć Δ i $v_1, v_2, \dots v_k$, szukamy $\|\Delta_\perp\|$ - długości składowej Δ, która jest prostopadła do podprzestrzeni rozpiętej na $v_1, v_2, \dots v_k$. Jest to dokładnie H z twierdzenia, można je wyrazić jako stosunek $Vol(v_1, v_2, \dots v_k, \Delta)$ (objętości) do $Vol(v_1, v_2, \dots v_k)$ (pola podstawy). Alternatywne rachunki podpunktów powyższego zadania wyglądają następująco:
a)

$$Vol(v_1, v_2, \Delta) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \langle v_1|\Delta\rangle \\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \langle v_2|\Delta\rangle \\ \langle \Delta|v_1\rangle & \langle \Delta|v_2\rangle & \langle \Delta|\Delta\rangle \end{pmatrix}} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 6 & 12 & -12 \\ 12 & 46 & 86 \\ -12 & 86 & 660 \end{pmatrix}} = \sqrt{11352}$$

$$Vol(v_1, v_2) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle \\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle \end{pmatrix}} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 46 \end{pmatrix}} = \sqrt{132}$$

$$H = \frac{Vol(v_1, v_2, \Delta)}{Vol(v_1, v_2)} = \sqrt{\frac{11352}{132}} = \sqrt{86}$$

b)

$$Vol(v_1, v_2, v_3, \Delta) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \langle v_1|v_3\rangle & \langle v_1|\Delta\rangle \\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \langle v_2|v_3\rangle & \langle v_2|\Delta\rangle \\ \langle v_3|v_1\rangle & \langle v_3|v_2\rangle & \langle v_3|v_3\rangle & \langle v_3|\Delta\rangle \\ \langle \Delta|v_1\rangle & \langle \Delta|v_2\rangle & \langle \Delta|v_3\rangle & \langle \Delta|\Delta\rangle \end{pmatrix}} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 22 & 7 & 8 & -14 \\ 7 & 9 & 7 & -1 \\ 8 & 7 & 11 & -1 \\ -14 & -1 & -1 & 12 \end{pmatrix}} = \sqrt{529}$$

$$Vol(v_1, v_2, v_3) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \langle v_1|v_3\rangle \\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \langle v_2|v_3\rangle \\ \langle v_3|v_1\rangle & \langle v_3|v_2\rangle & \langle v_3|v_3\rangle \end{pmatrix}} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 22 & 7 & 8 \\ 7 & 9 & 7 \\ 8 & 7 & 11 \end{pmatrix}} = \sqrt{769}$$

$$H = \frac{Vol(v_1, v_2, v_3, \Delta)}{Vol(v_1, v_2, v_3)} = \sqrt{\frac{529}{769}} = \frac{23}{\sqrt{769}}$$

c)

$$Vol(v_1, v_2, \Delta) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \langle v_1|\Delta\rangle \\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \langle v_2|\Delta\rangle \\ \langle \Delta|v_1\rangle & \langle \Delta|v_2\rangle & \langle \Delta|\Delta\rangle \end{pmatrix}} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 10 & -7 & -7 \\ -7 & 17 & 6 \\ -7 & 6 & 6 \end{pmatrix}} = \sqrt{121}$$

$$Vol(v_1, v_2) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle \\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle \end{pmatrix}} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 17 \end{pmatrix}} = \sqrt{121}$$

$$H = \frac{Vol(v_1, v_2, \Delta)}{Vol(v_1, v_2)} = \sqrt{\frac{121}{121}} = 1$$

12 Sprzężenie hermitowskie, rzuty ortogonalne, notacja bra-ket

Na początek pewne przypomnienie, algebra z geometrią II jest przedmiotem, w którym zajmujemy się skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi, poniższe pojęcia mogą zostać uogólnione do nieskończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych, ale jest to materiał na inny przedmiot. Niestety mechanika kwantowa "dzieje się" w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach wektorowych, więc intuicje których tutaj nabierzemy mogą zawodzić, choć powinny być wystarczające dla większości sytuacji.

Definicja 32. *Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi z iloczynem skalarnym (zwykle będziemy rozważać $V = W$). Sprzężeniem hermitowskim operatora liniowego (macierzy) $A \in L(V, W)$ nazywamy* **jedyny taki operator** *$A^\dagger \in L(W, V)$ (czytaj "a krzyż", lub po angielsku "a dagger", jest też czasem oznaczany symbolem A^* w tekstach matematycznych), dla którego zachodzi*

$$\forall_{v\in V, w\in W} \left\langle A^\dagger w \middle| v \right\rangle_V = \langle w | Av \rangle_W$$

gdzie $\langle \cdot | \cdot \rangle_W$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni wektorowej W, a $\langle \cdot | \cdot \rangle_V$ iloczynem skalarnym na przestrzeni wektorowej V.

Działając na obie strony równości z definicji sprzężeniem zespolonym i korzystając z $\overline{\langle x|y\rangle} = \langle y|x\rangle$ otrzymujemy równość

$$\forall_{v\in V, w\in W} \left\langle v \middle| A^\dagger w \right\rangle_V = \langle Av | w \rangle_W$$

Sprzężenie hermitowskie pozwala nam "przerzucić" operator na drugą stronę iloczynu skalarnego, ta operacja pojawia się nagminnie w mechanice kwantowej i jest niemal tak powszechna jak dodawanie i mnożenie.

Fakt 33. *Sprzężenie hermitowskie ma następujące własności. Oznaczenia: V, W, W_2 - przestrzenie wektorowe nad $\mathbb{C}$, $A, B \in L(V, W)$, $C \in L(W, W_2)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*

- $\left(A^\dagger\right)^\dagger = A$
- $\left(A^\dagger\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\dagger$
- $(\alpha A + \beta B)^\dagger = \overline{\alpha} A^\dagger + \overline{\beta} B^\dagger$
- $(CA)^\dagger = A^\dagger C^\dagger$

Przykład 34. *Znajdźmy sprzężenie hermitowskie operatora na $\mathbb{C}^2$ (ze standardowym iloczynem skalarnym i bazą e_1, e_2) danego macierzą*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -3 & 1+i \end{pmatrix}$$

Z definicji mamy, że dla dowolnych wektorów $v, w \in \mathbb{C}^2$ zachodzi $\left\langle A^\dagger v \middle| w \right\rangle = \langle v | Aw \rangle$, możemy znaleźć

z definicji $A^\dagger$ analizując prawą stronę równania i przekształcając ją do postaci $\langle \tilde{v}|w\rangle$

$$\begin{aligned} RHS = \langle v|Aw\rangle &= \left\langle v_1 e_1 + v_2 e_2 \middle| \left(1w_1 + iw_2\right) e_1 + \left(-3w_1 + (1+i)w_2\right) e_2 \right\rangle \\ &= \overline{v_1}\left(1w_1 + iw_2\right) + \overline{v_2}\left(-3w_1 + (1+i)w_2\right) \\ &= \left(1\overline{v_1} - 3\overline{v_2}\right) w_1 + \left(i\overline{v_1} + (1+i)\overline{v_2}\right) w_2 \\ &= \left\langle \overline{\left(1\overline{v_1} - 3\overline{v_2}\right)} e_1 + \overline{\left(i\overline{v_1} + (1+i)\overline{v_2}\right)} e_2 \middle| w_1 e_1 + w_2 e_2 \right\rangle \\ &= \langle \tilde{v}|w\rangle = LHS \end{aligned}$$

$$\tilde{v} = \left(1v_1 - 3v_2\right) e_1 + \left(-iv_1 + (1-i)v_2\right) e_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -i & 1-i \end{pmatrix}}_{=A^\dagger} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Ponieważ $A^\dagger$ jest jednoznaczne, możemy być pewni, że macierz, którą otrzymaliśmy to szukane $A^\dagger$

Okazuje się, że można uogólnić powyższy przykład do następującego faktu

Fakt 35. *Niech V, W - przestrzenie wektorowe z bazami ortonormalnymi e, f, a $F \in L(V, W)$ - operator liniowy z V do W. Jeśli $[F]_e^f$ jest macierzą operatora liniowego F w bazach e, f, to macierz operatora $F^\dagger$ jest dana wzorem $[F^\dagger]_f^e = \left(\overline{[F]_e^f}\right)^T$. Tzn jeśli pracujemy w bazach ortonormalnych, to by dostać macierz sprzężenia hermitowskiego wystarczy zadziałać transpozycją i sprzężeniem zespolonym (w dowolnej kolejności)*

Definicja 36. *Niech V będzie przestrzenią wektorową. Rzutem nazywamy operator $P \in \mathrm{End}(V)$ spełniający $P = P^2$. Dodatkowo, jeśli spełnione jest $P = P^\dagger$, P nazywamy rzutem ortogonalnym*

Przykład 37. *Niech $V = \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ jest macierzą rzutu. Sprawdźmy to*

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = A$$

Nie jest ona macierzą rzutu ortogonalnego, bo

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \neq A$$

Fakt 38. *Jeśli P jest rzutem na przestrzeni wektorowej V, zachodzi $V = \ker P \oplus \mathrm{im}\, P$ (przestrzeń wektorowa jest sumą prostą jądra i obrazu rzutu), tzn dowolny wektor $v \in V$ ma* **jednoznaczny** *rozkład $v = v_{\ker} + v_{\mathrm{im}}$, gdzie $v_{\ker} \in \ker P$, $v_{\mathrm{im}} \in \mathrm{im}\, P$. Mamy dodatkowo wzory na składowe v: $v_{\ker} = (\mathbb{1} - P)v$, $v_{\mathrm{im}} = Pv$. Można je wyprowadzić korzystając z faktu, że $v_{\ker}$ jest elementem jądra (P w działaniu na $v_{\ker}$ daje zero) i v_{im} jest elementem obrazu (jest postaci Pw dla pewnego w)*

$$Pv = \underbrace{Pv_{\ker}}_{=0} + Pv_{\mathrm{im}} = Pv_{\mathrm{im}} = PPw = Pw = v_{\mathrm{im}}$$

$$v_{\ker} = v - v_{\mathrm{im}} = (\mathbb{1} - P)v$$

Jeśli rzut jest ortogonalny, zachodzi dodatkowo $\ker P = (\mathrm{im}\, P)^\perp$ (jądro jest dopełnieniem ortogonalnym obrazu i vice versa). Okazuje się, że $\mathbb{1} - P$ też jest rzutem, bo $(\mathbb{1} - P)^2 = \mathbb{1} - 2P + P^2 = \mathbb{1} - P$. Jest on zwany dopełnieniem rzutu P, mamy $\mathrm{im}(\mathbb{1} - P) = \ker P$ i $\ker(\mathbb{1} - P) = \mathrm{im}\, P$

Przykład 37 (cd)**.** *Znajdźmy jądro i obraz rzutu* $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. *Przy szukaniu jądra możemy się wspomóc redukcją wierszową, a szukając obrazu redukcją kolumnową*

$$\ker(A) = \ker \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}}_{=v_1} \rangle$$

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{im} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=v_2} \rangle$$

v_1, v_2 to liniowo niezależne wektory, więc $\mathbb{R}^2$ faktycznie jest sumą prostą jądra i obrazu rzutu (te wektory tworzą bazę). Dodatkowo łatwo się przekonujemy, że nie są one swoimi dopełnieniami ortogonalnymi (rzut nie jest ortogonalny), $\langle v_1 | v_2 \rangle = -8 \neq 0$

Definicja 39. *Notacja bra-ket (notacja Diraca), używana w mechanice kwantowej, to sposób zapisywania elementów przestrzeni wektorowej i dualnej. Możemy to sobie wyobrazić tak, że dzielimy napis* $\langle v|w \rangle$ *(zwany* **braket** *po angielsku) na dwie części, lewą* $\langle v|$ *zwaną bra, oraz prawą* $|w\rangle$ *zwaną ket. Formalnie mamy przestrzeń wektorową V z iloczynem skalarnym* $\langle \cdot | \cdot \rangle$*, ket jest oznaczeniem na element przestrzeni wektorowej* $w \in V$*, piszemy* $|w\rangle$*. Przyporządkowanie to jest liniowe, tzn* $|\alpha w_1 + \beta w_2\rangle = \alpha |w_1\rangle + \beta |w_2\rangle$*. Natomiast* $\langle v|$ *to taki obiekt, który może zadziałać na ket (element przestrzeni wektorowej) i daje w rezultacie element ciała* $\mathbb{C}$*. Takie obiekty nazywa się elementami przestrzeni dualnej* V^* *(czyli* $\langle v| \in V^*$ *i* $\langle v| : V \to \mathbb{C}$*), to odwzorowanie jest dane wzorem* $\langle v| : |w\rangle \mapsto \langle v|w\rangle$*. Ta notacja ułatwia bardzo rachunki. Jeśli pracujemy w bazie ortonormalnej* $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ *możemy zapisać w reprezentacji macierzowej bra, ket, iloczyn skalarny oraz operatory liniowe*

$$w = w_1 e_1 + w_2 e_2 + \ldots + w_n e_n \qquad v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_n e_n$$

$$|w\rangle = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \qquad \langle v| = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \cdots & \bar{v}_n \end{pmatrix}$$

$$\langle v|w\rangle = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \cdots & \bar{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \bar{v}_1 w_1 + \bar{v}_2 w_2 + \ldots + \bar{v}_n w_n$$

$$|w\rangle \langle v| = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \cdots & \bar{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1\bar{v}_1 & w_1\bar{v}_2 & \cdots & w_1\bar{v}_n \\ w_2\bar{v}_1 & w_2\bar{v}_2 & \cdots & w_2\bar{v}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n\bar{v}_1 & w_n\bar{v}_2 & \cdots & w_n\bar{v}_n \end{pmatrix}$$

Obiekt $|w\rangle \langle v|$ *może działać na element V, bra w działaniu na wektor daje nam liczbę zespoloną, więc w rezultacie otrzymujemy ket pomnożony przez liczbę, czyli element przestrzeni wektorowej, działanie to jest liniowe, więc* $|w\rangle \langle v| \in \operatorname{End}(V)$ *(ket razy bra jest endomorfizmem - odwzorowaniem liniowym z V do V), ma więc macierz, która jest obliczona powyżej. Dodatkowo dla operatorów liniowych* $|w\rangle \langle v|$ *zachodzi* $(|w\rangle \langle v|)^\dagger = |v\rangle \langle w|$

