

Notatki do ćwiczeń z Algebry z Geometrią II

Wojciech Niedziółka

15 Grupa $SO(n)$, obroty w 2D i 3D

Na koniec przyjrzymy się obrotom, zaczniemy od fachowego pojęcia, które być może już pojawiło się na fizyce

Definicja 48. Grupą $SO(n)$ nazywamy następujący zbiór z działaniem mnożenia macierzy

$$SO(n) = \left\{ M \in \mathbb{R}_n^n \mid \det(M) = 1, M^T M = \mathbb{1} \right\}$$

Nietrudno przekonać się, że faktycznie spełnione są aksjomaty grupy (iloczyn dwóch elementów $SO(n)$ należy do $SO(n)$, mnożenie macierzy jest łączne, $\mathbb{1}$ to element neutralny, M^T jest elementem odwrotnym i należy do $SO(n)$, jeśli M należy do $SO(n)$).

Grupa $SO(n)$ to grupa macierzy $n \times n$ reprezentujących obroty w n -wymiarowej przestrzeni (puryści mogliby się przyczepić, że $SO(n)$ jest abstrakcyjnym pojęciem, a wyżej zdefiniowany zbiór macierzy to jego reprezentacja, ale będziemy tu bardziej praktyczni). Nazwa jest skrótem od **special orthogonal group**, pierwsze słowo oznacza, że wyznacznik jest równy 1, a drugie odnosi się do tego, że mamy macierze ortogonalne. Możemy rozważać też ogólniejszą grupę zachowującą odległości, tzw. **orthogonal group** $O(n)$

Definicja 49. Grupą $O(n)$ nazywamy następujący zbiór z działaniem mnożenia macierzy

$$O(n) = \left\{ M \in \mathbb{R}_n^n \mid M^T M = \mathbb{1} \right\}$$

podobnie jak przy poprzedniej definicji łatwo się przekonać, że aksjomaty grupy są spełnione.

Podobnie można wprowadzić $SU(n)$ - **special unitary group** (unitarne macierze $n \times n$ z wyznacznikiem równym 1) i $U(n)$ - **unitary group** (unitarne macierze $n \times n$).

Zad. 15.1

Znajdź ogólną postać elementu $SO(2)$. Jaki jest związek takiej macierzy z fizycznym obrazkiem obrotu o kąt φ ?

Rozw. 15.1

Ogólna macierz 2×2 ma postać $R = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, jeśli $R \in SO(2)$, mamy następujące warunki na współczynniki (szybciej rachunkowo będzie pracować z $R^T = R^{-1}$ zamiast $R^T R = \mathbb{1}$)

$$1 = \det(R) = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = R^T = R^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

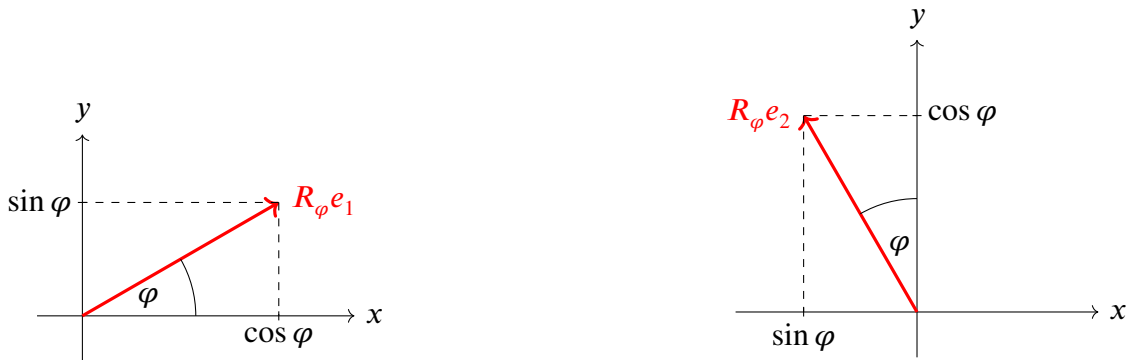
Daje nam to układ równań

$$\begin{cases} a = d \\ b = -c \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

