Notatki do ćwiczeń z Algebry z Geometrią II

Wojciech Niedziółka

9 Iloczyn skalarny, wektory ortogonalne/ortonormalne, dopełnienie ortogonalne

Definicja 21. *Niech V będzie przestrzenią wektorową. Iloczynem skalarnym w V nazywamy odwzorowanie*

$$\begin{aligned}\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times V &\to \mathbb{K}\\ v, w &\mapsto \langle v|w\rangle\end{aligned}$$

(u nas $\mathbb{K}$ będzie równe $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{R}$) takie, że
1) $\langle v|w\rangle$ jest liniowe w drugim argumencie, tzn $\langle v|\lambda w + \lambda' w'\rangle = \lambda \langle v|w\rangle + \lambda' \langle v|w'\rangle$
2) $\langle v|w\rangle$ jest antyliniowe w pierwszym argumencie, tzn $\langle \lambda v + \lambda' v'|w\rangle = \overline{\lambda} \langle v|w\rangle + \overline{\lambda'} \langle v'|w\rangle$
3) $\langle v|w\rangle = \overline{\langle w|v\rangle}$ (iloczyn skalarny jest hermitowski)
4) $\forall_{V \ni v \neq 0} \langle v|v\rangle > 0$

Przykład 22.

- *$V = \mathbb{R}^n$, mamy iloczyn skalarny zwany standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$*

$$\langle x|y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_n y_n$$

- *$V = \mathbb{C}^n$, mamy iloczyn skalarny zwany standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{C}^n$*

$$\langle x|y\rangle = \overline{x_1} y_1 + \overline{x_2} y_2 + \dots \overline{x_n} y_n$$

- *$V = \mathbb{R}_2[\cdot]$, mamy iloczyn skalarny*

$$\langle v|w\rangle = v(0)w(0) + v(1)w(1) + v(2)w(2)$$

- *$V = C([-1, 1])$ (ciągłe funkcje na odcinku [-1,1]), mamy iloczyn skalarny (pojawiający się też w mechanice kwantowej, jest on tam standardowym iloczynem skalarnym na przestrzeni funkcji całkowalnych w kwadracie)*

$$\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} \overline{f(x)} g(x) dx$$

Zad. 9.1

Dana jest macierz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Definiujemy odwzorowanie $\langle \cdot | \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dane przez

$$\langle x|y\rangle_A = \langle x|Ay\rangle$$

Udowodnij, że $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ jest iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^3$, jeśli $\langle \cdot | \cdot \rangle$ to standardowy iloczyn skalarny. Co możemy powiedzieć o wektorach własnych macierzy A?

Rozw. 9.1

Sprawdźmy czy nasze odwzorowanie spełnia własności iloczynu skalarnego:
1) $\langle v|\lambda w + \lambda' w'\rangle_A \stackrel{?}{=} \lambda \langle v|w\rangle_A + \lambda' \langle v|w'\rangle_A$
Oznaczenia LHS (Left Hand Side) - lewa strona równania, RHS (Right Hand Side) - prawa strona równania. Użyjemy tego, że $\langle v|w\rangle$ jest iloczynem skalarnym, a co za tym idzie, jest liniowy w drugim argumencie

$$LHS = \left\langle v \middle| \lambda w + \lambda' w' \right\rangle_A = \left\langle v \middle| A(\lambda w + \lambda' w') \right\rangle = \left\langle v \middle| \lambda A w + \lambda' A w' \right\rangle = \lambda \langle v|Aw\rangle + \lambda' \left\langle v \middle| Aw' \right\rangle = RHS$$

2) $\langle \lambda v + \lambda' v'|w\rangle_A \stackrel{?}{=} \lambda \langle v|w\rangle_A + \lambda' \langle v'|w\rangle_A$
Podobnie jak w 1) używamy tego, że $\langle v|w\rangle$ jest liniowy w pierwszym argumencie (pracujemy z liczbami rzeczywistymi, więc sprzężenie zespolone nie pojawia się)

$$LHS = \left\langle \lambda v + \lambda' v' \middle| w \right\rangle_A = \left\langle \lambda v + \lambda' v' \middle| Aw \right\rangle = \lambda \langle v|Aw\rangle + \lambda' \left\langle v' \middle| Aw \right\rangle = RHS$$