Zad. 12.1

Sprawdzić, że wektory

$$u = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ -\frac{1+i}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$$

stanowią bazę ortonormalną przestrzeni $\mathbb{C}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Dla każdego wektora i pary wektorów znajdź macierz rzutu ortogonalnego na podprzestrzeń rozpiętą przez ten wektor/wektory

Rozw. 12.1

Korzystając z tego, że $\overline{\frac{1+i}{2}}\frac{1+i}{2} = \left|\frac{1+i}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}$ mamy

$$\begin{aligned}
\langle u|v\rangle &= \overline{\frac{1+i}{2}}\frac{1}{2} - \overline{\frac{1+i}{2}}\frac{1}{2} + 0\frac{1+i}{2} = 0 \\
\langle u|w\rangle &= -\overline{\frac{1+i}{2}}\frac{1}{2} + \overline{\frac{1+i}{2}}\frac{1}{2} + 0\frac{1+i}{2} = 0 \\
\langle v|w\rangle &= -\overline{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} - \overline{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} + \overline{\frac{1+i}{2}}\frac{1+i}{2} = 0 \\
\|u\|^2 &= \overline{\frac{1+i}{2}}\frac{1+i}{2} + \overline{\frac{1+i}{2}}\frac{1+i}{2} + 0 = 1 \\
\|v\|^2 &= \overline{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} + \overline{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} + \overline{\frac{1+i}{2}}\frac{1+i}{2} = 1 \\
\|w\|^2 &= \overline{\frac{-1}{2}}\frac{-1}{2} + \overline{\frac{-1}{2}}\frac{-1}{2} + \overline{\frac{1+i}{2}}\frac{1+i}{2} = 1
\end{aligned}$$

Układ u, v, w jest istotnie bazą ortonormalną ($\dim \mathbb{C}^3 = 3$). Żeby znaleźć rzuty ortogonalne na podprzestrzenie rozpięte przez te wektory posłużymy się notacją bra-ket (oznaczenia, P_u - rzut na podprzestrzeń rozpiętą przez u, podobnie P_v i P_w). Zastanówmy się, jakie własności ma operator liniowy $|u\rangle\langle u|$. Po pierwsze jest to rzut ortogonalny, bo $(|u\rangle\langle u|)^2 = |u\rangle\langle u|u\rangle\langle u| = |u\rangle\langle u|$, oraz $(|u\rangle\langle u|)^\dagger = |u\rangle\langle u|$. Jego obrazem jest przestrzeń rozpięta przez u, bo jeśli zadziałamy nim na dowolny wektor $u' \in V$, dostaniemy $|u\rangle$ pomnożony przez stałą

$$(|u\rangle\langle u|)\left|u'\right\rangle = |u\rangle \underbrace{\left\langle u\middle|u'\right\rangle}_{\in\mathbb{C}}$$

Ponieważ to rzut ortogonalny to jądro jest zbiorem wszystkich wektorów ortogonalnych do u (widać to też z powyższego rachunku, warunek należenia do jądra to $\langle u|u'\rangle = 0$). Mamy przepis na rzut ortogonalny

na podprzestrzeń rozpiętą przez wektor u, jest to $P_u = |u\rangle\langle u|$, analogicznie dla P_v i P_w

$$P_u = |u\rangle\langle u| = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ -\frac{1+i}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} & -\frac{1-i}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_v = |v\rangle\langle v| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1-i}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1-i}{4} \\ \frac{1+i}{4} & \frac{1+i}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_u = |w\rangle\langle w| = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1-i}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1-i}{4} \\ -\frac{1+i}{4} & -\frac{1+i}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że zachodzi $P_u + P_v + P_w = \mathbb{1}$, jest to przykład tak zwanego rozkładu jedynki. Chcemy jeszcze znaleźć rzuty na podprzestrzenie rozpięte przez pary wektorów, przeanalizujmy najpierw rzut na $\langle u, v\rangle$, oznaczmy go $P_{u,v}$. Możemy podejść do tego na dwa sposoby: **I sposób:** zauważmy, że skoro u, v, w to baza ortonormalna, to $\langle u, v\rangle^\perp = \langle w\rangle$. Ponieważ jądro i obraz rzutu ortogonalnego są swoimi dopełnieniami ortogonalnymi, to $\operatorname{im} P_{u,v} = \langle u, v\rangle$, $\ker P_{u,v} = \langle w\rangle$. Z drugiej strony dopełnienie tego rzutu spełnia $\operatorname{im}(\mathbb{1} - P_{u,v}) = \ker P_{u,v} = \langle w\rangle = \operatorname{im} P_w$ i $\ker(\mathbb{1} - P_{u,v}) = \operatorname{im} P_{u,v} = \langle u, v\rangle = \ker P_w$. Rzut $P_{u,v}$ jest związany z rzutem P_w wzorem $P_{u,v} = \mathbb{1} - P_w$. Innymi słowy suma rzutu ortogonalnego na pewną podprzestrzeń W i rzutu ortogonalnego na jej dopełnienie ortogonalne $W^\perp$ wynosi $\mathbb{1}$, $P_W + P_{W^\perp} = \mathbb{1}$. **II sposób:** mamy rzuty P_u i P_v, można się zastanowić czy jest jakiś związek pomiędzy nimi i rzutem $P_{u,v}$. Okazuje się, że $P_u + P_v = P_{u,v}$. Sprawdźmy to, po pierwsze czy ich suma jest rzutem ortogonalnym?

$$(P_u + P_v)^2 = P_u^2 + P_v^2 + P_u P_v + P_v P_u = P_u + P_v + |u\rangle \underbrace{\langle u|v\rangle}_{=0} \langle v| + |v\rangle \underbrace{\langle v|u\rangle}_{=0} \langle u| = P_u + P_v$$

$$(P_u + P_v)^\dagger = P_u^\dagger + P_v^\dagger = P_u + P_v$$

Zgadza się, ich suma jest rzutem ortogonalnym. Czy $P_u + P_v$ jest faktycznie rzutem na podprzestrzeń $\langle u, v\rangle$? Zadziałajmy rzutem $P_u + P_v$ na dowolny wektor x

$$(P_u + P_v)|x\rangle = P_u|x\rangle + P_v|x\rangle = |u\rangle \underbrace{\langle u|x\rangle}_{\in\mathbb{C}} + |v\rangle \underbrace{\langle v|x\rangle}_{\in\mathbb{C}}$$

Obraz to podprzestrzeń rozpięta przez u, v Mamy $\ker(P_u + P_v) = \langle w\rangle$ i $\operatorname{im}(P_u + P_v) = \langle u, v\rangle$, więc faktycznie $P_u + P_v = P_{u,v}$. Stosując dowolną z tych metod obliczamy

$$P_{u,v} = P_u + P_v = \mathbb{1} - P_w = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1-i}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1-i}{4} \\ \frac{1+i}{4} & \frac{1+i}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_{u,w} = P_u + P_w = \mathbb{1} - P_v = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1-i}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1-i}{4} \\ -\frac{1+i}{4} & -\frac{1+i}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_{v,w} = P_v + P_w = \mathbb{1} - P_u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Możemy sobie podsumować ogólne wersje faktów, których użyliśmy (wyprowadziliśmy) w powyższym zadaniu

Fakt 40 (rozkład jedynki)**.** *Niech $e_1, e_2, \dots e_n$ będzie bazą przestrzeni wektorowej V, zachodzi wtedy*

$$\sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle \langle e_i| = \mathbb{1}$$

Używając tego faktu, w mechanice kwantowej stosuje się zapis na rozkład wektora w bazie

$$|\Psi\rangle = \mathbb{1}\,|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle \langle e_i|\Psi\rangle$$

Fakt 41. *Niech W będzie podprzestrzenią V, P_W rzutem ortogonalnym na tę podprzestrzeń, a $P_{W^\perp}$ rzutem ortogonalnym na jej dopełnienie ortogonalne, wtedy*

$$P_W + P_{W^\perp} = \mathbb{1}$$

Fakt 42. *Niech $P_1, P_2 \in End(V)$ - rzuty, mamy wtedy*

$$\left(P_1 + P_2 \textit{ jest rzutem}\right) \Leftrightarrow \left(P_1 P_2 = 0 = P_2 P_1\right)$$

13 Operatory normalne, hermitowskie i unitarne, rozkład spektralny operatorów normalnych

Zdefiniujemy sobie teraz parę szczególnych typów operatorów

Definicja 43. *Niech V - przestrzeń wektorowa (skończenie wymiarowa), $F \in \mathrm{End}(V)$ - operator liniowy na V, mówimy że F jest*

- *normalny jeśli zachodzi $F^\dagger F = FF^\dagger$*
- *hermitowski (samosprzężony) jeśli zachodzi $F^\dagger = F$*
- *unitarny jeśli zachodzi $F^\dagger F = \mathbb{1} = FF^\dagger$*
  W przypadku gdy przestrzeń wektorowa jest nad ciałem liczb rzeczywistych, zamiast nazwy operator unitarny mówimy, że operator, który spełnia $F^T F = \mathbb{1}$ jest ortogonalny

Wniosek 44. *Każdy operator hermitowski jest normalny, podobnie każdy operator unitarny (ortogonalny) też jest normalny. W skończonych wymiarach, jeśli $F^\dagger F = \mathbb{1}$ to obliczając wyznacznik obu stron dostajemy wniosek, że $\det(F) \neq 0$, czyli F^{-1} istnieje i w związku z tym mamy*

$$F^\dagger F = \mathbb{1} \equiv F^\dagger = F^{-1} \equiv FF^\dagger = \mathbb{1}$$

Należy sprawdzić tylko jedną z tych równości, druga jest prostym wnioskiem

Uwaga 45 (ponadprogramowa)**.** *W pełnej ogólności powyższe definicje się komplikują, powodem jest utrata pewnej własności, która zachodzi w przestrzeniach skończenie wymiarowych. Jeśli A jest macierzą $n \times n$, a v wektorem to Av zawsze ma sens, w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach wektorowych mamy operatory (zwane operatorami nieograniczonymi), które nie są zdefiniowane na całej przestrzeni wektorowej (mają tzw. dziedzinę), przykładem są operator położenia i operator pędu w mechanice kwantowej. Sprawia to, że definicja sprzężenia hermitowskiego operatora F nie jest taka prosta w przestrzeni nieskończenie wymiarowej. Po drugie, pojęcia operator* **samosprzężony** *i* **hermitowski** *oznaczają różne rzeczy, pierwsze z grubsza znaczy, że $F = F^\dagger$, a drugie $\forall_{v,w} \langle Fv|w\rangle = \langle v|Fw\rangle$. Każdy operator samosprzężony jest hermitowski, ale niekoniecznie na odwrót. Po trzecie, definicja operatora unitarnego wymaga, by $F^\dagger F = \mathbb{1}$ i $FF^\dagger = \mathbb{1}$, trzeba sprawdzić obie własności, nie mamy już równoważności pomiędzy nimi. W szczególności są operatory, które spełniają pierwszą, ale nie drugą (nazywane są izometriami).*

Twierdzenie 46 (rozkład spektralny)**.** *Niech V będzie przestrzenią wektorową, a $F \in \mathrm{End}(V)$* **normalnym** *operatorem liniowym na V. Wtedy F jest diagonalizowalny i istnieje ortonormalna baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych F. Możemy zapisać operator F jako sumę rzutów, zapis ten nazywamy rozkładem spektralnym F*

$$F = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$$

gdzie λ_i to i-ta wartość własna, a P_i to rzut ortogonalny na podprzestrzeń własną związaną z λ_i tzn. $\ker(F - \lambda_i \mathbb{1})$. Dodatkowo, jeśli F jest hermitowski to jego wartości własne są liczbami rzeczywistymi, a jeśli jest unitarny to jego wartości własne są liczbami zespolonymi o module 1

Zad. 13.1

Sprawdź, że operator $F \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ zdefiniowany jako mnożenie przez macierz jest normalny i znajdź jego rozkład spektralny

a) $\begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix}$

Rozw. 13.1

Procedura obliczania rozkładu spektralnego jest następująca: krok 1 to znalezienie wartości własnych, krok 2 to znalezienie podprzestrzeni własnych, krok 3 to znalezienie bazy ortonormalnej. Ostatnim 4. krokiem jest wykorzystanie tych informacji do zapisania rozkładu spektralnego. a) **krok 0:** sprawdzenie normalności operatora. Mamy standardowy iloczyn skalarny, więc sprzężenie hermitowskie to złożenie transpozycji i sprzężenia zespolonego

$$F^\dagger F = \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & -1-i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1+i \\ -1-i & 6 \end{pmatrix}$$

$$FF^\dagger = \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & -1-i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1+i \\ -1-i & 6 \end{pmatrix}$$

Mamy $F^\dagger F = FF^\dagger$
Krok 1: wartości własne

$$\omega(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-i-\lambda & 1+i \\ -1+i & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (4-i)\lambda + 6 - 2i$$

Rozwiązujemy $\omega(\lambda) = 0$, korzystając ze wzorów na zera funkcji kwadratowej, najpierw szukamy $\Delta = (4-i)^2 - 4(6-2i) = -9 = (3i)^2$. Mamy dwa zera

$$\lambda_1 = \frac{4-i+3i}{2} = 2+i \qquad \lambda_2 = \frac{4-i-3i}{2} = 2-2i$$

