

Notatki do ćwiczeń z Algebry z Geometrią II

Wojciech Niedziółka

11 Odległość pomiędzy podprzestrzeniami afinicznymi przestrzeni euklidesowej, macierz Grama

Będziemy kontynuować materiał z poprzednich ćwiczeń, ale najpierw dwie definicje, by oswoić się z bardziej technicznym słownictwem

Definicja 28. Przestrzenią euklidesową wymiaru n będziemy nazywać $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym

Definicja 29. Podprzestrzenią afiniczną przestrzeni wektorowej V nazywamy zbiór postaci

$$x_0 + W = \{x_0 + v \mid v \in W\}$$

gdzie x_0 należy do V , a W jest jej podprzestrzenią wektorową. Przykładami podprzestrzeni afinicznych są punkty, proste, płaszczyzny

Zad. 11.1

Wyznaczyć odległość pomiędzy danymi podprzestrzeniami afinicznymi przestrzeni euklidesowej wymiaru n , dla

a) punktu y_0 i płaszczyzny Π , gdzie

$$y_0 = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Pi = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{matrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \end{matrix} \right\}$$

b) prostej L i płaszczyzny Π , gdzie

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \frac{x_1 - 1}{1} = \frac{x_2 - 1}{-1} = \frac{x_3 - 1}{2} = \frac{x_4 + 3}{4} \right\}$$
$$\Pi = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{matrix} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{matrix} \right\}$$

c) prostej L_1 i prostej L_2 , gdzie

$$L_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 3x_3 = 1, x_2 = 0 \right\}$$
$$L_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x_1 + 1}{3} = \frac{x_2 + 1}{2} = \frac{x_3 - 1}{2} \right\}$$

Rozw. 11.1

a) Najpierw przejdźmy do opisu parametrycznego płaszczyzny Π , wyznaczmy x_1 i x_2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases} \xrightarrow[w_2 \rightarrow w_2]{w_1 \rightarrow w_1 - 2w_2} \begin{cases} x_1 - x_3 - 6x_4 = -9 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -9 + x_3 + 6x_4 \\ x_2 = 5 - 2x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

Każdy element Π można zapisać jako

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Płaszczyzna Π ma zatem opis parametryczny

$$\Pi = \underbrace{\begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=y_1} + \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_2} \right\rangle = y_1 + W$$

gdzie W to podprzestrzeń rozpięta przez wektory v_1, v_2 . O y_1 można myśleć jako o rozwiązaniu szczególnym równania niejednorodnego (RSRN) tzn. układu równań z liczbami po prawej stronie, a o podprzestrzeni W jako o zbiorze rozwiązań ogólnych równania jednorodnego (RORJ) tzn. układu równań z zerami po prawej stronie. Ogólnie rozwiązanie naszego układu równań, tak zwane rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego to zbiór y_1 plus element W , czasem można się spotkać z (symbolicznym) zapisem $\text{RORN} = \text{RSRN} + \text{RORJ}$. Taka parametryzacja pozwoli na proste rachunki w dalszej części zadania, można próbować innych parametryzacji (np. wyznaczając x_1 i x_4 , ale dałoby to bardziej problematyczne rachunki w dalszej części zadania). Dalsze postępowanie jest analogiczne do problemu z zeszłego tygodnia, definiujemy wektor łączący punkt y_0 z płaszczyzną Π , nazwijmy go

$$\Delta = y_0 - y_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Wiemy, że ma on składową leżącą w płaszczyźnie (należącą do podprzestrzeni W tzn. będącą kombinacją liniową v_1 i v_2), oraz składową prostopadłą do płaszczyzny $\Delta_\perp$, która jest najkrótszym wektorem łączącym punkt y_0 z płaszczyzną, mamy

$$\Delta = \Delta_\perp + s_1 v_1 + s_2 v_2$$

dla pewnych $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Aby znaleźć $\Delta_\perp$ posłużymy się schematem rozumowania z ortogonalizacji Grama-Schmidta, najpierw zortogonalizujemy układ $\{v_1, v_2\}$.