3) $\langle v|w\rangle_A \stackrel{?}{=} \overline{\langle w|v\rangle_A}$
Zauważmy, że dla standardowego iloczynu skalarnego mamy

$$\langle v|w\rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v^T w$$

W związku z tym $LHS = v^T A w$, a $RHS = w^T A v$. Żeby zobaczyć, że te dwa wyrażenia są równe, zastosujemy sztuczkę, iloczyn skalarny daje nam liczbę, więc jeśli zadziałamy na LHS transpozycją to nie zmieni się ona (można tu myśleć o liczbie jak o macierzy 1×1). Stosując wzór na transpozycję iloczynu ($(AB)^T = B^T A^T$) i fakt, że nasza macierz jest symetryczna ($A^T = A$) dostajemy

$$LHS = v^T A w = (v^T A w)^T = w^T A^T v = w^T A v = RHS$$

4) $\forall_{V \ni x \neq 0} \langle v|v\rangle_A > 0$
Ponownie powołamy się na wzór $\langle v|v\rangle_A = v^T A v$, rozpoznajemy w tym formę kwadratową, której macierzą

jest A, możemy wykorzystać naszą wiedzę o sygnaturze formy kwadratowej by sprawdzić dodatniość iloczynu skalarnego. Minory macierzy są równe

$$D_1 = 2$$
$$D_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3$$
$$D_3 = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

Kryterium Sylvestera mówi nam, że istnieje baza diagonalizująca tę formę w której na diagonali są $D_1 = 2 > 0$, $D_2/D_1 = 3/2 > 0$, $D_3/D_2 = 4/3 > 0$. Sygnatura jest równa zatem (3,0), a więc forma kwadratowa jest dodatnia i dla niezerowych wektorów v mamy $\langle v|v\rangle > 0$

W celach edukacyjnych przyjrzyjmy się jeszcze wektorom własnym macierzy A, możemy sobie przypomnieć procedurę ich znajdywania. Najpierw szukamy zer wielomianu charakterystycznego (wartości własnych), a potem badamy jądra $A - \lambda\mathbb{1}$

$$\omega_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) = (2-\lambda)^3 + 2 - 3(2-\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = (\lambda-1)^2(4-\lambda)$$

Mamy wartości własne $\lambda = 1$ i $\lambda = 4$

$$\ker(A - \mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=v_2} \rangle$$
$$\ker(A - 4\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_3} \rangle$$

Możemy zaobserwować tu ciekawą rzecz, mamy 3 wektory własne v_1, v_2, v_3, które tworzą bazę i dodatkowo mają własność $\left\langle v_i \middle| v_j \right\rangle = 0$ dla $i \neq j$, o takich wektorach mówimy, że są ortogonalne (po fizycznemu prostopadłe, definicja niżej). Co więcej ponieważ to wektory własne, mamy $\left\langle v_i \middle| v_j \right\rangle_A = \left\langle v_i \middle| A v_j \right\rangle = \left\langle v_i \middle| \lambda_j v_j \right\rangle = 0$, więc są to też wektory ortogonalne dla iloczynu skalarnego $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$.

Teraz wprowadzimy sobie trochę definicji motywowanych przez poprzednie zadanie.

Definicja 23. *Niech V będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym, jeśli $\langle v|w\rangle = 0$, mówimy że wektory v, w są ortogonalne*

Czwarta własność iloczynu skalarnego pozwala nam na następującą definicję

Definicja 24. *Normą wektora $v \in V$ należącego do przestrzeni wektorowej z iloczynem skalarnym nazywamy wielkość $\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$ (jest to dobrze zdefiniowane, bo $\langle v|v\rangle > 0$). Dodatkowo jeśli norma wektora jest równa 1 ($\|v\| = 1$), mówimy że wektor jest znormalizowany (alternatywnie nazywamy go unormowanym, jednostkowym lub wersorem)*