Krok 2: podprzestrzenie własne

$$\begin{aligned} V_1 &= \ker \begin{pmatrix} -2i & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix} \overset{w_1 \to w_1 + w_2}{=} \ker \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -1+i & -i \end{pmatrix} \overset{w_2 \to iw_2}{=} \ker \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -i-1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} -1-i & 1 \end{pmatrix} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}}_{=u_1} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \ker \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 2i \end{pmatrix} \overset{w_2 \to w_2 - w_1}{=} \ker \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1 & i-1 \end{pmatrix} \overset{w_1 \to iw_1}{=} \ker \begin{pmatrix} -1 & i-1 \\ -1 & i-1 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} -1 & i-1 \end{pmatrix} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix}}_{=u_2} \rangle \end{aligned}$$

krok 3: baza ortonormalna $\mathbb{C}^2$, wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są zawsze ortogonalne, łatwo się przekonać, że $\langle u_1 | u_2 \rangle = 0$, wektory faktycznie są ortogonalne. Musimy je jeszcze znormalizować, mamy

$$\|u_1\|^2 = 3 \qquad \hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$
$$\|u_2\|^2 = 3 \qquad \hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mamy zatem bazę ortonormalną złożoną z u_1 - wektora własnego z wartością własną $2+i$ i u_2 - wektora własnego z wartością własną $2-2i$.
krok 4: rozkład spektralny, wiemy że rzut ortogonalny na podprzestrzeń rozpiętą przez wektor $\hat{u}$ to $|\hat{u}\rangle \langle \hat{u}|$, mamy zatem

$$P_1 = |\hat{u}_1\rangle \langle \hat{u}_1| = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-i \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$$
$$P_2 = |\hat{u}_2\rangle \langle \hat{u}_2| = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1+i \\ -1-i & 1 \end{pmatrix}$$
$$F = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = \frac{2+i}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix} + \frac{2-2i}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1+i \\ -1-i & 1 \end{pmatrix}$$

b) **krok 0:** sprawdzenie normalności operatora. Mamy standardowy iloczyn skalarny, więc sprzężenie hermitowskie to złożenie transpozycji i sprzężenia zespolonego, zauważmy że

$$F^\dagger = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = F$$

F jest hermitowski, więc jest normalny.
Krok 1: wartości własne

$$\omega(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 - 4\lambda - 4) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

Gdzie najpierw zauważyliśmy, że $\omega(1) = 0$ i wyciągnęliśmy czynnik $(\lambda - 1)$, mamy dwie wartości własne

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -2$$

Krok 2: podprzestrzenie własne

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\substack{w_1 \to w_1 + 2w_3 \\ w_2 \to w_2 - w_3}}{=} \ker \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{w_2 \to w_2 - w_1}{=} \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=u_1} \rangle$$

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\tilde{u}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=\tilde{u}_3} \rangle$$

Krok 3: baza ortonormalna $\mathbb{C}^3$, wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są zawsze ortogonalne, żeby mieć układ ortonormalny musimy zortogonalizować układ $\tilde{u}_2, \tilde{u}_3$ ortogonalizacją Grama Schmidta

$$u_2 = \tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \tilde{u}_3 - \frac{\langle \tilde{u}_2 | \tilde{u}_3 \rangle}{\|\tilde{u}_2\|^2} \tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Musimy je jeszcze znormalizować, mamy

$$\|u_1\|^2 = 3 \qquad \hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|u_2\|^2 = 2 \qquad \hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|u_3\|^2 = \frac{6}{4} \qquad \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Mamy zatem bazę ortonormalną złożoną z u_1 - wektora własnego z wartością własną 1 i u_2, u_3 - wektorów własnych z wartością własną -2.

krok 4: rozkład spektralny, wiemy że rzut ortogonalny na podprzestrzeń rozpiętą przez wektor $\hat{u}_1$ to

$|\hat{u}_1\rangle\langle\hat{u}_1|$, a na podprzestrzeń rozpiętą przez $\hat{u}_2, \hat{u}_3$ to $|\hat{u}_2\rangle\langle\hat{u}_2| + |\hat{u}_3\rangle\langle\hat{u}_3|$, mamy zatem

$$P_1 = |\hat{u}_1\rangle\langle\hat{u}_1| = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$P_2 = |\hat{u}_2\rangle\langle\hat{u}_2| + |\hat{u}_3\rangle\langle\hat{u}_3| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\1 & 1 & -2\\-2 & -2 & 4\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$F = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Mogliśmy oszczędzić sobie rachunków i znaleźć P_2 korzystając z tego, że $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ to baza mamy $P_1 + P_2 = \mathbb{1}$. P_2 mogliśmy znaleźć ze wzoru $P_2 = \mathbb{1} - P_1$

c) **krok 0:** sprawdzenie normalności operatora. Mamy standardowy iloczyn skalarny, więc sprzężenie hermitowskie to złożenie transpozycji i sprzężenia zespolonego, zauważmy że

$$F^\dagger = \begin{pmatrix}0 & 1 & i\\1 & 0 & -i\\-i & i & 0\end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix}0 & 1 & -i\\1 & 0 & i\\i & -i & 0\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}0 & 1 & i\\1 & 0 & -i\\-i & i & 0\end{pmatrix} = F$$

F jest hermitowski, więc jest normalny.
Krok 1: wartości własne

$$\omega(\lambda) = \det\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & i\\1 & -\lambda & -i\\-i & i & -\lambda\end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 - \lambda + 2) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

Gdzie najpierw zauważyliśmy, że $\omega(1) = 0$ i wyciągnęliśmy czynnik $(\lambda - 1)$, mamy dwie wartości własne

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -2$$

Krok 2: podprzestrzenie własne

$$V_1 = \ker\begin{pmatrix}-1 & 1 & i\\1 & -1 & -i\\-i & i & -1\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}-1 & 1 & i\\-i & i & -1\end{pmatrix} \overset{w_2 \to -iw_2}{=} \ker\begin{pmatrix}-1 & 1 & i\\-1 & 1 & i\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}-1 & 1 & i\end{pmatrix} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{=\tilde{u}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}i\\0\\1\end{pmatrix}}_{=\tilde{u}_2} \rangle$$

$$V_2 = \ker\begin{pmatrix}2 & 1 & i\\1 & 2 & -i\\-i & i & 2\end{pmatrix} \overset{w_3 \to iw_3}{=} \ker\begin{pmatrix}2 & 1 & i\\1 & 2 & -i\\1 & -1 & 2i\end{pmatrix} \overset{\substack{w_1 \to w_1 + w_2\\ w_3 \to w_3 + 2w_2}}{=} \ker\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\1 & 2 & -i\\3 & 3 & 0\end{pmatrix} \overset{w_2 \to w_2 - w_1/3}{=} \ker\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & -i\end{pmatrix} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix}-i\\i\\1\end{pmatrix}}_{=\tilde{u}_3} \rangle$$

Krok 3: baza ortonormalna $\mathbb{C}^3$, wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są zawsze ortogonalne, żeby mieć układ ortonormalny musimy zortogonalizować układ $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ ortogonalizacją Grama Schmidta

$$u_1 = \tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \tilde{u}_2 - \frac{\langle \tilde{u}_1 | \tilde{u}_2 \rangle}{\|\tilde{u}_1\|^2} \tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Musimy je jeszcze znormalizować, mamy

$$\|u_1\|^2 = 2 \qquad \hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|u_2\|^2 = \frac{6}{4} \qquad \hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\|u_3\|^2 = 3 \qquad \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mamy zatem bazę ortonormalną złożoną z u_1, u_2 - wektory własne z wartością własną 1 i u_3 - wektora własnego z wartością własną -2.
krok 4: rozkład spektralny, wiemy że rzut ortogonalny na podprzestrzeń rozpiętą przez wektor $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ to $|\hat{u}_1\rangle \langle \hat{u}_1| + |\hat{u}_2\rangle \langle \hat{u}_2|$, a na podprzestrzeń rozpiętą przez $\hat{u}_3$ to $|\hat{u}_3\rangle \langle \hat{u}_3|$, mamy zatem

$$\begin{aligned} P_1 &= |\hat{u}_1\rangle \langle \hat{u}_1| + |\hat{u}_2\rangle \langle \hat{u}_2| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & i & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2i \\ -1 & 1 & -2i \\ -2i & 2i & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & i \\ 1 & 2 & -i \\ -i & i & 2 \end{pmatrix} \\ P_2 &= |\hat{u}_3\rangle \langle \hat{u}_3| = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -i \\ -1 & 1 & i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix} \\ F &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & i \\ 1 & 2 & -i \\ -i & i & 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -i \\ -1 & 1 & i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mogliśmy oszczędzić sobie rachunków i znaleźć P_1 korzystając z tego, że $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ to baza mamy $P_1 + P_2 = \mathbb{1}$. P_1 mogliśmy znaleźć ze wzoru $P_1 = \mathbb{1} - P_2$

14 Diagonalizacja macierzy normalnych, ewolucja unitarna, wspólna diagonalizacja komutujących macierzy

W poprzednim zadaniu znaleźliśmy rozkład spektralny trzech macierzy, przy okazji znaleźliśmy ich wektory i wartości własne, można pokusić się o zdiagonalizowanie ich. Dla macierzy normalnych można wybrać ortonormalną bazę diagonalizującą, okazuje się, że w takiej sytuacji macierze zmiany bazy są dość szczególne. Ogólnie mamy

$$M = UDU^{-1}$$

gdzie M to nasza macierz w bazie standardowej e, D to ta macierz w bazie diagonalizującej u, a $U = [id]^e_u$ to macierz zmiany bazy z u do e (poprzednio używaliśmy nazwy S, ale wybiegając naprzód, użyjemy tu innej nazwy). Kolumny macierzy U to wektory własne zapisane w bazie standardowej, coś co już mamy, dlatego łatwo ją znaleźć. Macierz U^{-1} to macierz odwrotna, której policzenie jest co do zasady proste, ale rachunkowo nudne.

Rozważmy macierz z podpunktu b) z poprzedniego zadania, mamy jej wartości i wektory własne

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Macierz U ma postać

$$U = \begin{pmatrix} |u_1\rangle & |u_2\rangle & |u_3\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Normalnie znalezienie U^{-1} wymagałoby zawiłych rachunków, ale ponieważ kolumny naszej macierzy są wektorami ortogonalnymi, mamy pewien "cud rachunkowy". Spójrzmy na macierz $U^\dagger$ i obliczmy jej iloczyn z macierzą U. Można skorzystać z $|u_i\rangle^\dagger = \langle u_i|$ i znaleźć wzór na abstrakcyjnym poziomie ket i bra, ale można też stransponować macierz U (sprzężenie hermitowskie w bazie ortonormalnej to transpozycja i sprzężenie zespolone, a nasza macierz jest rzeczywista)

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} \langle u_1| \\ \langle u_2| \\ \langle u_3| \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$U^\dagger U = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} \langle u_1| \\ \langle u_2| \\ \langle u_3| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |u_1\rangle & |u_2\rangle & |u_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1|u_1\rangle & \langle u_1|u_2\rangle & \langle u_1|u_3\rangle \\ \langle u_2|u_1\rangle & \langle u_2|u_2\rangle & \langle u_2|u_3\rangle \\ \langle u_3|u_1\rangle & \langle u_3|u_2\rangle & \langle u_3|u_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ponieważ w skończenie wymiarowych przestrzeniach wektorowych $U^\dagger U = \mathbb{1}$ implikuje istnienie U^{-1} i $UU^\dagger = \mathbb{1}$, to nasza macierz zmiany bazy jest macierzą unitarną. Ten przykład motywuje stwierdzenie, że dowolna macierz zmiany bazy z bazy ortonormalnej do innej bazy ortonormalnej jest macierzą unitarną. Dodatkowo prawdziwe jest stwierdzenie w drugą stronę, każdą macierz unitarną można interpretować jako macierz przejścia od standardowej bazy ortonormalnej do pewnej innej bazy ortonormalnej. Bierze się to z tego, że działanie macierzą unitarną zachowuje iloczyn skalarny, jeśli v, w to pewne wektory po zadziałaniu U mamy wektory Uv, Uw, które spełniają

$$\langle Uv|Uw\rangle = \left\langle v\middle|U^\dagger Uw\right\rangle = \langle v|w\rangle$$

Jeśli bylibyśmy w przestrzeni euklidesowej (przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb rzeczywistych z iloczynem skalarnym), iloczyn skalarny łączyłby się z kątem pomiędzy wektorami v, w i powiedzielibyśmy, że U zachowuje kąt pomiędzy wektorami, oraz ich długość. Fizycznie oznaczałoby to, że U jest obrotem, w ogólnej przestrzeni unitarnej nad ciałem liczb zespolonych macierz unitarna to taki "zespolony obrót", cokolwiek to znaczy.

By zmotywować sens rozkładu spektralnego, przyjrzymy się następującemu problemowi zainspirowanemu mechaniką kwantową.

Zad. 14.1

Rozważmy równanie w $\mathbb{C}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym i bazą standardową oznaczoną przez $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$

$$i\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = H|\Psi(t)\rangle$$

gdzie $|\Psi(t)\rangle \in \mathbb{C}^3$ jest wektorem zależnym od czasu, z warunkiem początkowym

$$|\Psi(0)\rangle = |1\rangle$$

Operator H w bazie standardowej jest zadany przez macierz

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Uzasadnij, że rozwiązanie można znaleźć używając operatora ewolucji

$$|\Psi(t)\rangle = U_t|\Psi(0)\rangle \quad \text{gdzie} \quad U_t = e^{-itH}$$

Oblicz operator ewolucji U_t i wyznacz rozwiązanie $|\Psi(t)\rangle$. Jak zmienia się w czasie norma $|\Psi(t)\rangle$?