Mamy dwa współczynniki a, b spełniające równanie ładząco przypominające jedynkę trygonometryczną, możemy pokusić się o wprowadzenie nowej zmiennej φ i wyrażenie przez nią a, b jako $a = \cos(\varphi)$, $b = \sin(\varphi)$. Dowolny element $SO(2)$ ma postać (dla pewnego φ)

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Pytanie, czy powyższa macierz ma faktycznie interpretację obrotu o kąt φ wokół środka układu współrzędnych. Spójrzmy, jak transformują się elementy bazy e_1 i e_2



Macierz R ma faktycznie interpretację obrotu w $\mathbb{R}^2$.

Zad. 15.2

Dla danych macierzy sprawdź, że są to macierze obrotu w $\mathbb{R}^3$, wyznacz oś oraz kąt obrotu

$$R_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad R_2 = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 14 \\ -10 & 11 & 2 \\ -10 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

Rozw. 15.2

a) Posłużymy się w tym zadaniu intuicją fizyczną. Obrót w trzech wymiarach to obrót wokół pewnej osi (wyznaczonej przez wektor n) o kąt φ . Oś obrotu możemy łatwo znaleźć zauważając, że jest to jedyny (z dokładnością do stałej) wektor, który jest zachowywany przy obrocie (nie obraca się), czyli jest wektorem własnym $R_1 n = n$. Możemy go znaleźć badając jądro

$$\ker(R_1 - \mathbb{1}) = \ker \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{=n}$$

Możemy go sobie znormalizować

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jeśli wybierzemy sobie bazę ortonormalną $\hat{n}, f_1, f_2$, gdzie f_1, f_2 są w płaszczyźnie obrotu, to macierz obrotu będzie miała postać

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

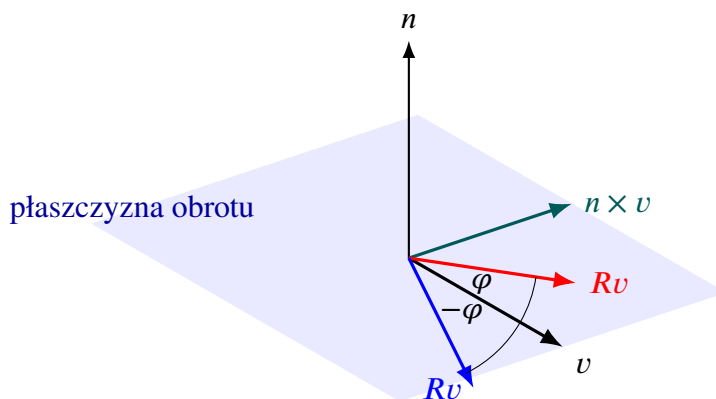
Możemy wykorzystać własność śladu do (prawie) znalezienia kąta obrotu. Jeśli mamy dwie macierze będące macierzą tego samego operatora, ale w innych bazach, to mają taki sam ślad, co wynika z jego cykliczności

$$\text{Tr}(M_1) = \text{Tr}(SM_2S^{-1}) = \text{Tr}(S^{-1}SM_2) = \text{Tr}(M_2)$$

Zatem ślad macierzy R_1 jest równy śladowi powyższej macierzy

$$1 + 2 \cos(\varphi) = \text{Tr}(R_1) = 2$$

Wnioskujemy, że $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$ i $\varphi = \pm 60^\circ$, aby ustalić, w którą stronę jest obrót, możemy spojrzeć na znak $\langle n \times v | R_1 v \rangle$, dla dowolnego v leżącego w płaszczyźnie obrotu. Jeśli obrót jest zgodny z regułą prawej dłoni (przeciwny do ruchu wskazówek zegara), powiemy że kąt jest dodatni, jeśli jest w drugą stronę, kąt będzie ujemny. Obrót zgodny z regułą prawej dłoni przybliży wektor v do wektora $n \times v$, więc iloczyn skalarny (który przed obrotem wynosi 0) będzie dodatni. Jeśli obrót będzie w drugą stronę, v oddali się od $n \times v$ i iloczyn skalarny będzie ujemny.



