

Notatki do ćwiczeń z Algebry z Geometrią II

Wojciech Niedziółka

14 Diagonalizacja macierzy normalnych, ewolucja unitarna, wspólna diagonalizacja komutujących macierzy

W poprzednim zadaniu znaleźliśmy rozkład spektralny trzech macierzy, przy okazji znaleźliśmy ich wektory i wartości własne, można pokusić się o zdiagonalizowanie ich. Dla macierzy normalnych można wybrać ortonormalną bazę diagonalizującą, okazuje się, że w takiej sytuacji macierze zmiany bazy są dość szczególne. Ogólnie mamy

$$M = U D U^{-1}$$

gdzie M to nasza macierz w bazie standardowej e , D to ta macierz w bazie diagonalizującej u , a $U = [id]_u^e$ to macierz zmiany bazy z u do e (poprzednio używaliśmy nazwy S , ale wybiegając naprzód, użyjemy tu innej nazwy). Kolumny macierzy U to wektory własne zapisane w bazie standardowej, coś co już mamy, dlatego łatwo ją znaleźć. Macierz U^{-1} to macierz odwrotna, której policzenie jest co do zasady proste, ale rachunkowo nudne.

Rozważmy macierz z podpunktu b) z poprzedniego zadania, mamy jej wartości i wektory własne

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Macierz U ma postać

$$U = (|u_1\rangle \quad |u_2\rangle \quad |u_3\rangle) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Normalnie znalezienie U^{-1} wymagałoby zawiłych rachunków, ale ponieważ kolumny naszej macierzy są wektorami ortogonalnymi, mamy pewien "cud rachunkowy". Spójrzmy na macierz $U^\dagger$ i obliczmy jej iloczyn z macierzą U . Można skorzystać z $|u_i\rangle^\dagger = \langle u_i|$ i znaleźć wzór na abstrakcyjnym poziomie ket i bra, ale można też stransponować macierz U (sprzężenie hermitowskie w bazie ortonormalnej to

transpozycja i sprzężenie zespolone, a nasza macierz jest rzeczywista)

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} \langle u_1 | \\ \langle u_2 | \\ \langle u_3 | \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$U^\dagger U = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} \langle u_1 | \\ \langle u_2 | \\ \langle u_3 | \end{pmatrix} (|u_1\rangle \quad |u_2\rangle \quad |u_3\rangle) = \begin{pmatrix} \langle u_1 | u_1 \rangle & \langle u_1 | u_2 \rangle & \langle u_1 | u_3 \rangle \\ \langle u_2 | u_1 \rangle & \langle u_2 | u_2 \rangle & \langle u_2 | u_3 \rangle \\ \langle u_3 | u_1 \rangle & \langle u_3 | u_2 \rangle & \langle u_3 | u_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ponieważ w skończone wymiarowych przestrzeniach wektorowych $U^\dagger U = \mathbb{1}$ implikuje istnienie U^{-1} i $U U^\dagger = \mathbb{1}$, to nasza macierz zmiany bazy jest macierzą unitarną. Ten przykład motywuje stwierdzenie, że dowolna macierz zmiany bazy z bazy ortonormalnej do innej bazy ortonormalnej jest macierzą unitarną. Dodatkowo prawdziwe jest stwierdzenie w drugą stronę, każdą macierz unitarną można interpretować jako macierz przejścia od standardowej bazy ortonormalnej do pewnej innej bazy ortonormalnej. Bierze się to z tego, że działanie macierzą unitarną zachowuje iloczyn skalarny, jeśli v, w to pewne wektory po zadziałaniu U mamy wektory Uv, Uw , które spełniają

$$\langle Uv | Uw \rangle = \langle v | U^\dagger U w \rangle = \langle v | w \rangle$$

Jeśli bylibyśmy w przestrzeni euklidesowej (przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb rzeczywistych z iloczynem skalarnym), iloczyn skalarny łączyłby się z kątem pomiędzy wektorami v, w i powiedzielibyśmy, że U zachowuje kąt pomiędzy wektorami, oraz ich długość. Fizycznie oznaczałoby to, że U jest obrotem, w ogólnej przestrzeni unitarnej nad ciałem liczb zespolonych macierz unitarna to taki "zespolony obrót", cokolwiek to znaczy.

By zmotywować sens rozkładu spektralnego, przyjrzymy się następującemu problemowi zainspirowanemu mechaniką kwantową.