Rozw. 14.1

Obliczmy pochodną U_t, korzystamy z definicji exp macierzy

$$\frac{d}{dt}U_t = \frac{d}{dt}e^{-itH} = \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-itH)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} -iH\frac{(-itH)^{n-1}}{(n-1)!} = -iHe^{-itH} = -iHU_t$$

Podstawiając do równania $U_t |\Psi(0)\rangle$ mamy

$$i\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = i\frac{d}{dt}U_t|\Psi(0)\rangle = i(-iH)U_t|\Psi(0)\rangle = H|\Psi(t)\rangle$$

Faktycznie U_t pozwala nam znaleźć rozwiązanie dla dowolnego t. Jak obliczyć U_t? Jednym sposobem byłoby, jak to robiliśmy na początku semestru, zdiagonalizowanie macierzy H i wyrażenie jej jako $UDU^\dagger$, wtedy exponent byłby dany wzorem

$$U_t = e^{-itH} = Ue^{-itD}U^\dagger$$

Możemy jednak posłużyć się intuicją związaną z rozkładem spektralnym. Mamy rozkład jedynki $\mathbb{1} = P_1 + P_2$, gdzie P_1 to rzut na podprzestrzeń własną z wartością własną 1, a P_2 to rzut na podprzestrzeń własną z wartością własną -2. Możemy go użyć do odtworzenia rozkładu spektralnego

$$H = H\mathbb{1} = HP_1 + HP_2 = 1P_1 - 2P_2$$

Gdzie korzystamy z tego, że na podprzestrzeni własnej działanie hamiltonianem jest równoważne mnożeniu przez wartość własną, jest to zbiór wektorów własnych o danej wartości własnej. Można też to zobaczyć korzystając z postaci rzutu $P_1 = |\hat{u}_1\rangle\langle\hat{u}_1|$ i tego, że ket jest wektorem własnym, mamy

$$HP_1 = H|\hat{u}_1\rangle\langle\hat{u}_1| = 1|\hat{u}_1\rangle\langle\hat{u}_1| = 1P_1$$

Analogicznie z P_2, które jest sumą dwóch wyrazów postaci ket razy bra. Jeśli zastosujemy podobny trick z operatorem U_t dostaniemy

$$U_t = e^{-itH} = e^{-itH}\mathbb{1} = e^{-itH}P_1 + e^{-itH}P_2 = e^{-it1}P_1 + e^{-it(-2)}P_2 = e^{-it}P_1 + e^{i2t}P_2$$

Intuicja tego wzoru jest taka, że na podprzestrzeni własnej działanie macierzą H (lub ogólnie funkcją od niej) jest równoważne mnożeniu przez wartość własną (lub funkcję od wartości własnej). Rozwiązanie dane jest wzorem (używamy macierzy rzutów obliczonych w poprzednim zadaniu w podpunkcie b))

$$|\Psi(t)\rangle = U_t|\Psi(0)\rangle = \left(e^{-it}P_1 + e^{i2t}P_2\right)|1\rangle = e^{-it}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + e^{i2t}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Ważną obserwacją jest że ponieważ H jest samosprzężony mamy $(-itH)^\dagger = itH^\dagger = itH$, oraz $U_t^\dagger = e^{itH} = U_{-t}$. Czyli $U_t^\dagger U_t = \mathbb{1} = U_t U_t^\dagger$, operator U_t jest unitarny. Czyli norma wektora $|\Psi(t)\rangle$ jest stała w czasie, jest to fakt, który się przyda na mechanice kwantowej.

Na koniec jeszcze spójrzmy na kolejny fakt związany z mechaniką kwantową

Fakt 47. *Niech $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ będą diagonalizowalnymi macierzami $n \times n$, wtedy następujące fakty są równoważne: 1) A i B komutują (tzn ich komutator $[A, B] = AB - BA$ jest równy zero) 2) istnieje baza $\mathbb{C}^n$ złożona z wektorów, które są jednocześnie wektorami własnymi A i B*

Jeśli ktoś słyszał w tekstach popularnonaukowych stwierdzenia o "stanach kwantowych z dobrze określonym spinem i energią" czy "nie można jednocześnie dokładnie określić położenia i pędu", to niech wie, że powyższy fakt jest algebraicznym źródłem tych stwierdzeń.

Zad. 14.2

Dane są dwie macierze

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Czy istnieje baza złożona ze wspólnych wektorów własnych M_1 i M_2? Jeśli tak, to znajdź ją

Rozw. 14.2

Korzystając z faktu, wiemy że wystarczy sprawdzić, czy nasze macierze komutują

$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zachodzi $M_1 M_2 = M_2 M_1$, więc wiemy, że istnieje baza złożona ze wspólnych wektorów własnych naszych macierzy. Znajdźmy najpierw wartości własne obu macierzy analizując wielomiany charakterystyczne

$$\begin{aligned} \omega_1(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}^2 \\ &= \left((1-\lambda)^2 - 1\right)^2 = \lambda^2(\lambda-2)^2 \\ \omega_2(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2(\lambda^2-1) - 1(-1+\lambda^2) = (\lambda^2-1)^2 = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 \end{aligned}$$

Pierwsza macierz ma dwa wektory własne z wartością własną 0 i dwa z wartością własną 2, natomiast druga macierz ma dwa wektory własne z wartością własną -1 i dwa z wartością własną 1. Niech v_1, v_2, v_3, v_4 będą szukaną wspólną bazą własną, możemy ustalić dla uwagi, że v_1, v_2 są wektorami własnymi M_1 z wartością własną 0, a v_3, v_4 wektorami własnymi M_1 z wartością własną 2. Nie wiemy jakie wartości własne mają te wektory przy działaniu na M_2, możliwe są wszystkie scenariusze, może v_1, v_2 mają wartość własną -1, może 1, a może jeden ma wartość własną 1, a drugi -1.

Pomysłem na zbadanie tego jest przyjrzenie się częściom wspólnym podprzestrzeni własnych (jąder odpowiednich macierzy). Jeśli wśród v_1, v_2 jest wektor własny M_2 z wartością własną -1, będzie on należał do $\ker(M_1) \cap \ker(M_2 + \mathbb{1})$, a jeśli jest wśród nich wektor własny o wartości własnej 1 to będzie należał do $\ker(M_1) \cap \ker(M_2 - \mathbb{1})$. Przeanalizowanie tych podprzestrzeni pozwoli nam wybrać takie wektory własne

M_1 o wartości własnej 0, że będą też wektorami własnymi macierzy M_2

$$\ker(M_1) \cap \ker(M_2 + \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(M_1) \cap \ker(M_2 - \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jak skutecznie znaleźć część wspólną jąder? Zauważmy, że jądro macierzy to zbiór wektorów spełniających układ równań zakodowanych przez wiersze macierzy. O części wspólnej dwóch jąder możemy myśleć jako o zbiorze wektorów, który spełnia oba układy równań, czyli jeden duży układ równań powstały z połączenia dwóch mniejszych, mamy

$$\ker(M_1) \cap \ker(M_2 + \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{w_1 \to w_1 - w_2 - w_4}{=}$$

$$\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\ker(M_1) \cap \ker(M_2 - \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{w_1 \to w_1 + w_3 + w_4}{=}$$

$$\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Możemy zatem wybrać dwa pierwsze wektory szukanej bazy

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Są to wektory własne M_1 z wartością własną 0, oraz dodatkowo v_1 jest wektorem własnym M_2 z wartością własną -1, a v_2 wektorem własnym M_2 z wartością własną 1. Żeby ilości wektorów własnych się zgadzały, brakuje nam jeszcze wektorów własnych M_1 z wartością własną 2, jeden z nich musi być wektorem własnym M_2 z wartością własną -1, a drugi z wartością własną 1. Szukamy ich analizując

odpowiednie części wspólne jąder jak poprzednio

$$\ker(M_1 - 2) \cap \ker(M_2 + \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{w_1 \to w_1 + w_3 - w_4}{=} \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\ker(M_1 - 2) \cap \ker(M_2 - \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{w_1 \to w_1 - w_3 + w_4}{=} \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Mamy zatem dwa brakujące wektory szukanej bazy

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Łatwo się przekonać, że v_1, v_2, v_3, v_4 faktycznie są bazą i są wektorami własnymi zarówno macierzy M_1 jak i M_2. Dodatkowo ponieważ nasze macierze były samosprzężone nasza baza jest ortogonalna, moglibyśmy je unormować, by mieć bazę ortonormalną.

15 Grupa SO(n), obroty w 2D i 3D

Na koniec przyjrzymy się obrotom, zaczniemy od fachowego pojęcia, które być może już pojawiło się na fizyce

Definicja 48. *Grupą $SO(n)$ nazywamy następujący zbiór z działaniem mnożenia macierzy*

$$SO(n) = \left\{ M \in \mathbb{R}^n_n \middle| \det(M) = 1, M^T M = \mathbb{1} \right\}$$

Nietrudno przekonać się, że faktycznie spełnione są aksjomaty grupy (iloczyn dwóch elementów $SO(n)$ należy do $SO(n)$, mnożenie macierzy jest łączne, $\mathbb{1}$ to element neutralny, M^T jest elementem odwrotnym i należy do $SO(n)$, jeśli M należy do $SO(n)$).

Grupa $SO(n)$ to grupa macierzy $n \times n$ reprezentujących obroty w n-wymiarowej przestrzeni (puryści mogliby się przyczepić, że $SO(n)$ jest abstrakcyjnym pojęciem, a wyżej zdefiniowany zbiór macierzy to jego reprezentacja, ale będziemy tu bardziej praktyczni). Nazwa jest skrótem od **special orthogonal group**, pierwsze słowo oznacza, że wyznacznik jest równy 1, a drugie odnosi się do tego, że mamy macierze ortogonalne. Możemy rozważać też ogólniejszą grupę zachowującą odległości, tzw. **orthogonal group** $O(n)$

Definicja 49. *Grupą $O(n)$ nazywamy następujący zbiór z działaniem mnożenia macierzy*

$$O(n) = \left\{ M \in \mathbb{R}^n_n \middle| M^T M = \mathbb{1} \right\}$$

podobnie jak przy poprzedniej definicji łatwo się przekonać, że aksjomaty grupy są spełnione.

Podobnie można wprowadzić $SU(n)$ - **special unitary group** (unitarne macierze $n \times n$ z wyznacznikiem równym 1) i $U(n)$ - **unitary group** (unitarne macierze $n \times n$).

Zad. 15.1

Znajdź ogólną postać elementu $SO(2)$. Jaki jest związek takiej macierzy z fizycznym obrazkiem obrotu o kąt φ?

Rozw. 15.1

Ogólna macierz 2×2 ma postać $R = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, jeśli $R \in SO(2)$, mamy następujące warunki na współczynniki (szybciej rachunkowo będzie pracować z $R^T = R^{-1}$ zamiast $R^T R = \mathbb{1}$)

$$1 = \det(R) = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = R^T = R^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

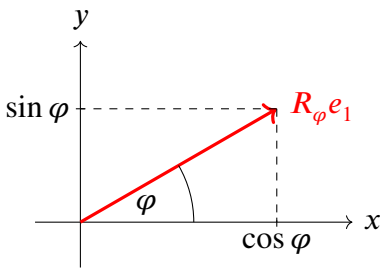
Daje nam to układ równań

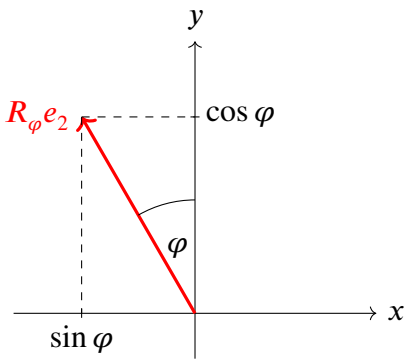
$$\begin{cases} a = d \\ b = -c \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

Mamy dwa współczynniki a, b spełniające równanie łudząco przypominające jedynkę trygonometryczną, możemy pokusić się o wprowadzenie nowej zmiennej φ i wyrażenie przez nią a, b jako $a = \cos(\varphi), b = \sin(\varphi)$. Dowolny element $SO(2)$ ma postać (dla pewnego φ)

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Pytanie, czy powyższa macierz ma faktycznie interpretację obrotu o kąt φ wokół środka układu współrzędnych. Spójrzmy, jak transformują się elementy bazy e_1 i e_2





Macierz R ma faktycznie interpretację obrotu w $\mathbb{R}^2$.

Zad. 15.2

Dla danych macierzy sprawdź, że są to macierze obrotu w $\mathbb{R}^3$, wyznacz oś oraz kąt obrotu

$$R_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad R_2 = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 14 \\ -10 & 11 & 2 \\ -10 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

Rozw. 15.2

a) Posłużymy się w tym zadaniu intuicją fizyczną. Obrót w trzech wymiarach to obrót wokół pewnej osi (wyznaczonej przez wektor n) o kąt φ. Oś obrotu możemy łatwo znaleźć zauważając, że jest to jedyny (z dokładnością do stałej) wektor, który jest zachowywany przy obrocie (nie obraca się), czyli jest wektorem własnym $R_1 n = n$. Możemy go znaleźć badając jądro

$$\ker(R_1 - \mathbb{1}) = \ker \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=n} \right\rangle$$

Możemy go sobie znormalizować

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jeśli wybierzemy sobie bazę ortonormalną $\hat{n}, f_1, f_2$, gdzie f_1, f_2 są w płaszczyźnie obrotu, to macierz obrotu będzie miała postać

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

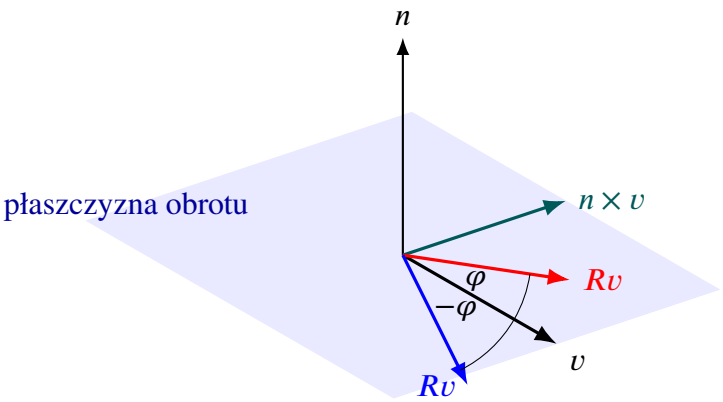
Możemy wykorzystać własność śladu do (prawie) znalezienia kąta obrotu. Jeśli mamy dwie macierze będące macierzą tego samego operatora, ale w innych bazach, to mają taki sam ślad, co wynika z jego cykliczności

$$\mathrm{Tr}\left(M_1\right) = \mathrm{Tr}\left(SM_2S^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(S^{-1}SM_2\right) = \mathrm{Tr}\left(M_2\right)$$

Zatem ślad macierzy R_1 jest równy śladowi powyższej macierzy

$$1 + 2\cos(\varphi) = \mathrm{Tr}\left(R_1\right) = 2$$

Wnioskujemy, że $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$ i $\varphi = \pm 60°$, aby ustalić, w którą stronę jest obrót, możemy spojrzeć na znak $\langle n \times v | R_1 v \rangle$, dla dowolnego v leżącego w płaszczyźnie obrotu. Jeśli obrót jest zgodny z regułą prawej dłoni (przeciwny do ruchu wskazówek zegara), powiemy że kąt jest dodatni, jeśli jest w drugą stronę, kąt będzie ujemny. Obrót zgodny z regułą prawej dłoni przybliży wektor v do wektora $n \times v$, więc iloczyn skalarny (który przed obrotem wynosi 0) będzie dodatni. Jeśli obrót będzie w drugą stronę, v oddali się od $n \times v$ i iloczyn skalarny będzie ujemny.