$$e_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle e_1 | v_2 \rangle = 12$$

$$\|e_1\|^2 = 6$$

$$e_2 = v_2 - \frac{\langle e_1 | v_2 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{12}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\{e_1, e_2\}$ to baza ortogonalna podprzestrzeni W . Możemy teraz znaleźć składową Δ prostopadłą do podprzestrzeni W

$$\Delta_\perp = \Delta - \frac{\langle e_1 | \Delta \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \frac{\langle e_2 | \Delta \rangle}{\|e_2\|^2} e_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{-12}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{110}{22} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Odległość y_0 od płaszczyzny Π wynosi zatem $\|\Delta_\perp\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2 + (-9)^2} = \sqrt{86}$

b) Ten podpunkt można zrobić korzystając z dowolnej z metod już poznanych, najpierw przechodzimy do opisu parametrycznego, dla prostej możemy zgadnąć rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego (RSRN) i znaleźć łatwo rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (RORJ)

$$\frac{x_1 - 1}{1} = \frac{x_2 - 1}{-1} = \frac{x_3 - 1}{2} = \frac{x_4 + 3}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = -3 \text{ (RSRN)} \\ \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{-1} = \frac{x_3}{2} = \frac{x_4}{4} \text{ (RORJ)} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$L = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{= y_1} + \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{= v_1} \right\rangle$$

Podobnie możemy znaleźć opis parametryczny płaszczyzny, rozwiązaniem szczególnym jest $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. RORJ

znajdziemy wyznaczając x_1, x_2 z jednorodnego układu równań (z zerami po prawej stronie)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[w_2 \rightarrow w_2]{w_1 \rightarrow w_1 - w_2} \begin{cases} x_1 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 - x_4 \end{cases}$$

Każdy element Π można zapisać jako

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{RSRN} + \underbrace{\frac{x_3}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{RORJ}$$

Płaszczyzna Π ma zatem opis parametryczny

$$\Pi = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=y_2} + \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_3} \right\rangle = y_2 + W$$

Wiemy, że zachodzi

$$\Delta = y_1 - y_2 = \Delta_{\perp} + s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3$$

Moglibyśmy znowu zortogonalizować układ wektorów $\{v_1, v_2, v_3\}$ i znaleźć $\Delta_{\perp}$ jak ostatnio, ale łatwo się przekonać, że rachunkowo nie jest to takie proste. Posłużymy się tu trickiem, $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ jest podprzestrzenią wymiaru 3, więc jej dopełnienie ortogonalne ma wymiar $\dim(V) - \dim(W) = 4 - 3 = 1$, czyli jest rozpięte przez pewien wektor n (innymi słowy każdy wektor ortogonalny do W jest proporcjonalny do n). Z drugiej strony wiemy, że $\Delta_{\perp}$ jest ortogonalne do prostej i płaszczyzny, jest więc elementem $W^{\perp}$ i mamy $\Delta_{\perp} = \alpha n$. Możemy łatwo znaleźć n , jest on ortogonalny do v_1, v_2, v_3 , więc spełnia poniższy układ równań, który możemy przepisać w języku jądra macierzy

$$\begin{aligned} \begin{cases} \langle v_1 | n \rangle = 0 \\ \langle v_2 | n \rangle = 0 \\ \langle v_3 | n \rangle = 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} 1n_1 - 1n_2 + 2n_3 + 4n_4 = 0 \\ 2n_1 - 1n_2 + 2n_3 + 0n_4 = 0 \\ 3n_1 - 1n_2 + 0n_3 + 1n_4 = 0 \end{cases} \rightarrow n \in \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 13 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 13 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} 8 \\ 26 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = n \end{aligned}$$

Wybieramy dowolny element jądra jako n (mamy tu swobodę współczynnika przed wektorem, np. $7n$ byłby równie dobrym wyborem), możemy teraz powiązać wektor n i $\Delta_{\perp}$ korzystając z tego, że n jest ortogonalne do v_1, v_2 i v_3 , a $\Delta_{\perp} = \alpha n$

$$\langle n | \Delta \rangle = \underbrace{\langle n | \Delta_{\perp} \rangle}_{=\alpha \|n\|^2} + s_1 \underbrace{\langle n | v_1 \rangle}_{=0} + s_2 \underbrace{\langle n | v_2 \rangle}_{=0} + s_3 \underbrace{\langle n | v_3 \rangle}_{=0} = \alpha \|n\|^2$$

Podstawiając dostajemy szukany wektor

$$\Delta_{\perp} = \alpha n = \frac{\langle n | \Delta \rangle}{\|n\|^2} n$$

Szukana odległość to $\|\Delta_{\perp}\| = \frac{|\langle n|\Delta\rangle|}{\|n\|} = \frac{23}{\sqrt{769}}$

c) Krok pierwszy to jak zawsze przejście do opisu parametrycznego, dla pierwszej prostej mamy