Definicja 25. *Układem ortogonalnym nazywamy zestaw wektorów* $\{v_1, v_2 \dots v_n\}$ *taki, że dla* $i \neq j$ *zachodzi* $\left\langle v_i \middle| v_j \right\rangle = 0$. *Jeśli dodatkowo mamy* $\langle v_i | v_i \rangle = 1$ *(wektory są znormalizowane), mówimy że jest to układ ortonormalny (możemy wtedy napisać* $\left\langle v_i \middle| v_j \right\rangle = \delta_{i,j}$, *gdzie* $\delta_{i,j}$ *to delta Kroneckera, równa 1 jeśli indeksy są takie same i 0 jeśli są różne). Jeśli ten zestaw wektorów jest bazą przestrzeni wektorowej (lub pewnej podprzestrzeni) to nazywamy go bazą ortogonalną (lub ortonormalną jeśli wektory są unormowane) ten (pod)przestrzeni wektorowej*

Definicja 26. *Dopełnieniem ortogonalnym podprzestrzeni* $W \subset V$ *nazywamy podprzestrzeń* $W^\perp = \{v \in V | \forall_{w \in W} \langle w | v \rangle = 0\}$. *Jest to podprzestrzeń zawierająca wszystkie wektory ortogonalne do podprzestrzeni* W

Zad. 9.2

Niech $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni wektorowej V, a $W = \langle e_1 + e_2 + e_3 + 2e_4 + 3e_5, e_1 + e_2 + e_3 - e_4 \rangle$ podprzestrzenią V. Znajdź dopełnienie ortogonalne W (tzn $W^\perp$), oraz bazy ortonormalne W i $W^\perp$

Rozw. 9.2

Możemy wprowadzić sobie zapis kolumnowy, by uprościć zadanie

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5$$

Wiemy, że nasza baza jest bazą ortonormalną ($\left\langle e_i \middle| e_j \right\rangle = \delta_{i,j}$), więc iloczyn skalarny w tym zapisie to standardowy iloczyn skalarny

$$\langle x | y \rangle = \langle x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 \big| y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 + y_4 e_4 + y_5 e_5 \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + x_5 y_5$$

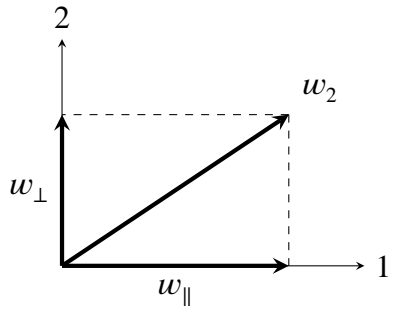
Korzystając z tego zapisu możemy wyrazić W jako

$$W = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=w_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=w_2} \rangle$$

Dopełnienie ortogonalne można znaleźć przez rachunek z definicji. Jest to zbiór wektorów ortogonalnych do wszystkich wektorów z W, co jest równoważne temu, że są ortogonalne do bazy W (z liniowości iloczynu skalarnego). Czyli jeśli $x \in W^\perp$ spełnione są równania

$$\begin{cases} \langle x | w_1 \rangle = 0 \\ \langle x | w_2 \rangle = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[w_2 \to w_2]{w_1 \to w_1 - w_2} \begin{cases} 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_4 = -x_5 \\ x_1 = -x_2 - x_3 - x_5 \end{cases}$$



Czyli dowolny element $W^\perp$ ma postać

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wnioskujemy, że $W^\perp$ to podprzestrzeń rozpięta na tych trzech wektorach, oznaczamy je w_3, w_4, w_5 do dalszych obliczeń

$$W^\perp = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=w_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=w_4}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=w_5} \right\rangle$$

Możemy dokonać też obserwacji, że wektory w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 są liniowo niezależne i tworzą bazę V, jest to przykładowe potwierdzenie faktu, że $V = W \oplus W^\perp$.