W naszym przypadku możemy sobie wybrać $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (mamy wtedy $\langle v | n \rangle = 0$), otrzymujemy

$$n \times v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R_1 v = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ponieważ $\langle n \times v \big| R_1 v\rangle = 3 > 0$, macierz R_1 opisuje obrót o kąt 60°
b) Rozwiązanie jest w pełni analogiczne

$$\ker(R_2 - \mathbb{1}) \ker \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -10 & 2 & 14 \\ -10 & -4 & 2 \\ -10 & -10 & -10 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=n} \rangle$$

Ślad macierzy jest równy

$$1 + 2\cos(\varphi) = \operatorname{Tr} R_2 = \frac{21}{15}$$

Zatem $\cos(\varphi) = \frac{1}{5}$, a $\varphi = \pm \arccos \frac{1}{5}$. By ustalić znak, wybieramy sobie wektor prostopadły do n i liczymy $\langle n \times v \big| R_2 v\rangle$

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$n \times v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$R_2 v = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 14 \\ -10 & 11 & 2 \\ -10 & -10 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ -30 \end{pmatrix}$$

$\langle n \times v \big| R_2 v\rangle = -12 < 0$, więc obrót wokół osi n jest o kąt $-\arccos \frac{1}{5}$

Zad. 15.3

Wyprowadź wzór na obrót w $\mathbb{R}^3$ o kąt φ wokół osi wyznaczonej przez (znormalizowany) wektor n i oblicz macierze obrotu dla

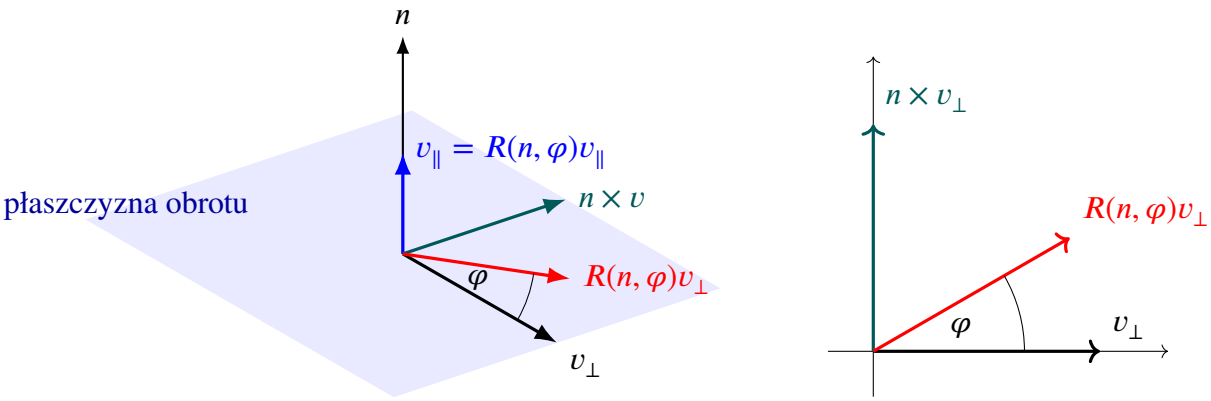
a) $n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\varphi = 90°$ b) $n = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\varphi = -\arcsin \frac{3}{5}$

Rozw. 15.3

Konstrukcja opiera się na naszej nowo nabytej intuicji obrotów w $\mathbb{R}^3$. Chcemy znaleźć ogólny wzór na $R(n, \varphi)$ - obrót wektora v wokół osi wyznaczonej przez wektor jednostkowy n o kąt φ, możemy podzielić v na składową równoległą do n - $v_\parallel$, która nie będzie się obracać i składową prostopadłą do n - $v_\perp$, która będzie wykonywać obrót w dwuwymiarowej płaszczyźnie. Wygodnie będzie rozważyć jeszcze wektor $n \times v = n \times v_\perp$, który razem z $n, v_\perp$ tworzy bazę ortogonalną $\mathbb{R}^3$. Niech $R(n, \varphi)v$ będzie wektorem v po obrocie, mamy

$$R(n, \varphi)v = R(n, \varphi)v_\parallel + R(n, \varphi)v_\perp = v_\parallel + R(n, \varphi)v_\perp$$

Wzór na obrót $v_\perp$ możemy odczytać z obrazka (korzystając z tego, że $\|n \times v\| = \|n\|\|v_\perp\| = \|v_\perp\|$, zarówno $v_\perp$ jak i $n \times v_\perp$ są tej samej długości i $v_\perp$ po obrocie musi być też tej długości)



$$R(n,\varphi)v_\perp = \cos(\varphi)v_\perp + \sin(\varphi)n \times v$$

Możemy podsumować powyższe fakty i korzystając z $v_\parallel = \langle n|v\rangle\, n$ i $v_\perp = v - v_\parallel$ napisać wynik

$$R(n,\varphi)v = v_\parallel + \cos(\varphi)v_\perp + \sin(\varphi)n \times v = \cos(\varphi)v + \sin(\varphi)n \times v + (1 - \cos(\varphi))\,\langle n|v\rangle\, n$$

Powyższy wzór to tak zwany **wzór Rodrigues'a na obrót**. Możemy zastosować jeszcze dwie sztuczki, by sprowadzić wzór do przyjemniejszej postaci, po pierwsze zauważmy, że iloczyn wektorowy $v \mapsto n \times v$ jest odwzorowaniem liniowym, więc można znaleźć jego macierz N, która ma postać

$$n \times v = \begin{pmatrix} n_y v_z - n_z v_y \\ n_z v_x - n_x v_z \\ n_x v_y - n_y v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = Nv$$

Drugi fakt jest lekko rachunkowy, okazuje się, że $n \times (n \times v) = \langle n|v\rangle\, n - v$, zwykle sprawdza się go używając notacji indeksowej, ale możemy też posłużyć się macierzą N i wykorzystać $1 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$

$$\begin{aligned} n \times (n \times v) = N^2 v &= \begin{pmatrix} -n_y^2 - n_z^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_y n_x & -n_x^2 - n_z^2 & n_y n_z \\ n_z n_x & n_z n_y & -n_x^2 - n_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n_x^2 - 1 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_y n_x & n_y^2 - 1 & n_y n_z \\ n_z n_x & n_z n_y & n_z^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ &= (n_x v_x + n_y v_y + n_z v_z) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} - v = \langle n|v\rangle\, n - v \end{aligned}$$

Nasz wzór przybiera postać

$$R(n,\varphi)v = v + \sin(\varphi)n \times v + (1 - \cos(\varphi))n \times (n \times v) = (\mathbb{1} + \sin(\varphi)N + (1 - \cos(\varphi))N^2)v$$

gdzie widzimy wzór na macierz obrotu wokół osi n o kąt φ

$$R(n,\varphi) = \mathbb{1} + \sin(\varphi)N + (1-\cos(\varphi))N^2$$

Powyższy wzór to tak zwany **wzór Rodrigues'a na macierz obrotu**. Wzór ten można przepisać (rozpisując sinus i cosinus jako szeregi i używając $N^3 = -N$)

$$R(n,\varphi) = \exp(\varphi N)$$

Ten wzór motywuje nazywanie macierzy N macierzą infinitezymalnego obrotu (mocno nadprogramowa uwaga jest taka, że macierz N jest elementem tzw. algebry Liego $\mathfrak{so}(3)$ i powyższa obserwacja jest związana z istnieniem exponencjalnej mapy z $\mathfrak{so}(3)$ do $SO(3)$). Możemy użyć tego wzoru, by obliczyć macierze obrotu w dwóch podpunktach
a)

$$n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \varphi = 90^\circ \quad R(n,\varphi) = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & 20 & -12 \\ -20 & 0 & -15 \\ -12 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

b)

$$n = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \varphi = -\arcsin\frac{3}{5} \quad R(n,\varphi) = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 24 & -3\sqrt{5} & -2 \\ 3\sqrt{5} & 20 & 6\sqrt{5} \\ -2 & -6\sqrt{5} & 21 \end{pmatrix}$$

A Zadania dodatkowe: Tw Cayleya-Hamiltona, wektory i wartości własne, diagonalizacja, postać Jordana

Zad. A.1

Oblicz

$$e^{itA}e^{itB}$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 5i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Zad. A.2

Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy endomorfizmu

$$M = \begin{pmatrix} 4-a & 6-2a & a-5 \\ a-2 & 2a-3 & 2-a \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Dla jakich wartości parametru a macierz nie jest diagonalizowalna? Znajdź dla tych wartości a rozkład Jordanowski (macierze S i J, że $M = S^{-1}JS$). Dla pozostałych wartości parametru a podaj macierz przejścia od bazy standardowej do bazy d, która diagonalizuje endomofizm. Podaj postać (diagonalną) endomorfizmu w nowej bazie

Zad. A.3

Znajdź wartości własne i wektory własne następujących odwzorowań
a)

$$F : \mathbb{R}_2^2 \to \mathbb{R}_2^2$$
$$F(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}_n[\cdot] \to \mathbb{R}_n[\cdot]$$
$$(\mathbf{F}f)(t) = (t+1)f'(t)$$

Zad. A.4

Znajdź wektory i wartości własne cyrkulanty, oraz jej wyznacznik. Cyrkulantą nazywamy macierz $n \times n$ której pierwszy wiersz jest złożony z pewnych n liczb zespolonych a_1, a_2 … a_n, a kolejne wiersze są przesunięte, tzn

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

Zad. A.5

Znajdź wartości własne, przestrzenie własne, przestrzenie pierwiastkowe następujących macierzy. Oblicz wskazane wyrażenia

a) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ $\exp(A) = ?$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ $B^{2026} = ?$

c) $C = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -1 \\ 9 & -10 & 1 \\ 12 & -18 & 4 \end{pmatrix}$ $\exp(C) = ?$ d) $D = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $D^{77} = ?$

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\exp(E) = ?$

Zad. A.6

Niech $F \in End(\mathbb{K}_2[\cdot])$ będzie dany wzorem $F(v)(t) = v(t+1) - 2v'(t)$. Zbadać, czy istnieje baza, w której F ma macierz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Zad. A.7

Zbadać dla jakiej wartości $t \in \mathbb{C}$ macierz $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ t & t+3 \end{pmatrix}$ można wyrazić jako wielomian od macierzy $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Zad. A.8

Znaleźć bazę i postać Jordana następujących macierzy, znaleźć rozkład na część diagonalizowalną i nilpotentną

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Zad. A.9

Dla danych macierzy M znajdź macierz S taką, że $S^{-1}MS$ ma postać Jordana

a) $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Zad. A.10

Niech $V = \mathbb{K}_3[x, y]$ będzie przestrzenią wielomianów stopnia ≤ 3 zmiennych x i y. Znaleźć bazę i rozkład Jordnanowski operatora $N \in \mathrm{End}(V)$, zdefiniowanego wzorem $N = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$

Zad. A.11

Dana jest macierz

$$M_a = \begin{pmatrix} 2 & 3-a & 3-a \\ -1 & a-2 & a-3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Dla jakiej wartości parametru a macierz M_a nie jest diagonalizowalna? Dla tej wartości parametru znajdź rozkład M_a na cześć diagonalizowalną i nilpotentną, a ponadto podaj postać Jordana J_a oraz macierz S taką że $J_a = S^{-1}M_aS$
b) Znajdź wartość parametru a dla którego macierz M_a ma dokładnie dwie wartości własne i jest diagonalizowalna. Oblicz $\exp\left(M_a\right)$ dla tej wartości a

Zad. A.12

Oblicz wyznaczniki (n to rozmiar macierzy)

a) $D_n = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ b) $D_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

Zad. A.13

Które z macierzy są macierzami tego samego endomorfizmu przestrzeni $\mathbb{R}^3$, ale w różnych bazach

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Zad. A.14

Znajdź postać Jordana następujących macierzy $n \times n$ dla $n \geq 2$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ a) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Zad. A.15

Udowodnij że jeśli $v_1, v_2 \ldots v_k$ są wektorami własnymi pewnej macierzy A (niekoniecznie wszystkimi) i odpowiadające im wartości własne są parami różne, to tworzą układ liniowo niezależny

WSKAZÓWKI

Zad. A.1: $AB \neq BA$, więc $e^{itA}e^{itB} \neq e^{it(A+B)}$, oba eksponensy trzeba policzyć oddzielnie (Cayley-Hamilton albo diagonalizacja)

Zad. A.2: Jeśli wielomian charakterystyczny ma $n = \dim(M)$ różnych pierwiastków o krotności 1, macierz jest diagonalizowalna, w przeciwnym wypadku możemy mieć klatkę Jordana 2×2 bądź większą

Zad. A.3: Znajdź macierz odwzorowania F w dowolnej bazie, będzie to macierz $n \times n$, którą można zdiagonalizować znanymi metodami

Zad. A.4: Problem tego typu najprościej rozwiązać przez zgadnięcie, poszukaj wektorów własnych postaci $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} z & z^2 & z^3 & \dots & z^n \end{pmatrix}^T$. Dla jakich z jest to wektor własny? Czy możliwe jest że są inne wektory własne? Jak wpaść na takie podstawienie?

Zad. A.5: Wartości własne to pierwiastki wielomianu charakterystycznego $\omega_M(\lambda) = \det(M - \lambda\mathbb{1})$. Przestrzenie własne to $\ker(M-\lambda\mathbb{1})$, a przestrzenie pierwiastkowe to $\ker(M-\lambda\mathbb{1})^k$ gdzie λ to wartość własna, a k to jej krotność. Funkcje od operatora można obliczyć z postaci $M = S^{-1}DS$

Zad. A.6: Na początek znajdź macierz operatora F w dowolnej bazie. Warto skorzystać z własności macierzy, które nie zależą od bazy, np. wyznacznika. Co jeśli wyznaczniki okażą się te same?

Zad. A.7: Jaka jest ogólna postać wielomianu od macierzy A po uproszczeniu twierdzeniem Cayleya-Hamiltona?