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 3x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ L_1 &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=x_1} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=v_1} \end{aligned}$$

a dla drugiej możemy zgadnąć rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego (RSRN) i rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (RORJ)

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + 1}{3} = \frac{x_2 + 1}{2} = \frac{x_3 - 1}{2} &\rightarrow \begin{cases} x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = 1 \text{ (RSRN)} \\ \frac{x_1}{3} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{2} \text{ (RORJ)} \end{cases} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ L_2 &= \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=x_2} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=v_2} \end{aligned}$$

Wiemy, że zachodzi

$$\Delta = x_1 - x_2 = \Delta_{\perp} + s_1 v_1 + s_2 v_2$$

Zastosujemy tu kolejną sztuczkę, nasz przypadek jest dość szczególny, przestrzeń wektorowa ma wymiar 3, a nasza podprzestrzeń rozpięta na v_1, v_2 wymiar 2. $\Delta_{\perp}$ należy jak poprzednio do dopełnienia ortogonalnego, które jest jednowymiarową podprzestrzenią, więc jeśli znajdziemy dowolny wektor n prostopadły do v_1 i v_2 będziemy mieli jak w poprzednim podpunkcie $\Delta_{\perp} = \frac{\langle n|\Delta\rangle}{\|n\|^2}n$. Zamiast rozwiązywać układ równań i szukać wektora prostopadłego do v_1, v_2 , możemy skorzystać z iloczynu wektorowego, wiemy że $v_1 \times v_2$ jest prostopadły do v_1 i v_2 , więc jest to dobry kandydat na n

$$\begin{aligned} n = v_1 \times v_2 &= \det \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ e_x & e_y & e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} \\ \|\Delta_{\perp}\| &= \frac{|\langle n|\Delta\rangle|}{\|n\|} = \frac{11}{\sqrt{121}} = 1 \end{aligned}$$

Poznaliśmy trzy sposoby na znalezienie odległości pomiędzy podprzestrzeniami afinicznymi, pierwszym krokiem zawsze jest znalezienie opisu parametrycznego z którego otrzymujemy Δ - dowolny wektor

łączący podprzestrzenie afiniczne, oraz $v_1, v_2, \dots, v_k$ - wektory rozpinające przestrzenie afiniczne. Kolejne podpunkty prezentowały różne podejścia do znalezienia odległości: a) ortogonalizację Grama-Schmidta układu $\{v_1, v_2, \dots, v_k, \Delta\}$, która w rezultacie daje $\{e_1, \dots, e_k, \Delta_\perp\}$ działającą zawsze, ale mogącą być rachunkowo skomplikowaną. W przypadku gdy dopełnienie ortogonalne $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ ma wymiar 1 (tzn. $\dim V - k = 1$) możemy b) znaleźć wektor n rozwiązując układ równań lub w szczególnym przypadku $\mathbb{R}^3$ użyć iloczynu wektorowego i zdefiniować $n = v_1 \times v_2$. Daje to prosty wzór na $\Delta_\perp = \frac{\langle n | \Delta \rangle}{\|n\|^2} n$, który wynika z tego, że dopełnienie ortogonalne ma wymiar 1, więc n i $\Delta_\perp$ są proporcjonalne.

Okazuje się, że jest jeszcze jedna metoda, która jest dość uniwersalna i rachunkowo nieskomplikowana, potrzebujemy najpierw paru definicji i faktów

Definicja 30. Macierzą Grama układu wektorów $v_1, v_2, \dots, v_k$ nazywamy macierz $G(v_1, v_2, \dots, v_k)$, której elementy macierzowe są równe $[G(v_1, v_2, \dots, v_k)]_j^i = \langle v_i | v_j \rangle$

Twierdzenie 31. Objętość (k wymiarowa) równoległoboku rozpiętego na wektorach $v_1, v_2, \dots, v_k$ tzn. zbioru $\{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$ jest równa $Vol(v_1, v_2, \dots, v_k) = \sqrt{\det G(v_1, v_2, \dots, v_k)}$. Dodatkowo jest spełniona zależność $Vol(v_1, v_2, \dots, v_k) = Vol(v_1, v_2, \dots, v_{k-1})H$, gdzie H jest długością składowej v_k prostopadłej do podprzestrzeni rozpiętej na wektorach $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$, jest to k -wymiarowy analog wzoru "objętość = pole powierzchni razy wysokość"

