

Notatki do ćwiczeń z Algebry z Geometrią II

Wojciech Niedziółka

10 Ortogonalizacja Grama-Schmidta, wielomiany Laguerre'a, odległość punktu od prostej

Na początek sformalizujmy algorytm, który pojawił się na poprzednich zajęciach. Nietrudno się przekonać, że uogólnia się on do układu n wektorów

Twierdzenie 27. *Ortogonalizacja Grama-Schmidta Niech $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ będzie bazą przestrzeni (podprzestrzeni) V , wtedy wektory $f_1, f_2, \dots, f_n$ dane poniższą rekurencją są bazą ortogonalną V*

$$\begin{aligned}f_1 &= e_1 \\f_2 &= e_2 - \frac{\langle f_1 | e_2 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 \\f_3 &= e_3 - \frac{\langle f_1 | e_3 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 - \frac{\langle f_2 | e_3 \rangle}{\|f_2\|^2} f_2 \\&\vdots \\f_k &= e_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle f_j | e_k \rangle}{\|f_j\|^2} f_j \\&\vdots \\f_n &= e_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle f_j | e_n \rangle}{\|f_j\|^2} f_j\end{aligned}$$

Możemy zastosować ten algorytm do znalezienia bazy ortogonalnej jak w zadaniu z poprzednich ćwiczeń, aby jednak uniknąć robienia żmudnych (choć zapewne bardzo kształcących) zadań, przyjrzymy się bardziej "fizycznym" problemom

Zad. 10.1

Znajdź bazę ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}_3[\cdot]$ z iloczynem skalarnym $\langle v | w \rangle = \int_0^\infty v(x)w(x)e^{-x} dx$

Rozw. 10.1

Algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta wymaga od nas liczenia iloczynów skalarnych, warto więc policzyć najpierw następującą całkę

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

skorzystamy tu z całkowania przez części

$$I_n = \int_0^{\infty} \underbrace{x^n}_{f(x)} \underbrace{e^{-x}}_{g'(x)} dx = \underbrace{x^n}_{f(x)} \underbrace{-e^{-x}}_{g(x)} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \underbrace{nx^{n-1}}_{f'(x)} \underbrace{-e^{-x}}_{g(x)} dx = \begin{cases} 0 + nI_{n-1} & \text{dla } n \neq 0 \\ 1 & \text{dla } n = 0 \end{cases}$$

Mając wzór rekurencyjny nietrudno się przekonać, że $I_n = n!$ (choćby rozpisując pierwsze kilka wyrazów: $I_1 = 1, I_2 = 1 \cdot 2, I_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$), uzbrojeni w tę wiedzę możemy zacząć procedurę ortogonalizacji bazy, zaczynamy jak to zwykle od bazy standardowej $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3$

$$f_1 = e_1 = 1$$

$$\|f_1\|^2 = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = I_0 = 1$$

$$\langle f_1 | e_2 \rangle = \int_0^{\infty} x^1 e^{-x} dx = I_1 = 1$$

$$f_2 = e_2 - \frac{\langle f_1 | e_2 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 = x - \frac{1}{1} 1 = x - 1$$

$$\|f_2\|^2 = \int_0^{\infty} (x-1)^2 e^{-x} dx = I_2 - 2I_1 + I_0 = 1$$

$$\langle f_1 | e_3 \rangle = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = I_2 = 2$$

$$\langle f_2 | e_3 \rangle = \int_0^{\infty} (x-1)x^2 e^{-x} dx = I_3 - I_2 = 4$$

$$\begin{aligned} f_3 &= e_3 - \frac{\langle f_1 | e_3 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 - \frac{\langle f_2 | e_3 \rangle}{\|f_2\|^2} f_2 \\ &= x^2 - \frac{2}{1} 1 - \frac{4}{1} (x-1) = x^2 - 4x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|f_3\|^2 &= \int_0^\infty (x^2 - 4x + 2)^2 e^{-x} dx = I_4 - 8I_3 + 20I_2 - 16I_1 + 4I_0 = 4 \\ \langle f_1 | e_4 \rangle &= \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = I_3 = 6 \\ \langle f_2 | e_4 \rangle &= \int_0^\infty (x-1)x^3 e^{-x} dx = I_4 - I_3 = 18 \\ \langle f_3 | e_4 \rangle &= \int_0^\infty (x^2 - 4x + 2)x^3 e^{-x} dx = I_5 - 4I_4 + 2I_3 = 36 \\ f_4 &= e_4 - \frac{\langle f_1 | e_4 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 - \frac{\langle f_2 | e_4 \rangle}{\|f_2\|^2} f_2 - \frac{\langle f_3 | e_4 \rangle}{\|f_3\|^2} f_3 \\ &= x^3 - \frac{6}{1}1 - \frac{18}{1}(x-1) - \frac{36}{4}(x^2 - 4x + 2) = x^3 - 9x^2 + 18x - 6\end{aligned}$$