Zad. A.8: Jest to standardowe zadanie w duchu zadania 4.1 z ćwiczeń. Znalezienie części diagonalizowalnej i nilpotentnej zwykle wymaga policzenia macierzy zmiany bazy, ale może da się tu prościej

Zad. A.9: Jest to standardowe zadanie w duchu zadania 4.1 z ćwiczeń. Macierz S to pewna macierz zmiany bazy

Zad. A.10: Wygodnie jest znaleźć macierz N w bazie jednomianów, a następnie użyć znanych metod szukania bazy i postaci Jordana. Przestrzeń V jest 10-wymiarowa, ale wiele wektorów własnych powinno być oczywistych, więc procedura szukania bazy i postaci Jordana może być zastosowana bez wypisywania macierzy 10×10

Zad. A.11: Jeśli macierz nie jest diagonalizowalna to jednen z pierwiastków wielomianu charakterystycznego ma krotność większą niż 1

Zad. A.12: Sprytne zastosowanie wzoru Laplace'a wzdłuż odpowiednich wierszów/kolumn powinno dać wzór rekurencyjny na D_n, który można rozwiązać podnosząc pewną macierz do n-tej potęgi

Zad. A.13: Jakie własności macierzy nie zależą od bazy i pozwalają definitywnie stwierdzić, że dwie macierze nie mogą być macierzą tego samego endomorfizmu, ale w różnych bazach?

Zad. A.14: Czasem w tego typu problemach warto sprawdzić co się dzieje dla małych n, by wyrobić sobie intuicję

Zad. A.15: Wykorzystaj fakt, że $(A - \lambda_j\mathbb{1})v_i = (\lambda_i - \lambda_j)v_i$

ODPOWIEDZI

Zad. A.1: $e^{itA}e^{itB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\left(3e^{2it} - 10e^{6it} + 15e^{10it}\right) & \frac{15i}{8}\left(-e^{it} + e^{5it}\right)^2 \\ -\frac{3i}{8}\left(-e^{it} + e^{5it}\right)^2 & \frac{1}{8}\left(15e^{2it} - 10e^{6it} + 3e^{10it}\right) \end{pmatrix}$

Zad. A.2: Wartości własne 1, -1 i $a-1$, jeśli są różne to macierz jest diagonalizowalna i ma 3 wektory własne. Jeśli wartości własne się powtarzają trzeba być ostrożnym, dla $a = 2$ macierz jest diagonalizowalna i powyższe wzory na wektory własne są poprawne, dla $a = 0$ mamy klatkę Jordana dla wartości własnej -1. Rozkład Jordanowski to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -5 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Dla pozostałych wartości a mamy (szukana macierz zmiany bazy to trzecia macierz z lewej strony równania)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1-a \\ 0 & -1 & a \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}\frac{1}{a}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a-1 \\ a & a & -a \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & 6-2a & a-5 \\ a-2 & 2a-3 & 2-a \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Zad. A.3: a) $\sigma(F) = \{-2, -1, 2, 4\}$, $\mathbf{v}_{-2} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
b) $\sigma(F) = \{0, 1, 2 \dots n\}$, $\mathbf{v}_k(t) = (t+1)^k$, $F\mathbf{v}_k = k\mathbf{v}$

Zad. A.4: Wektory własne to $\mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} z_k & z_k^2 & z_k^3 & \dots & z_k^n \end{pmatrix}^T$ dla $k = 0, 1, 2 \dots n-1$, gdzie $z_k = e^{\frac{2\pi k}{n}}$ to pierwiastki 1 stopnia n. Daje nam to $n = \dim(M)$ niezależnych liniowo wektorów własnych, więc nie może być innych wektorów własnych. Wartości własne to $\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} z_k^j$, a wyznacznik jest iloczynem wartości własnych

Zad. A.5: a) Macierz jest diagonalizowalna, mamy trzy różne wartości i wektory własne, przestrzenie własne (równe przestrzeniom pierwiastkowym) to podprzestrzenie rozpięte na danym wektorze własnym

$$\sigma(A) = \{1, \frac{1}{8}(1 - 3i\sqrt{7}), \frac{1}{8}(1 + 3i\sqrt{7})\}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_{\frac{1}{8}(1-3i\sqrt{7})} = \begin{pmatrix} 4i \\ 3i + \sqrt{7} \\ \sqrt{3}(\sqrt{7} - i) \end{pmatrix} \qquad v_{\frac{1}{8}(1+3i\sqrt{7})} = \begin{pmatrix} -4i \\ -3i + \sqrt{7} \\ \sqrt{3}(\sqrt{7} + i) \end{pmatrix}$$

$\exp(A)$ jest paskudny
b) Macierz ma postać Jordana z dwoma klatkami o tej samej wartości własne, przykładowa baza Jordana poniżej, przestrzeń własna jest rozpięta przez dwa pierwsze wektory bazy, przestrzeń pier-

wiastkowa to $\mathbb{R}^3$

$$\sigma(B) = \{1\}$$

$$v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad v_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$B^{2026} = \begin{pmatrix} 2027 & -4052 & 2026 \\ 4052 & -8103 & 4052 \\ 6078 & -12156 & 6079 \end{pmatrix}$$

c) Macierz jest diagonalizowalna, mamy trzy różne wartości i wektory własne, przestrzenie własne (równe przestrzeniom pierwiastkowym) to podprzestrzenie rozpięte na danym wektorze własnym

$$\sigma(C) = \{-4, 1, 4\}$$

$$v_{-4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(C) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4e^4} + e + \frac{3e^4}{4} & \frac{5}{4e^4} - 2e + \frac{3e^4}{4} & -\frac{1}{4e^4} + e - \frac{3e^4}{4} \\ -\frac{3}{2e^4} + e + \frac{e^4}{2} & \frac{5}{2e^4} - 2e + \frac{e^4}{2} & -\frac{1}{2e^4} + e - \frac{e^4}{2} \\ -\frac{9}{4e^4} + 2e + \frac{e^4}{4} & \frac{15}{4e^4} - 4e + \frac{e^4}{4} & -\frac{3}{4e^4} + 2e - \frac{e^4}{4} \end{pmatrix}$$

d) Macierz ma postać Jordana z jedną klatką, przykładowa baza Jordana poniżej, przestrzeń własna jest rozpięta przez wektor własny (pierwszy wektor bazy), przestrzeń pierwiastkowa to $\mathbb{R}^3$

$$\sigma(B) = \{1\}$$

$$v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad v_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{77} = \begin{pmatrix} -17863 & -17633 & -9163 \\ 11858 & 11705 & 6083 \\ 12012 & 11858 & 6161 \end{pmatrix}$$

e) Macierz ma postać Jordana z jedną klatką, przykładowa baza Jordana poniżej, przestrzeń własna jest rozpięta przez wektor własny (pierwszy wektor bazy), przestrzeń pierwiastkowa to $\mathbb{R}^3$

$$\sigma(B) = \{1\}$$

$$v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp(E) = \begin{pmatrix} e & e & e \\ -e & \frac{3e}{2} & \frac{e}{2} \\ e & -\frac{e}{2} & \frac{e}{2} \end{pmatrix}$$

Zad. A.6: Tak, można znaleźć postać Jordana obu macierzy i ponieważ są one takie same wnioskujemy że macierz F i macierz z zadania to ta sama macierz, ale w różnych bazach. Bazą w której macierz F przybiera postać z zadania jest $f = \{t^2 - t, 1, -t\}$

Zad. A.7: Tw. Cayleya-Hamiltona mówi nam, że dowolny wielomian od macierzy A upraszcza się do wielomianu liniowego $\alpha A + \beta \mathbb{1}$, bo jest to macierz 2×2. Wystarczy sprawdzić czy istnieje takie t, by $B = \alpha A + \beta \mathbb{1}$ dla pewnych stałych α i β. Odpowiedź to tak, dla $t = \frac{4}{5}$ macierz B może zostać wyrażona jako wielomian od macierzy A

Zad. A.8: Postać Jordana i części diagonalizowalna i nilpotentna są jednoznaczne, baza Jordana ma pewną swobodę, by upewnić się że jest poprawna najlepiej sprawdzić czy zachodzi wzór $M = S^{-1} J S$. Ponieważ mamy jedną wartość własną część diagonalizowalna jest łatwa do znalezienia, można użyć $N = M - D$ zamiast liczyć macierze zmiany bazy

a)

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad v_2^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \quad v_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zad. A.9: Macierz S to macierz zmiany bazy z bazy Jordana do bazy standardowej tzn $S = [id]_f^e$, na ćwiczeniach oznaczaliśmy ją S^{-1}, ale tu oznaczenie zostało zmienione by sprawdzić czujność.

Jej kolumny to wektory bazy Jordana zapisane w bazie standardowej, przez to macierz ta nie jest jednoznaczna, poniżej przykładowe macierze S i (jednoznaczne) postacie Jordana a)

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Zad. A.10: Wybieramy bazę $e = \{1, x, x^2, x^3, y, y^2, y^3, xy, x^2y, xy^2\}$, zauważmy że N zawiera pochodną po x i y, więc pierwsze siedem elementów bazy jest zerowanych przez operator N, są to wektory własne, trzeba się przyjrzeć pozostałym elementom bazy. Mamy $Ne_8 = e_1$, $Ne_9 = 2e_2$, $Ne_{10} = 2e_5$, więc są 3 klatki 2×2, oraz 4 klatki 1×1. Baza Jordana to $\mathcal{B} = \{x^2, x^3, y^2, y^3, 1, xy, 2x, x^2y, 2y, xy^2\}$, a postać Jordana ma kolejno 4 klatki 1×1 i trzy klatki 2×2 z zerami jako wartościami własnymi. Rozkład Jordana to $M = S^{-1}JS$, który sobie można łatwo zapisać z powyższymi informacjami.

Zad. A.11: Wartości własne to $\sigma(M_a) = \{1, 2, a\}$, macierz może być niediagonalizowalna jeśli a jest równe 1 albo 2 (wartość własna się powtarza, tylko wtedy może być klatka Jordana większa niż 1×1). Przypadek a) odpowiada $a = 2$, natomiast b) odpowiada $a = 1$ a) Macierz S to macierz zmiany bazy z bazy Jordana do bazy standardowej, nie jest jednoznaczna i najlepiej sprawdzić czy $J_a = S^{-1}M_aS$ zachodzi

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\exp\left(M_1\right) = \begin{pmatrix} e^2 & 2\left(e^2 - e\right) & 2\left(e^2 - e\right) \\ e - e^2 & 3e - 2e^2 & -2\left(e^2 - e\right) \\ e^2 - e & 2\left(e^2 - e\right) & 2e^2 - e \end{pmatrix}$$

Zad. A.12: Ponieważ pierwszy element diagonali różni się od pozostałych, trzeba użyć rozwinięcia Laplace'a wzdłuż ostatniej kolumny, a następnie ponownie dla jednego z powstałych członów, by odtworzyć postać macierzy z zadania, daje to wzór rekurencyjny. a) $D_{n+2} = 3D_{n+1} - D_n$, $D_1 = 2$, $D_2 = 4$, $D_n = 2^n$
b) $D_{n+2} = D_{n+1} + 6D_n$, $D_1 = -1$, $D_2 = 5$, $D_n = frac15\left((-2)^{n+2} + 3^n\right)$

Zad. A.13: Wyznacznik i wielomian charakterystyczny nie zależą od bazy, więc jeśli dla dwóch macierzy są różne to możemy być pewni, że nie są to macierze tego samego endomorfizmu. Wyznaczniki macierzy z zadania to $D_1 = -8$, $D_2 = -2$, $D_3 = -1$, $D_4 = 1$, $D_5 = 1$, $D_6 = 1$. Możemy definitywnie stwierdzić że macierze A_1, A_2 i A_3 to macierze różnych endomorfizmów i żadna inna macierz z zadania nie jest macierzą tego samego endomorfizmu w innej bazie. Macierze A_4, A_5 i A_6 mają ten sam wyznacznik, więc możliwe jest że mamy tu dwie macierze tego samego endomorfizmu, ale nie jest to jeszcze pewne. Spójrzmy na wielomiany charakterystyczne, $\omega_{A_4}(\lambda) = -x^3 - x^2 + x + 1$, $\omega_{A_5}(\lambda) = -x^3 + 1$, $\omega_{A_6}(\lambda) = -x^3 - x^2 + x + 1$. Macierz A_5 ma inny wielomian charakterystyczny, ale A_4 i A_6 mają takie same wielomiany charakterystyczne. Niestety -1 jest podwójnym pierwiastkiem, więc możliwe że A_6 ma postać Jordana z klatką 2×2, ale jak łatwo sprawdzić ma ona 3 wektory własne i jest diagonalizowalna. Macierze A_4 i A_6 to macierze tego samego endomorfizmu, ale w innych bazach.

Zad. A.14: a) Wielomian charakterystyczny to $\omega_B(\lambda) = (\lambda - 1)^n$, postać Jordana ma 1 na diagonali, pozostaje pytanie ile jest klatek i jakie są ich rozmiary, aby na nie odpowiedzieć trzeba zbadać $A - \mathbb{1}$. Nie trudno się przekonać, że $(A - \mathbb{1})^k$ w działaniu na wektor bazy e_j produkuje element bazy o indeksie $j - k$, oraz elementy bazy o mniejszych indeksach. Zachodzi $(A - \mathbb{1})^{n-1} e_n = e_1$ i $(A - \mathbb{1})^n e_n = 0$, więc mamy serię długości n, która jest możliwa tylko jeśli mamy klatkę Jordana $n \times n$, ponieważ przestrzeń wektorowa ma wymiar n, nie możemy mieć więcej klatek i postać Jordana to pojedyncza klatka $n \times n$

b) Wielomian charakterystyczny to $\omega_B(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n - 1)$, więc mamy n różnych wartości własnych (zespolonych pierwiastków 1). Macierz jest diagonalizowalna, a postać Jordana to macierz z pierwiastkami jedynki na diagonali tzn $\lambda_k = e^{i2\pi k/n}$, $k \in \{0, 1 \dots n-1\}$

Zad. A.15: Szkic dowodu jest następujący: rozważmy równość dla pewnych liczb α_i $\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_k v_k = 0$, jeśli są to wektory niezależne liniowo to suma może być równa zeru tylko jeśli wszystkie α_i. Jeśli zadziałamy na obie strony $A - \lambda_j \mathbb{1}$, wyraz z v_j się skasuje, a pozostałych możemy zastąpić macierz przez $(\lambda_i - \lambda_j)$ (patrz wskazówka). Jeśli będziemy teraz to powtarzać, po kolei możemy kasować wektory własne, jeśli pomnożymy równość przez $A - \lambda_j \mathbb{1}$ dla wszystkich j poza pewnym j_0 skasujemy wszystkie wektory poza jednym i dostaniemy $\prod_{j \neq j_0} (\lambda_{j_0} - \lambda_j) \alpha_{j_0} v_{j_0} = 0$. Ponieważ z założenia wartości własne są parami różne, to α_{j_0} musi się równać 0, ponieważ jest to prawda dla dowolnego j_0, wnioskujemy że wszystkie $\alpha_j = 0$, więc jest to układ LNZ.

