

# Notatki do ćwiczeń z Algebry z Geometrią II

Wojciech Niedziółka

## 13 Operatory normalne, hermitowskie i unitarne, rozkład spektralny operatorów normalnych

Zdefiniujemy sobie teraz parę szczególnych typów operatorów

**Definicja 43.** Niech  $V$  - przestrzeń wektorowa (skończenie wymiarowa),  $F \in \text{End}(V)$  - operator liniowy na  $V$ , mówimy że  $F$  jest

- normalny jeśli zachodzi  $F^\dagger F = FF^\dagger$
- hermitowski (samosprężony) jeśli zachodzi  $F^\dagger = F$
- unitarny jeśli zachodzi  $F^\dagger F = \mathbb{1} = FF^\dagger$

W przypadku gdy przestrzeń wektorowa jest nad ciałem liczb rzeczywistych, zamiast nazwy operator unitarny mówimy, że operator, który spełnia  $F^T F = \mathbb{1}$  jest ortogonalny

**Wniosek 44.** Każdy operator hermitowski jest normalny, podobnie każdy operator unitarny (ortogonalny) też jest normalny. W skończonych wymiarach, jeśli  $F^\dagger F = \mathbb{1}$  to obliczając wyznacznik obu stron dostajemy wniosek, że  $\det(F) \neq 0$ , czyli  $F^{-1}$  istnieje i w związku z tym mamy

$$F^\dagger F = \mathbb{1} \equiv F^\dagger = F^{-1} \equiv FF^\dagger = \mathbb{1}$$

Należy sprawdzić tylko jedną z tych równości, druga jest prostym wnioskiem

**Uwaga 45** (ponadprogramowa). W pełnej ogólności powyższe definicje się komplikują, powodem jest utrata pewnej własności, która zachodzi w przestrzeniach skończenie wymiarowych. Jeśli  $A$  jest macierzą  $n \times n$ , a  $v$  wektorem to  $Av$  zawsze ma sens, w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach wektorowych mamy operatory (zwane operatorami nieograniczonymi), które nie są zdefiniowane na całej przestrzeni wektorowej (mają tzw. dziedzinę), przykładem są operator położenia i operator pędu w mechanice kwantowej. Sprawia to, że definicja sprzężenia hermitowskiego operatora  $F$  nie jest taka prosta w przestrzeni nieskończenie wymiarowej. Po drugie, pojęcia operator **samosprężony** i **hermitowski** oznaczają różne rzeczy, pierwsze z grubsza znaczy, że  $F = F^\dagger$ , a drugie  $\forall_{v,w} \langle Fv|w \rangle = \langle v|Fw \rangle$ . Każdy operator samosprężony jest hermitowski, ale niekoniecznie na odwrót. Po trzecie, definicja operatora unitarnego wymaga, by  $F^\dagger F = \mathbb{1}$  i  $FF^\dagger = \mathbb{1}$ , trzeba sprawdzić obie własności, nie mamy już równoważności pomiędzy nimi. W szczególności są operatory, które spełniają pierwszą, ale nie drugą (nazywane są izometriami).

**Twierdzenie 46** (rozkład spektralny). Niech  $V$  będzie przestrzenią wektorową, a  $F \in \text{End}(V)$  **normalnym** operatorem liniowym na  $V$ . Wtedy  $F$  jest diagonalizowalny i istnieje ortonormalna baza przestrzeni

$V$  złożona z wektorów własnych  $F$ . Możemy zapisać operator  $F$  jako sumę rzutów, zapis ten nazywamy rozkładem spektralnym  $F$

$$F = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$$

gdzie  $\lambda_i$  to  $i$ -ta wartość własna, a  $P_i$  to rzut ortogonalny na podprzestrzeń własną związaną z  $\lambda_i$  tzn.  $\ker(F - \lambda_i \mathbb{1})$ . Dodatkowo, jeśli  $F$  jest hermitowski to jego wartości własne są liczbami rzeczywistymi, a jeśli jest unitarny to jego wartości własne są liczbami zespolonymi o module 1

### Zad. 13.1

Sprawdź, że operator  $F \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$  zdefiniowany jako mnożenie przez macierz jest normalny i znajdź jego rozkład spektralny

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix}$$

### Rozw. 13.1

Procedura obliczania rozkładu spektralnego jest następująca: krok 1 to znalezienie wartości własnych, krok 2 to znalezienie podprzestrzeni własnych, krok 3 to znalezienie bazy ortonormalnej. Ostatnim 4. krokiem jest wykorzystanie tych informacji do zapisania rozkładu spektralnego. a) **krok 0:** sprawdzenie normalności operatora. Mamy standardowy iloczyn skalarny, więc sprzężenie hermitowskie to złożenie transpozycji i sprzężenia zespolonego

$$F^\dagger F = \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & -1-i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1+i \\ -1-i & 6 \end{pmatrix}$$

$$F F^\dagger = \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & -1-i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1+i \\ -1-i & 6 \end{pmatrix}$$