W naszym przypadku możemy sobie wybrać $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (mamy wtedy $\langle v|n \rangle = 0$), otrzymujemy

$$n \times v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R_1 v = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ponieważ $\langle n \times v | R_1 v \rangle = 3 > 0$, macierz R_1 opisuje obrót o kąt 60°

b) Rozwiązanie jest w pełni analogiczne

$$\ker(R_2 - \mathbb{1}) \ker \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -10 & 2 & 14 \\ -10 & -4 & 2 \\ -10 & -10 & -10 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{=n}$$

Ślad macierzy jest równy

$$1 + 2 \cos(\varphi) = \text{Tr } R_2 = \frac{21}{15}$$

Zatem $\cos(\varphi) = \frac{1}{5}$, a $\varphi = \pm \arccos \frac{1}{5}$. By ustalić znak, wybieramy sobie wektor prostopadły do n i liczymy $\langle n \times v | R_2 v \rangle$

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n \times v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$R_2 v = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 14 \\ -10 & 11 & 2 \\ -10 & -10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ -30 \end{pmatrix}$$

$\langle n \times v | R_2 v \rangle = -12 < 0$, więc obrót wokół osi n jest o kąt $-\arccos \frac{1}{5}$

Zad. 15.3

Wyprowadź wzór na obrót w $\mathbb{R}^3$ o kąt φ wokół osi wyznaczonej przez (znormalizowany) wektor n i oblicz macierze obrotu dla

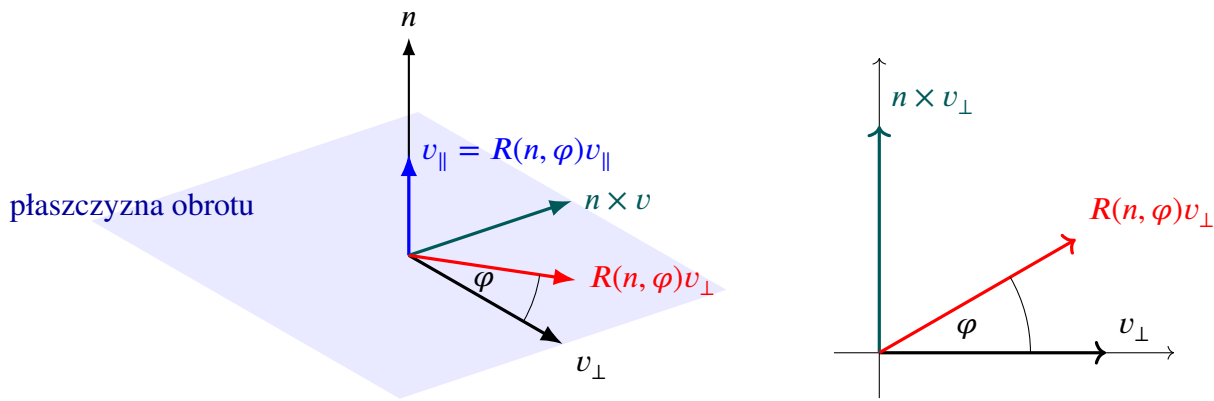
$$\text{a) } n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \varphi = 90^\circ \quad \text{b) } n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \varphi = -\arcsin \frac{3}{5}$$

Rozw. 15.3

Konstrukcja opiera się na naszej nowo nabytej intuicji obrotów w $\mathbb{R}^3$. Chcemy znaleźć ogólny wzór na $R(n, \varphi)$ - obrót wektora v wokół osi wyznaczonej przez wektor jednostkowy n o kąt φ , możemy podzielić v na składową równoległą do n - $v_{\parallel}$, która nie będzie się obracać i składową prostopadłą do n - $v_{\perp}$, która będzie wykonywać obrót w dwuwymiarowej płaszczyźnie. Wygodnie będzie rozważyć jeszcze wektor $n \times v = n \times v_{\perp}$, który razem z $n, v_{\perp}$ tworzy bazę ortogonalną $\mathbb{R}^3$. Niech $R(n, \varphi)v$ będzie wektorem v po obrocie, mamy

$$R(n, \varphi)v = R(n, \varphi)v_{\parallel} + R(n, \varphi)v_{\perp} = v_{\parallel} + R(n, \varphi)v_{\perp}$$