B Zadania dodatkowe: Formy kwadratowe

Zad. B.1

Znajdź sygnaturę i bazę diagonalizującą dane formy kwadratowe $Q : V \to \mathbb{R}$ dla
a) $V = \mathbb{R}^3$, $Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$
b) $V = \mathbb{R}^4$, $Q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_1x_4 + 2x_2x_3 + 8x_2x_4 + 12x_3x_4$
c) $V = \mathbb{R}^2_2$, $Q(X) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X^T X\right)$
d) $V = \mathbb{R}_2[\cdot]$, $Q(v) = \int_0^1 v(t)v(1-t)dt$
e) $V = \{x \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, $Q(x) = 9(x_1^2 - x_2^2) + 5(x_3^2 - x_4^2)$

Zad. B.2

W zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ znajdź sygnaturę formy kwadratowej, której macierz to

$$\begin{pmatrix} 9a-3 & \sqrt{3}(5a-1) & 3\left(a^2+2a-1\right) \\ \sqrt{3}(5a-1) & a^2+9a-1 & \sqrt{3}\left(2a^2+4a-1\right) \\ 3\left(a^2+2a-1\right) & \sqrt{3}\left(2a^2+4a-1\right) & 6a^2+6a-3 \end{pmatrix}$$

Zad. B.3

Niech $V = \mathbb{R}^3$, znajdź sygnaturę i bazę diagonalizującą formę kwadratową $Q : V \to \mathbb{R}$ w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$

$$Q(x) = tx_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + tx_2^2 + 2x_2x_3 + tx_3^2$$

Zad. B.4

Niech $n \geq 1$, $V_n = \mathbb{R}^n$. Rozważmy formy kwadratowe $P_n, Q_n : V \to \mathbb{R}$

$$P_n(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \min(i,j)x_ix_j$$

$$Q_n(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \max(i,j)x_ix_j$$

Oblicz rzędy i sygnatury powyższych form, dla jakich wartości n istnieje $F \in \mathrm{End}(V_n)$, taki że $Q_n(F(x)) = P_n(x)$

Zad. B.5

Niech $V = \mathbb{R}^3$. Rozważmy formy kwadratowe $P, Q : V \to \mathbb{R}$

$$P(x) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 2tx_1x_3 + x_2^2$$
$$Q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 - x_3^2$$

Dla jakich $t \in \mathbb{R}$
a) $P(x) > Q(x)$ dla każdego $0 \neq x \in V$
b) $P(x) \geq Q(x)$ dla każdego $x \in V$

Zad. B.6

Niech $V = \mathbb{R}^3$. Rozważmy formy kwadratowe $P, Q : V \to \mathbb{R}$

$$P(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$
$$Q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 4x_2x_3 + tx_3^2$$

Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ istnieje liniowy operator $F : V \to V$, taki że $P(x) = Q(F(x))$, podaj wzór na F dla tych t

WSKAZÓWKI

Zad. B.1: Zadanie analogiczne do zadania 6.1, zastosuj algorytm Lagrange'a by znaleźć sygnaturę i współrzędne diagonalizujące, a następnie znajdź nową bazę

Zad. B.2: Strategia jest podobna do zadania 7.2, kryterium Sylvestera pozwala znaleźć sygnaturę jeśli minory są różne od zera. W pozostałych przypadkach trzeba użyć algorytmu Lagrange'a

Zad. B.3: Należy wykorzystać algorytm Lagrange'a, bo kryterium Sylvestera daje nam tylko informacje o sygnaturze i nie jest przydatne przy szukaniu bazy diagonalizującej

Zad. B.4: Spróbuj użyć kryterium Sylvestera, sprytna redukcja wierszowa pozwala łatwo obliczyć wyznaczniki

Zad. B.5: Rozważ $P(x) - Q(x)$, (czy jest to forma kwadratowa?) jak warunki z a) i b) tłumaczą się na sygnaturę nowej formy kwadratowej?

Zad. B.6: Parametr t pojawia się tylko w formie $Q(x)$ przy wyrazie x_3, więc łatwo zdiagonalizować obie formy algorytmem Lagrange'a

ODPOWIEDZI

Zad. B.1: Baza diagonalizująca nie jest jednoznaczna, poniżej przykładowe odpowiedzi
a) sygnatura (3,0), przykładowa baza diagonalizująca $f_1 = e_1, f_2 = -e_1 + e_2, f_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$
b) sygnatura (2,2), przykładowa baza diagonalizująca $f_1 = e_1, f_2 = -e_1 + e_2, f_3 = -4e_1 + e_2 + e_3, f_4 = -9e_1 + e_2 + 2e_3 + e_4$
c) sygnatura (2,2), przykładowa baza diagonalizująca $f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
d) sygnatura (2,1), przykładowa baza diagonalizująca $f_1 = 1, f_2 = t - \frac{1}{2}, f_3 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{12}$
e) sygnatura (2,1), przykładowa baza diagonalizująca $f_1 = 5e_1 - 5e_2 + 9e_3 - 9e_4, f_2 = 5e_1 - e_2 - 3e_3 - e_4, f_3 = e_1 - 5e_2 + e_3 + 3e_4$

Zad. B.2: Minory to

$$D_1 = 9(a - \frac{1}{3})$$
$$D_2 = 9(a+1)a(a - \frac{2}{3})$$
$$D_3 = 9(a+1)^2a^2(a-1)(a-2)$$

Daje to nam sygnaturę dla $a \notin \{-1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 2\}$, dla tych przypadków należy użyć algorytmu Lagrange'a dopełniania do kwadratu

parametr	$a < -1$	$a = -1$	$-1 < a < 0$	$a = 0$	$0 < a < \frac{1}{3}$	$a = \frac{1}{3}$
sygnatura	(2,1)	(0,1)	(0,3)	(0,1)	(2,1)	(2,1)
$\frac{1}{3} < a < \frac{2}{3}$	$a = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} < a < 1$	$a = 1$	$1 < a < 2$	$a = 2$	$2 < a$
(2,1)	(2,1)	(2,1)	(2,0)	(3,0)	(2,0)	(2,1)

Zad. B.3: Algorytm Lagrange'a dla $t \neq 0$ i $t \neq -1$ daje nam

$$Q(x) = t\left(x_1 + \frac{1}{t}x_2 + \frac{1}{t}x_3\right)^2 + (t - \frac{1}{t})(x_2 + \frac{1}{t+1}x_3)^2 + \frac{t^2+t-2}{t+1}x_3^2 = ty_1^2 + (t - \frac{1}{t})y_2^2 + \frac{(t-1)(t+2)}{t+1}y_3^2$$

Sygnatura zależy od znaków współczynników t, $(t - \frac{1}{t})$ i $\frac{(t-1)(t+2)}{t+1}$. Musimy oddzielnie rozważyć przypadki $t = -1$ i $t = 0$

$$Q(x) = -(x_1 - x_2 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2 \text{ dla } t = -1$$
$$Q(x) = 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_3) - 2x_1^2 \text{ dla } t = 0$$

Mamy następujące przypadki sygnatury

parametr	$t < -2$	$t = -2$	$-2 < t < -1$	$t = -1$
sygnatura	(0,3)	(0,2)	(1,2)	(1,2)
$-1 < t < 0$	$t = 0$	$0 < t < 1$	$t = 1$	$1 < t$
(1,2)	(1,2)	(1,2)	(1,0)	(3,0)

Bazę diagonalizującą otrzymujemy odwracając macierz A dającą związek między nowymi i starymi współrzędnymi $y = Ax$, jej kolumny to elementy bazy diagonalizującej

$$\begin{cases} f_1 = e_1 \\ f_2 = -\frac{1}{t}e_1 + e_2 \\ f_3 = -\frac{1}{1+t}e_1 - \frac{1}{1+t}e_2 + e_3 \end{cases} \quad \text{dla } t \neq 0 \wedge t \neq -1$$

$$\begin{cases} f_1 = e_1 \\ f_2 = e_1 + \frac{1}{2}(e_2 + e_3) \\ f_3 = \frac{1}{2}(e_2 - e_3) \end{cases} \quad \text{dla } t = -1$$

$$\begin{cases} f_1 = e_2 + e_3 \\ f_2 = \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3 \\ f_3 = e_1 - e_2 - e_3 \end{cases} \quad \text{dla } t = 0$$

Zad. B.4: Sygnatura P_n to (n,0), a sygnatura Q_n to (1,n-1). F istnieje tylko dla $n = 1$ i jest dane wzorem $F(x) = x$

Zad. B.5: Odpowiedź na to zadanie uzyskujemy badając sygnaturę formy kwadratowej $P(x) - Q(x)$, warunek a) będzie spełniony jeśli sygnatura jest równa (3,0), a warunek b) jeśli sygnatura (p,q) spełnia $q = 0$. Podpunkt a) będzie spełniony dla $-2 < t < 2$, a podpunkt b) dla $-2 \leq t \leq 2$

Zad. B.6: Po zdiagonalizowaniu algorytmem Lagrange'a otrzymujemy (w $P(x)$ najpierw uzupełniamy kwadrat z x_3, a w $Q(x)$ najpierw x_1 dla ładniejszych postaci wyników)

$$P(x) = (x_3 + x_2 + 2x_1)^2 + 4x_2^2 - x_1^2$$
$$Q(y) = (y_1 + 2y_2 + y_3)^2 + y_2^2 + (t-1)y_3^2$$

F będzie istniał tylko dla $t < 1$ kiedy sygnatura obu form to (2,1). Żeby znaleźć postać F można przyrównać kwadraty, jeśli poniższe będzie zachodzić, możemy być pewni że $P(x) = Q(y)$ jeśli $y = Fx$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 = x_3 + x_2 + 2x_1 \\ y_2 = 2x_2 \\ \sqrt{1-t}y_3 = x_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)x_1 - 3x_2 + x_3 \\ y_2 = 2x_2 \\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{1-t}}x_1 \end{cases}$$

Macierz F jest równa

$$F = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{\sqrt{1-t}} & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1-t}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C Zadania dodatkowe: Iloczyn skalarny

Zad. C.1

Niech V będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym, a W jej podprzestrzenią. Znajdź bazę ortonormalną W w podanych przypadkach

a) $V = \mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym i $W = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle$

b) $V = \mathbb{R}_3[\cdot]$ z iloczynem skalarnym $\langle w|v\rangle = w(-1)v(-1) + w(0)v(0) + w'(0)v'(0) + w(1)v(1)$ i $W = \langle x+1, x^2, x^3\rangle$

c) $V = C([-1,1])$ (funkcje ciągłe na odcinku $[-1,1]$) z iloczynem skalarnym $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ i $W = \langle 1, x+1, |x|, \sin(x)\rangle$

Zad. C.2

W czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej płaszczyzna Π_1 przechodzi przez punkty $\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\\2\\1\end{pmatrix}$,

natomiast płaszczyzna Π_2 przechodzi przez punkty $\begin{pmatrix}1\\2\\4\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\3\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\5\\6\\6\end{pmatrix}$

a) Czy płaszczyzny są równoległe?
b) Jaka jest odległość między płaszczyznami?

Zad. C.3

Rozważmy proste w $\mathbb{R}^4$

$$L_1 = \begin{pmatrix}0\\7\\1\\2\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \rangle \qquad L_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \rangle$$

Znajdź płaszczyznę Π zawierającą punkt $x = \begin{pmatrix}4\\1\\3\\1\end{pmatrix}$ i spełniającą $\Pi \perp L_1$, $\Pi \cap L_2 = \emptyset$

Zad. C.4

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozważmy proste

$$L_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} \rangle \qquad L_2 = \{ \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big| a+b=1, b-2c=8 \}$$

Znajdź prostą $L \subset \mathbb{R}^3$ taką, że odległość L od L_1 i L_2 to 3, oraz $L \perp L_1, L_2$

Zad. C.5

Niech $n \geq 1$, $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$, oraz $a \in \mathbb{R}$. Zdefiniujmy

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \Big| \langle x|v\rangle = a\}$$

Znajdź wzór na odległość punktu $y \in \mathbb{R}^n$ od zbioru A

Zad. C.6

W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}_3[\cdot]$ z iloczynem skalarnym

$$\langle v|w\rangle = \int_{-1}^{1} v(t)w(t)dt$$

Wyznacz odległość wielomianu

$$w_0 = 1 + t + t^2 + t^3$$

od płaszczyzny wielomianów

$$\Pi = \left\{ w \in \mathbb{R}_3[\cdot] \Big| \begin{smallmatrix} w''(1)-15w(1)=w''(-1)-15w(-1) \\ 2w''(1)+20w'(0)+12w(0)=9\langle w|1\rangle-2 \end{smallmatrix} \right\}$$

Zad. C.7

Oblicz objętość (czterowymiarową) czterowymiarowego równoległościanu w czterowymiarowej przestrzeni Euklidesa, którego jeden wierzchołek w pewnym układzie kartezjańskim ma współrzędne

$$a = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

zaś wierzchołki mające wspólną krawędź z a mają współrzędne

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Jaka jest objętość (trójwymiarowa) jego „ściany bocznej” zawierającej wierzchołki abcd

Zad. C.8

Niech $V = \mathbb{R}_4[\cdot]$, sprawdzić, że następujący operator $\mathbf{P}$ jest rzutem, znajdź jego obraz i jądro

$$(\mathbf{P}v)(t) = v(2) + (t-2)\dot{v}(2) + \frac{1}{2}(t-2)^2\ddot{v}(2)$$

Zad. C.9

Znaleźć wartości i wektory własne podanych macierzy A. Sprawdzić, że jest to macierz normalna, oraz znaleźć ortonormalną bazę przestrzeni $\mathbb{C}^3$ złożoną z jej wektorów własnych i jej rozkład spektralny

a) $\begin{pmatrix} 4 & i \\ -i & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ i & 1 & -1-i \\ -1-i & 1+i & 2-2i \end{pmatrix}$

Zad. C.10

Niech v, w będzie parą ortogonalnych unormowanych wektorów w przestrzeni unitarnej. Dla każdego z operatorów

$$A = |v\rangle\langle v| \qquad B = |v\rangle\langle w| \qquad C = |v\rangle\langle w| + |w\rangle\langle v|$$
$$D = |v\rangle\langle w| - |w\rangle\langle v| \qquad E = |v\rangle\langle w| + i\,|w\rangle\langle v| \qquad F = |v\rangle\langle w| + 2\,|w\rangle\langle v|$$

sprawdzić, czy operator jest normalny, hermitowski, unitarny

Zad. C.11

Czy istnieje w przestrzeni $\mathbb{C}^2$ iloczyn skalarny taki, że operator określony wzorem $F(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x$ jest: a) normalny; b) samosprzężony

Zad. C.12

Niech $A \in \mathbb{R}^n_n$, udowodnij że dla $n = 3$ zachodzi następujący wzór

$$\det(A) = \frac{1}{6}\left(2\,\mathrm{Tr}\,A^3 - 3\,\mathrm{Tr}\,A^2\,\mathrm{Tr}\,A + (\mathrm{Tr}\,A)^3\right)$$

Jakie byłyby analogiczne wzory dla $n = 2$ i $n = 4$ wyrażające wyznacznik przez ślady?