Zad. 14.1

Rozważmy równanie w $\mathbb{C}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym i bazą standardową oznaczoną przez $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$

$$i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle$$

gdzie $|\Psi(t)\rangle \in \mathbb{C}^3$ jest wektorem zależnym od czasu, z warunkiem początkowym

$$|\Psi(0)\rangle = |1\rangle$$

Operator H w bazie standardowej jest zadany przez macierz

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Uzasadnij, że rozwiązanie można znaleźć używając operatora ewolucji

$$|\Psi(t)\rangle = U_t |\Psi(0)\rangle \quad \text{gdzie} \quad U_t = e^{-itH}$$

Oblicz operator ewolucji U_t i wyznacz rozwiązanie $|\Psi(t)\rangle$. Jak zmienia się w czasie norma $|\Psi(t)\rangle$?

Rozw. 14.1

Obliczmy pochodną U_t , korzystamy z definicji exp macierzy

$$\frac{d}{dt} U_t = \frac{d}{dt} e^{-itH} = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-itH)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} -iH \frac{(-itH)^{n-1}}{(n-1)!} = -iH e^{-itH} = -iH U_t$$

Podstawiając do równania $U_t |\Psi(0)\rangle$ mamy

$$i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = i \frac{d}{dt} U_t |\Psi(0)\rangle = i(-iH) U_t |\Psi(0)\rangle = H |\Psi(t)\rangle$$

Faktycznie U_t pozwala nam znaleźć rozwiązanie dla dowolnego t . Jak obliczyć U_t ? Jednym sposobem byłoby, jak to robiliśmy na początku semestru, zdiagnozowanie macierzy H i wyrażenie jej jako $U D U^\dagger$, wtedy exponent byłby dany wzorem

$$U_t = e^{-itH} = U e^{-itD} U^\dagger$$

Możemy jednak posłużyć się intuicją związaną z rozkładem spektralnym. Mamy rozkład jedynek $\mathbb{1} = P_1 + P_2$, gdzie P_1 to rzut na podprzestrzeń własną z wartością własną 1, a P_2 to rzut na podprzestrzeń własną z wartością własną -2 . Możemy go użyć do odtworzenia rozkładu spektralnego

$$H = H\mathbb{1} = H P_1 + H P_2 = 1 P_1 - 2 P_2$$

Gdzie korzystamy z tego, że na podprzestrzeni własnej działanie hamiltonianem jest równoważne mnożeniu przez wartość własną, jest to zbiór wektorów własnych o danej wartości własnej. Można też to zobaczyć korzystając z postaci rzutu $P_1 = |\hat{u}_1\rangle \langle \hat{u}_1|$ i tego, że ket jest wektorem własnym, mamy

$$H P_1 = H |\hat{u}_1\rangle \langle \hat{u}_1| = 1 |\hat{u}_1\rangle \langle \hat{u}_1| = 1 P_1$$

Analogicznie z P_2 , które jest sumą dwóch wyrazów postaci ket razy bra. Jeśli zastosujemy podobny trick z operatorem U_t dostaniemy

$$U_t = e^{-itH} = e^{-itH} \mathbb{1} = e^{-itH} P_1 + e^{-itH} P_2 = e^{-it \cdot 1} P_1 + e^{-it(-2)} P_2 = e^{-it} P_1 + e^{i2t} P_2$$

Intuicja tego wzoru jest taka, że na podprzestrzeni własnej działanie macierzą H (lub ogólnie funkcją od niej) jest równoważne mnożeniu przez wartość własną (lub funkcję od wartości własnej). Rozwiązanie dane jest wzorem (używamy macierzy rzutów obliczonych w poprzednim zadaniu w podpunkcie b))

$$|\Psi(t)\rangle = U_t |\Psi(0)\rangle = (e^{-it} P_1 + e^{i2t} P_2) |1\rangle = e^{-it} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{i2t} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ważną obserwacją jest że ponieważ H jest samosprężony mamy $(-itH)^\dagger = itH^\dagger = itH$, oraz $U_t^\dagger = e^{itH} = U_{-t}$. Czyli $U_t^\dagger U_t = \mathbb{1} = U_t U_t^\dagger$, operator U_t jest unitarny. Czyli norma wektora $|\Psi(t)\rangle$ jest stała w czasie, jest to fakt, który się przyda na mechanice kwantowej.

Na koniec jeszcze spójrzmy na kolejny fakt związany z mechaniką kwantową

Fakt 47. Niech $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ będą diagonalizowalnymi macierzami $n \times n$, wtedy następujące fakty są równoważne: 1) A i B komutują (tzn ich komutator $[A, B] = AB - BA$ jest równy zero) 2) istnieje baza $\mathbb{C}^n$ złożona z wektorów, które są jednocześnie wektorami własnymi A i B

Jeśli ktoś słyszał w tekstach popularnonaukowych stwierdzenia o "stanach kwantowych z dobrze określonym spinem i energią" czy "nie można jednocześnie dokładnie określić położenia i pędu", to niech wie, że powyższy fakt jest algebraicznym źródłem tych stwierdzeń.