Wzór na obrót $v_{\perp}$ możemy odczytać z obrazka (korzystając z tego, że $\|n \times v\| = \|n\|\|v_{\perp}\| = \|v_{\perp}\|$, zarówno $v_{\perp}$ jak i $n \times v_{\perp}$ są tej samej długości i $v_{\perp}$ po obrocie musi być też tej długości)



$$R(n, \varphi)v_{\perp} = \cos(\varphi)v_{\perp} + \sin(\varphi)n \times v$$

Możemy podsumować powyższe fakty i korzystając z $v_{\parallel} = \langle n|v \rangle n$ i $v_{\perp} = v - v_{\parallel}$ napisać wynik

$$R(n, \varphi)v = v_{\parallel} + \cos(\varphi)v_{\perp} + \sin(\varphi)n \times v = \cos(\varphi)v + \sin(\varphi)n \times v + (1 - \cos(\varphi)) \langle n|v \rangle n$$

Powyższy wzór to tak zwany **wzór Rodrigues'a na obrót**. Możemy zastosować jeszcze dwie sztuczki, by sprowadzić wzór do przyjemniejszej postaci, po pierwsze zauważmy, że iloczyn wektorowy $v \mapsto n \times v$ jest odwzorowaniem liniowym, więc można znaleźć jego macierz N , która ma postać

$$n \times v = \begin{pmatrix} n_y v_z - n_z v_y \\ n_z v_x - n_x v_z \\ n_x v_y - n_y v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = Nv$$

Drugi fakt jest lekko rachunkowy, okazuje się, że $n \times (n \times v) = \langle n|v \rangle n - v$, zwykle sprawdza się go używając notacji indeksowej, ale możemy też posłużyć się macierzą N i wykorzystać $1 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$

$$\begin{aligned} n \times (n \times v) &= N^2 v = \begin{pmatrix} -n_y^2 - n_z^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_y n_x & -n_x^2 - n_z^2 & n_y n_z \\ n_z n_x & n_z n_y & -n_x^2 - n_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n_x^2 - 1 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_y n_x & n_y^2 - 1 & n_y n_z \\ n_z n_x & n_z n_y & n_z^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ &= (n_x v_x + n_y v_y + n_z v_z) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} - v = \langle n|v \rangle n - v \end{aligned}$$

Nasz wzór przybiera postać

$$R(n, \varphi) v = v + \sin(\varphi) n \times v + (1 - \cos(\varphi)) n \times (n \times v) = (\mathbb{1} + \sin(\varphi) N + (1 - \cos(\varphi)) N^2) v$$

gdzie widzimy wzór na macierz obrotu wokół osi n o kąt φ

$$R(n, \varphi) = \mathbb{1} + \sin(\varphi) N + (1 - \cos(\varphi)) N^2$$

Powyższy wzór to tak zwany **wzór Rodrigues'a na macierz obrotu**. Wzór ten można przepisać (rozpisując sinus i cosinus jako szeregi i używając $N^3 = -N$)

$$R(n, \varphi) = \exp(\varphi N)$$

Ten wzór motywuje nazywanie macierzy N macierzą infinitezimalnego obrotu (mocno nadprogramowa uwaga jest taka, że macierz N jest elementem tzw. algebry Liego $\mathfrak{so}(3)$ i powyższa obserwacja jest związana z istnieniem eksponencjalnej mapy z $\mathfrak{so}(3)$ do $SO(3)$). Możemy użyć tego wzoru, by obliczyć macierze obrotu w dwóch punktach

a)

$$n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \varphi = 90^\circ \quad R(n, \varphi) = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 9 & 20 & -12 \\ -20 & 0 & -15 \\ -12 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

b)

$$n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \varphi = -\arcsin \frac{3}{5} \quad R(n, \varphi) = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 24 & -3\sqrt{5} & -2 \\ 3\sqrt{5} & 20 & 6\sqrt{5} \\ -2 & -6\sqrt{5} & 21 \end{pmatrix}$$