Macierz Grama pozwala na alternatywny schemat rozwiązania: pierwszy krok pozostaje ten sam, musimy wyznaczyć Δ i $v_1, v_2, \dots, v_k$, szukamy $\|\Delta_\perp\|$ - długości składowej Δ , która jest prostopadła do podprzestrzeni rozpiętej na $v_1, v_2, \dots, v_k$. Jest to dokładnie H z twierdzenia, można je wyrazić jako stosunek $Vol(v_1, v_2, \dots, v_k, \Delta)$ (objętości) do $Vol(v_1, v_2, \dots, v_k)$ (pola podstawy). Alternatywne rachunki podpunktów powyższego zadania wyglądają następująco:

a)

$$Vol(v_1, v_2, \Delta) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle v_1 | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_2 \rangle & \langle v_1 | \Delta \rangle \\ \langle v_2 | v_1 \rangle & \langle v_2 | v_2 \rangle & \langle v_2 | \Delta \rangle \\ \langle \Delta | v_1 \rangle & \langle \Delta | v_2 \rangle & \langle \Delta | \Delta \rangle \end{pmatrix}} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 6 & 12 & -12 \\ 12 & 46 & 86 \\ -12 & 86 & 660 \end{pmatrix}} = \sqrt{11352}$$

$$Vol(v_1, v_2) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle v_1 | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_2 \rangle \\ \langle v_2 | v_1 \rangle & \langle v_2 | v_2 \rangle \end{pmatrix}} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 46 \end{pmatrix}} = \sqrt{132}$$

$$H = \frac{Vol(v_1, v_2, \Delta)}{Vol(v_1, v_2)} = \sqrt{\frac{11352}{132}} = \sqrt{86}$$

b)

$$Vol(v_1, v_2, v_3, \Delta) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle v_1 | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_2 \rangle & \langle v_1 | v_3 \rangle & \langle v_1 | \Delta \rangle \\ \langle v_2 | v_1 \rangle & \langle v_2 | v_2 \rangle & \langle v_2 | v_3 \rangle & \langle v_2 | \Delta \rangle \\ \langle v_3 | v_1 \rangle & \langle v_3 | v_2 \rangle & \langle v_3 | v_3 \rangle & \langle v_3 | \Delta \rangle \\ \langle \Delta | v_1 \rangle & \langle \Delta | v_2 \rangle & \langle \Delta | v_3 \rangle & \langle \Delta | \Delta \rangle \end{pmatrix}} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 22 & 7 & 8 & -14 \\ 7 & 9 & 7 & -1 \\ 8 & 7 & 11 & -1 \\ -14 & -1 & -1 & 12 \end{pmatrix}} = \sqrt{529}$$

$$Vol(v_1, v_2, v_3) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle v_1 | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_2 \rangle & \langle v_1 | v_3 \rangle \\ \langle v_2 | v_1 \rangle & \langle v_2 | v_2 \rangle & \langle v_2 | v_3 \rangle \\ \langle v_3 | v_1 \rangle & \langle v_3 | v_2 \rangle & \langle v_3 | v_3 \rangle \end{pmatrix}} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 22 & 7 & 8 \\ 7 & 9 & 7 \\ 8 & 7 & 11 \end{pmatrix}} = \sqrt{769}$$

$$H = \frac{Vol(v_1, v_2, v_3, \Delta)}{Vol(v_1, v_2, v_3)} = \sqrt{\frac{529}{769}} = \frac{23}{\sqrt{769}}$$

c)

$$Vol(v_1, v_2, \Delta) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle v_1 | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_2 \rangle & \langle v_1 | \Delta \rangle \\ \langle v_2 | v_1 \rangle & \langle v_2 | v_2 \rangle & \langle v_2 | \Delta \rangle \\ \langle \Delta | v_1 \rangle & \langle \Delta | v_2 \rangle & \langle \Delta | \Delta \rangle \end{pmatrix}} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 10 & -7 & -7 \\ -7 & 17 & 6 \\ -7 & 6 & 6 \end{pmatrix}} = \sqrt{121}$$

$$Vol(v_1, v_2) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle v_1 | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_2 \rangle \\ \langle v_2 | v_1 \rangle & \langle v_2 | v_2 \rangle \end{pmatrix}} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 17 \end{pmatrix}} = \sqrt{121}$$

$$H = \frac{Vol(v_1, v_2, \Delta)}{Vol(v_1, v_2)} = \sqrt{\frac{121}{121}} = 1$$