Wielomiany, które uzyskaliśmy to pierwsze 4 wielomiany Laguerre'a, pojawiają się one naturalnie w mechanice kwantowej podczas rozwiązywania atomu wodoru (oczywiście powyższą procedurę można ciągnąć dalej i dostać kolejne wielomiany Laguerre'a, ale pierwsze cztery nam wystarczą na razie)

W nazwie przedmiotu znajduje się słowo "geometria" i nadszedł czas na spełnienie tej długo wyczekiwanej obietnicy. Rozpoczynamy temat szukania odległości między punktami, prostymi i płaszczyznami od zadania rozgrzewkowego.

Zad. 10.2

Znajdź odległość punktu $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ od prostej L przechodzącej przez punkty $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Rozw. 10.2

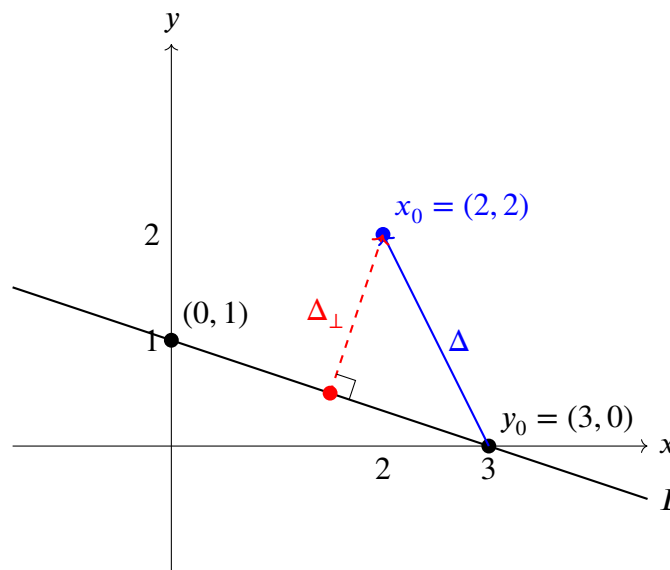


Figure 1: Rysunek do zadania 10.2

Zastanówmy się nad tym jak opisywać proste, sposób pierwszy to przez punkty, jeśli mamy dane dwa punkty jak w treści zadania to jednoznacznie nam to określa naszą prostą. Sposób drugi to przez układ równań,

w naszym wypadku prosta jest opisana równaniem $x + 3y = 3$. Wreszcie sposób trzeci, który będzie najbardziej przydatny w szukaniu odległości punktu od prostej to opis parametryczny, dowolny punkt prostej L można zapisać jako

$$L \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3y \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{y_0} + y \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}}_v$$

Innymi słowy, prosta L to podprzestrzeń rozpięta przez wektor v , która została przesunięta o wektor y_0 . Interpretacja tych wektorów jest następująca: y_0 to dowolny wektor należący do prostej, a v to wektor dający nam kierunek prostej.

$$L = y_0 + \langle v \rangle$$

Niech $\Delta = x_0 - y_0$, jest to pewien wektor łączący punkt x_0 z prostą L . Fakt, który wykorzystamy jest taki, że najkrótszy wektor łączący punkt x_0 z prostą L $\Delta_\perp$ tworzy z nią kąt prosty, czyli jest ortogonalny do v . Wiemy, że nasz wektor Δ jest sumą $\Delta_\perp$ i wektora v z pewnym współczynnikiem $s \in \mathbb{R}$

$$\Delta = \Delta_\perp + sv$$

Jeśli obliczymy iloczyn skalarny $\langle v | \Delta \rangle = s \|v\|^2$ otrzymamy ten nieznany współczynnik i możemy znaleźć składową $\Delta_\perp$

$$\Delta_\perp = \Delta - \frac{\langle v | \Delta \rangle}{\|v\|^2} v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{10} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Powyższy wzór to nic innego jak ortogonalizacja Grama-Schmidta układu wektorów v i Δ , w ten sposób znajdujemy składową Δ prostopadłą do v (czyli do prostej), jest to najkrótszy wektor łączący prostą z punktem i jego długość to nasz wynik

$$d = \|\Delta_\perp\| = \frac{1}{2} \sqrt{10}$$