Zad. C.13

Dana jest forma kwadratowa Q na przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + x_3^2 - 2x_3x_4 + x_4^2$$

Znaleźć
a) macierz B formy kwadratowej Q
b) bazę ortonormalną diagonalizującą Q
c) macierz ortogonalną $\mathcal{O}$ taką, że macierz $\mathcal{O}^{-1}B\mathcal{O}$ jest diagonalna
d) sygnaturę formy kwadratowej Q

WSKAZÓWKI

Zad. C.1: Zastosuj algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta

Zad. C.2: Kiedy dwie proste są równoległe? Jaki daje to warunek na opis parametryczny? Jak to uogólnić do przypadku dwóch płaszczyzn?

Zad. C.3: Wygodnie jest poszukać opisu parametrycznego tej płaszczyzny $\Pi = y_0 + W$, jaki jest wygodny wybór x_0? Jakie warunki na podprzestrzeń W narzuca treść zadania?

Zad. C.4: Wygodniej najpierw zapewnić drugi warunek, a potem pierwszy, pracując w opisie parametrycznym

Zad. C.5: Znajdź RORJ i zgadnij RSRN, by znaleźć opis parametryczny

Zad. C.6: Zadanie jest analogiczne do problemów w $\mathbb{R}^n$, choć bardziej abstrakcyjne, strategia jest taka sama. Znajdź opis parametryczny płaszczyzny i przeprowadź ortogonalizację Grama-Schmidta na odpowiednim zestawie wektorów.

Zad. C.7: Objętości można obliczyć znajdując macierz Grama

Zad. C.8: Skorzystaj bezpośrednio z definicji rzutu, zadanie można zrobić bez reprezentacji macierzowej, ale można się nią wspomóc

Zad. C.9: Zadanie jest w pełni analogiczne do 13.1

Zad. C.10: Zastosuj $|v\rangle^\dagger = \langle v|$

Zad. C.11: Co wiemy o diagonalizacji operatorów normalnych i samosprzężonych

Zad. C.12: Co gdyby macierz A byłaby diagonalizowalna? Czy jeśli nie jest diagonalizowalna, poprzedni argument przestaje działać?

Zad. C.13: Zadanie to jest kombinacją wiedzy o macierzach formy kwadratowej omówionej przy okazji kryterium Sylvestera, oraz diagonalizacji macierzy normalnych

ODPOWIEDZI

Zad. C.1: Stosując algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta, by dostać bazę ortogonalną, a następnie normalizując wektory otrzymujemy odpowiedź. Poniżej przykładowe bazy (jeśli do algorytmu "wrzucimy" wektory z zadania w innej kolejności dostaniemy równie dobre, ale inne bazy)

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\3\end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{\sqrt{6}}(x+1), \frac{1}{2\sqrt{3}}(3x^2-x-1), \frac{1}{2}(2x^3+x^2-x-1)$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{6}(|x|-\frac{1}{2}), \frac{3x(\cos 1-\sin 1)+\sin x}{\sqrt{-5+\frac{11}{2}\sin 2}}$

Zad. C.2: Możemy wprowadzić opis parametryczny

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}0\\2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \qquad \Pi_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\4\\8\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\-2\\2\end{pmatrix} \right\rangle$$

Płaszczyzny nie są równoległe, bo dwuwymiarowe podprzestrzenie z postaci parametrycznej są różne, łatwo to zobaczyć badając wymiar obrazu tych czterech wektorów. Okazuje się że

$$\dim \operatorname{im} \begin{pmatrix}0&2&-2&2\\2&0&0&-3\\-1&-1&1&-2\\0&0&0&2\end{pmatrix} = 3$$

Mimo to płaszczyzny się nie przecinają, ponieważ ich odległość od siebie jest równa 7. By szybko obliczyć tą odległość, można znaleźć dopełnienie ortogonalne wyżej wskazanego obrazu, które jest jednowymiarową podprzestrzenią i zastosować wzór na odległość $\frac{|\langle \Delta | n \rangle|}{\|n\|}$.

Zad. C.3: Mamy $\Pi = x + \langle v_1, v_2 \rangle$, nasz wyszczególniony punkt to x z treści zadania, żeby pozostałe warunki były spełnione wektory v_1, v_2 muszą być prostopadłe do $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$, oznacza to, że

$$v_1, v_2 \ni \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

Możemy wybrać sobie v_1, v_2 i sprawdzić czy warunek nie przecinania L_2 będzie spełniony, niech

$$\Pi = \begin{pmatrix}4\\1\\3\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\1\\3\\x_4\end{pmatrix} \middle| x_1, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Ewidentnie ta płaszczyzna nie ma punktów wspólnych z $P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1+x \\ 1 \\ 1 \\ 1-x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$

Zad. C.4: L_2 ma opis parametryczny

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Drugi warunek oznacza, że wektor wyznaczający kierunek L jest prostopadły do wektora kierunku L_1 i L_2 (są równoległe, więc to jeden wektor). Możemy sprytnie skonstruować odpowiedź, niech v - wektor kierunku prostej L będzie składową Δ (wektora łączącego L_1 i L_2) prostopadłą do $v_1 = v_2$ (wektorów kierunków prostych L_1 i L_2). Jeśli wybralibyśmy $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ mielibyśmy prostą prostopadłą do L_1, L_2 przechodzącą przez nie, my chcemy by była w odległości 3 od obu tych prostych, więc możemy przesunąć ją o 3 w kierunku wektora $n = v \times v_1$ dodając do x_2 trzykrotność znormalizowanego wektora $\hat{n}$. Daje to (paskudny wynik)

$$L = \frac{1}{\sqrt{689}} \begin{pmatrix} \sqrt{689} - 57 \\ -54 \\ -4\sqrt{689} - 6 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -14 \\ 23 \\ -74 \end{pmatrix} \rangle$$

Zad. C.5: Opis parametryczny A to $A = \frac{a}{\|v\|^2} v + \langle v \rangle^{\perp}$, możemy zastosować wzór na odległość $\frac{|\langle \Delta | n \rangle|}{\|n\|}$, gdzie $n = v$ to wektor prostopadły do podprzestrzeni wyznaczającej "kierunek" płaszczyzny. Odległość jest dana wzorem $\frac{|\langle y|v\rangle - a|}{\|v\|}$

Zad. C.6: Opis parametryczny

$$\Pi = t^2 + \langle -1 + 3t^2, -3t + 5t^3 \rangle$$

Wektor prostopadły do płaszczyzny łączący ją z punktem y uzyskujemy z ortogonalizacji Grama-Schmidta $1 + \frac{8}{5}t$ Odległość jest równa jego długości, czyli $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{278}{3}}$

Zad. C.7: Macierz Grama jest równa

$$G(b-a, c-a, d-a, e-a) = \begin{pmatrix} 243 & 334 & 358 & 329 \\ 334 & 487 & 517 & 456 \\ 358 & 517 & 550 & 488 \\ 329 & 456 & 488 & 446 \end{pmatrix}$$

Objętość to pierwiastek jej wyznacznika $\sqrt{\det G(b-a, c-a, d-a, e-a)} = 7$, natomiast objętość ściany bocznej można obliczyć z mniejszej macierzy Grama $\sqrt{\det G(b-a, c-a, d-a)} = \sqrt{2103}$

Zad. C.8: Jądro i obraz możemy znaleźć zastanawiając się jakie wektory możemy otrzymać, a jakie są zerowane

$$\ker \mathbf{P} = \langle (t-2)^3, (t-2)^4 \rangle$$
$$\operatorname{im} \mathbf{P} = \langle 1, (t-2), (t-2)^2 \rangle$$

Zad. C.9: a)

$$\lambda = 3, \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 5, \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & i \\ -i & 4 \end{pmatrix} = 3P_1 + 5P_2$$

b)

$$\lambda = 0, \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 9 - 3i, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 - 3i \\ 1 - 3i \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 9 + 3i, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 + 3i \\ 1 + 3i \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 & 4 - 3i & -2 - 6i \\ 4 + 3i & 5 & 2 - 6i \\ -2 + 6i & 2 + 6i & 8 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 & 4 + 3i & -2 + 6i \\ 4 - 3i & 5 & 2 + 6i \\ -2 - 6i & 2 - 6i & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 0P_1 + (9 - 3i)P_2 + (9 + 3i)P_3$$

c)

$$\lambda = -5, \quad v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 4 + 3i, \quad v_2 = \frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -2 - 6i \\ 4 - 3i \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 4 - 3i, \quad v_3 = \frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -2 + 6i \\ 4 - 3i \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad P_2 = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 8 & 2 - 6i & -2 - 6i \\ 2 + 6i & 5 & 4 - 3i \\ -2 + 6i & 4 + 3i & 5 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 8 & 2 + 6i & -2 + 6i \\ 2 - 6i & 5 & 4 + 3i \\ -2 - 6i & 4 - 3i & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -5P_1 + (4 + 3i)P_2 + (4 - 3i)P_3$$

d)

$$\lambda = 0, \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 3 - 3i, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} i \\ -i \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 + i, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -i \\ -1 & 1 & i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2i \\ -1 & 1 & -2i \\ -2i & 2i & 4 \end{pmatrix} \quad P_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ i & 1 & -1-i \\ -1-i & 1+i & 2-2i \end{pmatrix} = 0P_1 + (3-3i)P_2 + (1+i)P_3$$

Zad. C.10: Normalne: A, C, D, E. Hermitowskość: A, C. Unitarność: E tylko jeśli wymiar jest równy 2 (u, w są bazą)

Zad. C.11: Wartości własne to $\lambda_\pm = 3 \pm i$, macierz jest diagonalizowalna. Możemy sobie zdefiniować taki iloczyn skalarny tak, że wektory własne F są w nim bazą O.N., wtedy F byłby operatorem normalnym (każdy operator diagonalizowalny w O.N. bazie jest normalny). Jeśli istniałby taki iloczyn skalarny w którym F jest samosprzężony, wartości własne byłyby liczbami rzeczywistymi, co nie jest prawdą. Mamy więc a) TAK, b) NIE

Zad. C.12: Jeśli macierz jest diagonalizowalna, w pewnej bazie macierz jest diagonalna i ma na diagonali wartości własne, wyznacznik jest ich iloczynem, a ślad sumą. Jeśli macierz nie jest diagonalizowalna ma postać Jordana z klatkami 2×2 lub większymi, nie zmienia to jednak tego, że wyznacznik to iloczyn wartości własnych, a ślad to ich suma. Ślad A^k jest sumą k-tych potęg wartości własnych. Używając $\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ i $\operatorname{Tr} A^k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \lambda_3^k$ łatwo sprawdzić, że

$$\begin{aligned} \det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{1}{6}\big(&2(\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3) \\ &-3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3\big) \\ &= \frac{1}{6}\left(2\operatorname{Tr} A^3 - 3\operatorname{Tr} A^2 \operatorname{Tr} A + (\operatorname{Tr} A)^3\right) \end{aligned}$$

Analogiczne wzory dla $n = 2$ i $n = 4$ to

$$\det(A) = \frac{1}{2}\left((\operatorname{Tr} A)^2 - \operatorname{Tr} A^2\right)$$

$$\det(A) = \frac{1}{24}\left((\operatorname{Tr} A)^4 - 6(\operatorname{Tr} A)^2 \operatorname{Tr} A^2 + 8\operatorname{Tr} A^3 \operatorname{Tr} A + 3(\operatorname{Tr} A^2)^2 - 6\operatorname{Tr} A^4\right)$$

Zad. C.13: a) Macierz formy kwadratowej to

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Baza ortonormalna diagonalizująca formę Q jest tą samą, która diagonalizuje macierz B. Diagonalizacja formy kwadratowej wymaga by $\mathcal{O}^T B \mathcal{O}$ było diagonalne, diagonalizacja macierzy wymaga by $\mathcal{O}^{-1} B \mathcal{O}$ było diagonalne. Dla macierzy ortogonalnych $\mathcal{O}^{-1} = \mathcal{O}^T$ i te warunki są równoważne.
b) Baza diagonalizująca Q to zortonormalizowana baza złożona z wektorów własnych

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Szukana macierz $\mathcal{O}$ to macierz zmiany bazy z diagonalizującej do standardowej, jej kolumny to wektory powyższej bazy

$$\mathcal{O} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

d) Sygnaturę możemy odczytać z wartości własnych, mamy 2 z krotnością trzy i -2, sygnatura to (3,1)