Zad. 14.2

Dane są dwie macierze

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Czy istnieje baza złożona ze wspólnych wektorów własnych M_1 i M_2 ? Jeśli tak, to znajdź ją

Rozw. 14.2

Korzystając z faktu, wiemy że wystarczy sprawdzić, czy nasze macierze komutują

$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zachodzi $M_1 M_2 = M_2 M_1$, więc wiemy, że istnieje baza złożona ze wspólnych wektorów własnych naszych macierzy. Znajdźmy najpierw wartości własne obu macierzy analizując wielomiany charakterystyczne

$$\begin{aligned} \omega_1(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}^2 \\ &= ((1-\lambda)^2 - 1)^2 = \lambda^2(\lambda-2)^2 \\ \omega_2(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2(\lambda^2 - 1) - 1(-1 + \lambda^2) = (\lambda^2 - 1)^2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2 \end{aligned}$$

Pierwsza macierz ma dwa wektory własne z wartością własną 0 i dwa z wartością własną 2, natomiast druga macierz ma dwa wektory własne z wartością własną -1 i dwa z wartością własną 1. Niech v_1, v_2, v_3, v_4 będą szukaną wspólną bazą własną, możemy ustalić dla uwagi, że v_1, v_2 są wektorami własnymi M_1 z wartością własną 0, a v_3, v_4 wektorami własnymi M_1 z wartością własną 2. Nie wiemy jakie

wartości własne mają te wektory przy działaniu na M_2 , możliwe są wszystkie scenariusze, może v_1, v_2 mają wartość własną -1 , może 1 , a może jeden ma wartość własną 1 , a drugi -1 .

Pomysłem na zbadanie tego jest przyjrzenie się częściom wspólnym podprzestrzeni własnych (jąder odpowiednich macierzy). Jeśli wśród v_1, v_2 jest wektor własny M_2 z wartością własną -1 , będzie on należał do $\ker(M_1) \cap \ker(M_2 + \mathbb{1})$, a jeśli jest wśród nich wektor własny o wartości własnej 1 to będzie należał do $\ker(M_1) \cap \ker(M_2 - \mathbb{1})$. Przeanalizowanie tych podprzestrzeni pozwoli nam wybrać takie wektory własne M_1 o wartości własnej 0 , że będą też wektorami własnymi macierzy M_2

$$\begin{aligned}\ker(M_1) \cap \ker(M_2 + \mathbb{1}) &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cap \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cap \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \ker(M_1) \cap \ker(M_2 - \mathbb{1}) &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cap \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cap \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Jak skutecznie znaleźć część wspólną jąder? Zauważmy, że jądro macierzy to zbiór wektorów spełniających układ równań zakodowanych przez wiersze macierzy. O części wspólnej dwóch jąder możemy myśleć jako o zbiorze wektorów, który spełnia oba układy równań, czyli jeden duży układ równań powstały z połączenia dwóch mniejszych, mamy

$$\begin{aligned}\ker(M_1) \cap \ker(M_2 + \mathbb{1}) &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cap \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{w_1 \rightarrow w_1 - w_2 - w_4}{=} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \ker(M_1) \cap \ker(M_2 - \mathbb{1}) &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cap \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{w_1 \rightarrow w_1 + w_3 + w_4}{=} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\end{aligned}$$

Możemy zatem wybrać dwa pierwsze wektory szukanej bazy

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Są to wektory własne M_1 z wartością własną 0 , oraz dodatkowo v_1 jest wektorem własnym M_2 z wartością własną -1 , a v_2 wektorem własnym M_2 z wartością własną 1 . Żeby ilości wektorów własnych się

zgadzały, brakuje nam jeszcze wektorów własnych M_1 z wartością własną 2, jeden z nich musi być wektorem własnym M_2 z wartością własną -1 , a drugi z wartością własną 1. Szukamy ich analizując odpowiednie części wspólne jąder jak poprzednio

$$\begin{aligned}
\ker(M_1 - 2) \cap \ker(M_2 + 1) &= \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cap \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cap \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{w_1 \rightarrow w_1 + w_3 - w_4}{=} \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
\ker(M_1 - 2) \cap \ker(M_2 - 1) &= \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cap \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cap \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\stackrel{w_1 \rightarrow w_1 - w_3 + w_4}{=} \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle
\end{aligned}$$

Mamy zatem dwa brakujące wektory szukanej bazy

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Łatwo się przekonać, że v_1, v_2, v_3, v_4 faktycznie są bazą i są wektorami własnymi zarówno macierzy M_1 jak i M_2 . Dodatkowo ponieważ nasze macierze były samosprężone nasza baza jest ortogonalna, moglibyśmy je unormować, by mieć bazę ortonormalną.