Mamy  $F^\dagger F = F F^\dagger$

**Krok 1:** wartości własne

$$\omega(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-i-\lambda & 1+i \\ -1+i & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (4-i)\lambda + 6-2i$$

Rozwiązujemy  $\omega(\lambda) = 0$ , korzystając ze wzorów na zera funkcji kwadratowej, najpierw szukamy  $\Delta = (4-i)^2 - 4(6-2i) = -9 = (3i)^2$ . Mamy dwa zera

$$\lambda_1 = \frac{4-i+3i}{2} = 2+i \quad \lambda_2 = \frac{4-i-3i}{2} = 2-2i$$

**Krok 2:** podprzestrzenie własne

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \ker \begin{pmatrix} -2i & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix} \stackrel{w_1 \rightarrow w_1 + w_2}{=} \ker \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -1+i & -i \end{pmatrix} \stackrel{w_2 \rightarrow iw_2}{=} \ker \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \ker \begin{pmatrix} -1-i & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}}_{=u_1} \right\rangle \\
 V_2 &= \ker \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 2i \end{pmatrix} \stackrel{w_2 \rightarrow w_2 - w_1}{=} \ker \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1 & i-1 \end{pmatrix} \stackrel{w_1 \rightarrow iw_1}{=} \ker \begin{pmatrix} -1 & i-1 \\ -1 & i-1 \end{pmatrix} \\
 &= \ker \begin{pmatrix} -1 & i-1 \end{pmatrix} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix}}_{=u_2} \right\rangle
 \end{aligned}$$

**krok 3:** baza ortonormalna  $\mathbb{C}^2$ , wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są zawsze ortogonalne, łatwo się przekonać, że  $\langle u_1 | u_2 \rangle = 0$ , wektory faktycznie są ortogonalne. Musimy je jeszcze znormalizować, mamy

$$\begin{aligned}
 \|u_1\|^2 &= 3 & \hat{u}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \\
 \|u_2\|^2 &= 3 & \hat{u}_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Mamy zatem bazę ortonormalną złożoną z  $u_1$  - wektora własnego z wartością własną  $2+i$  i  $u_2$  - wektora własnego z wartością własną  $2-2i$ .

**krok 4:** rozkład spektralny, wiemy że rzut ortogonalny na podprzestrzeń rozpiętą przez wektor  $\hat{u}$  to  $|\hat{u}\rangle \langle \hat{u}|$ , mamy zatem

$$\begin{aligned}
 P_1 &= |\hat{u}_1\rangle \langle \hat{u}_1| = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} (1 \quad 1-i) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix} \\
 P_2 &= |\hat{u}_2\rangle \langle \hat{u}_2| = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix} (-1-i \quad 1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1+i \\ -1-i & 1 \end{pmatrix} \\
 F &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = \frac{2+i}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix} + \frac{2-2i}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1+i \\ -1-i & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

b) **krok 0:** sprawdzenie normalności operatora. Mamy standardowy iloczyn skalarny, więc sprzężenie hermitowskie to złożenie transpozycji i sprzężenia zespolonego, zauważmy że

$$F^\dagger = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = F$$

$F$  jest hermitowski, więc jest normalny.

**Krok 1:** wartości własne

$$\omega(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda-1)(-\lambda^2 - 4\lambda - 4) = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

Gdzie najpierw zauważyliśmy, że  $\omega(1) = 0$  i wyciągnęliśmy czynnik  $(\lambda - 1)$ , mamy dwie wartości własne

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -2$$

**Krok 2:** podprzestrzenie własne

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[w_2 \rightarrow w_2 - w_3]{w_1 \rightarrow w_1 + 2w_3} \ker \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{w_2 \rightarrow w_2 - w_1} \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=u_1} \right\rangle$$

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\tilde{u}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=\tilde{u}_3} \right\rangle$$

**Krok 3:** baza ortonormalna  $\mathbb{C}^3$ , wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są zawsze ortogonalne, żeby mieć układ ortonormalny musimy zortogonalizować układ  $\tilde{u}_2, \tilde{u}_3$  ortogonalizacją Grama Schmidta

$$u_2 = \tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \tilde{u}_3 - \frac{\langle \tilde{u}_2 | \tilde{u}_3 \rangle}{\|\tilde{u}_2\|^2} \tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Musimy je jeszcze znormalizować, mamy

$$\|u_1\|^2 = 3 \quad \hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|u_2\|^2 = 2 \quad \hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|u_3\|^2 = \frac{6}{4} \quad \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Mamy zatem bazę ortonormalną złożoną z  $u_1$  - wektora własnego z wartością własną 1 i  $u_2, u_3$  - wektorów własnych z wartością własną  $-2$ .

**krok 4:** rozkład spektralny, wiemy że rzut ortogonalny na podprzestrzeń rozpiętą przez wektor  $\hat{u}_1$  to

$|\hat{u}_1\rangle \langle \hat{u}_1|$ , a na podprzestrzeń rozpiętą przez  $\hat{u}_2, \hat{u}_3$  to  $|\hat{u}_2\rangle \langle \hat{u}_2| + |\hat{u}_3\rangle \langle \hat{u}_3|$ , mamy zatem

$$\begin{aligned} P_1 &= |\hat{u}_1\rangle \langle \hat{u}_1| = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ P_2 &= |\hat{u}_2\rangle \langle \hat{u}_2| + |\hat{u}_3\rangle \langle \hat{u}_3| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ F &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mogliśmy oszczędzić sobie rachunków i znaleźć  $P_2$  korzystając z tego, że  $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$  to baza mamy  $P_1 + P_2 = \mathbb{1}$ .  $P_2$  mogliśmy znaleźć ze wzoru  $P_2 = \mathbb{1} - P_1$

c) **krok 0:** sprawdzenie normalności operatora. Mamy standardowy iloczyn skalarny, więc sprzężenie hermitowskie to złożenie transpozycji i sprzężenia zespolonego, zauważmy że

$$F^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -i \\ 1 & 0 & i \\ i & -i & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix} = F$$

$F$  jest hermitowski, więc jest normalny.

**Krok 1:** wartości własne

$$\omega(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & i \\ 1 & -\lambda & -i \\ -i & i & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 - \lambda + 2) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

Gdzie najpierw zauważyliśmy, że  $\omega(1) = 0$  i wyciągnęliśmy czynnik  $(\lambda - 1)$ , mamy dwie wartości własne

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -2$$

**Krok 2:** podprzestrzenie własne

$$\begin{aligned} V_1 &= \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & i \\ 1 & -1 & -i \\ -i & i & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & i \\ -i & i & -1 \end{pmatrix} \stackrel{w_2 \rightarrow -iw_2}{=} \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & i \\ -1 & 1 & i \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & i \end{pmatrix} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\tilde{u}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\tilde{u}_2} \right\rangle \\ V_2 &= \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & i \\ 1 & 2 & -i \\ -i & i & 2 \end{pmatrix} \stackrel{w_3 \rightarrow iw_3}{=} \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & i \\ 1 & 2 & -i \\ 1 & -1 & 2i \end{pmatrix} \stackrel{w_1 \rightarrow w_1 + w_2}{\stackrel{w_3 \rightarrow w_3 + 2w_2}{=}} \ker \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -i \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{w_2 \rightarrow w_2 - w_1/3}{=} \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\tilde{u}_3} \right\rangle \end{aligned}$$

**Krok 3:** baza ortonormalna  $\mathbb{C}^3$ , wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są zawsze ortogonalne, żeby mieć układ ortonormalny musimy zortogonalizować układ  $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$  ortogonalizacją Grama Schmidta

$$u_1 = \tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \tilde{u}_2 - \frac{\langle \tilde{u}_1 | \tilde{u}_2 \rangle}{\|\tilde{u}_1\|^2} \tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Musimy je jeszcze znormalizować, mamy

$$\begin{aligned} \|u_1\|^2 &= 2 & \hat{u}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \|u_2\|^2 &= \frac{6}{4} & \hat{u}_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 2 \end{pmatrix} \\ \|u_3\|^2 &= 3 & \hat{u}_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mamy zatem bazę ortonormalną złożoną z  $u_1, u_2$  - wektory własne z wartością własną 1 i  $u_3$  - wektora własnego z wartością własną  $-2$ .

**krok 4:** rozkład spektralny, wiemy że rzut ortogonalny na podprzestrzeń rozpiętą przez wektor  $\hat{u}_1, \hat{u}_2$  to  $|\hat{u}_1\rangle \langle \hat{u}_1| + |\hat{u}_2\rangle \langle \hat{u}_2|$ , a na podprzestrzeń rozpiętą przez  $\hat{u}_3$  to  $|\hat{u}_3\rangle \langle \hat{u}_3|$ , mamy zatem

$$\begin{aligned} P_1 &= |\hat{u}_1\rangle \langle \hat{u}_1| + |\hat{u}_2\rangle \langle \hat{u}_2| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & i & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2i \\ -1 & 1 & -2i \\ -2i & 2i & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & i \\ 1 & 2 & -i \\ -i & i & 2 \end{pmatrix} \\ P_2 &= |\hat{u}_3\rangle \langle \hat{u}_3| = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -i \\ -1 & 1 & i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix} \\ F &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & i \\ 1 & 2 & -i \\ -i & i & 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -i \\ -1 & 1 & i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mogliśmy oszczędzić sobie rachunków i znaleźć  $P_1$  korzystając z tego, że  $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$  to baza mamy  $P_1 + P_2 = \mathbb{1}$ .  $P_1$  mogliśmy znaleźć ze wzoru  $P_1 = \mathbb{1} - P_2$