Mamy bazy W i $W^\perp$, zastanówmy się jak możemy znaleźć bazy ortonormalne tych podprzestrzeni. Baza W ma dwa elementy w_1, w_2, więc baza ortogonalna też będzie złożona z pewnych dwóch wektorów f_1, f_2, na pierwszy z nich wybierzmy w_1, tzn $f_1 = w_1$. Żeby znaleźć f_2 posłużymy się następującym obrazkiem Wektor w_2 ma dwie składowe $w_\parallel$ równoległą do f_1 i $w_\perp$ prostopadłą do f_1 (i równoległą do f_2). Naszym kandydatem na f_2 - wektor prostopadły do f_1 i należący do podprzestrzeni W będzie składowa $w_\perp$. Jak znaleźć łatwo $w_\perp$? Wykorzystamy do tego iloczyn skalarny, wiemy że wektor w_2 można zapisać w bazie f_1, f_2 z pewnymi stałymi

$$w_2 = \alpha f_1 + \beta f_2$$

Jeśli obliczymy teraz iloczyn skalarny w_2 z f_1 i f_2 dostaniemy równania (pamiętaj, że f_1, f_2 są ortogonalne)

$$\langle f_1 | w_2 \rangle = \alpha \langle f_1 | f_1 \rangle + \beta \langle f_1 | f_2 \rangle = \alpha \| f_1 \|^2$$
$$\langle f_2 | w_2 \rangle = \alpha \langle f_2 | f_1 \rangle + \beta \langle f_2 | f_2 \rangle = \beta \| f_2 \|^2$$

Czyli współczynniki rozkładu są dane przez iloczyn skalarny

$$w_2 = \underbrace{\frac{\langle f_1|w_2\rangle}{\|f_1\|^2} f_1}_{=w_\parallel} + \underbrace{\frac{\langle f_2|w_2\rangle}{\|f_2\|^2} f_2}_{w_\perp}$$

Mamy zatem nasz szukany wektor z W ortogonalny do f_1

$$f_2 = w_\perp = w_2 - \underbrace{\frac{\langle f_1|w_2\rangle}{\|f_1\|^2} f_1}_{\substack{\text{składowa } w_2 \\ \text{równoległa do } f_1}}$$

Intuicja jest następująca, wzięliśmy pierwszy element bazy w_1, następnie by dostać bazę ortogonalną wycięliśmy składową w_2 równoległą do w_1 otrzymując wektor prostopadły do w_1. Rachunki na naszych konkretnych wektorach dają

$$f_1 = w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\|f_1\|^2 = \langle f_1|f_1\rangle = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 16$$

$$\langle f_1|w_2\rangle = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2 * (-1) + 3 * 0 = 1$$

$$f_2 = w_\perp = w_2 - \frac{\langle f_1|w_2\rangle}{\|f_1\|^2} f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{16}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Można sprawdzić, że faktycznie $\langle f_1|f_2\rangle = 0$. Jest to baza ortogonalna W, bo otrzymaliśmy ją liniową i odwracalną transformacją poprzedniej bazy. Żeby dostać bazę ortonormalną $\{\hat{f}_1, \hat{f}_2\}$musimy podzielić wektory przez ich normy

$$\|f_1\|^2 = \langle f_1|f_1\rangle = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 16$$

$$\|f_2\|^2 = \langle f_2|f_2\rangle = \left(\frac{3}{16}\right)^2 (5^2 + 5^2 + 5^2 + (-6)^2 + (-1)^2) = \left(\frac{3}{16}\right)^2 112$$

$$\hat{f}_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \hat{f}_2 = \frac{1}{\|f_2\|} f_2 = \frac{1}{\sqrt{112}}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sytuacja z bazą ortonormalną $W^\perp$ jest analogiczna, najpierw szukamy bazy ortogonalnej, w tym celu na pierwszy jej element g_1 wybieramy sobie w_3, na jej drugi element g_2 wybieramy składową w_4 prostopadłą

do w_3

$$g_1 = w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_2 = w_\perp = w_4 - \underbrace{\frac{\langle g_1 | w_4 \rangle}{\|g_1\|^2} g_1}_{\substack{\text{składowa } w_4 \\ \text{równoległa do } g_1}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nasza podprzestrzeń jest trójwymiarowa, więc potrzebujemy jeszcze trzeciego wektora bazy ortogonalnej g_3, który będzie prostopadły do g_1 i g_2 jednocześnie. Sztuczka jest podobna jak poprzednio, bierzemy w_5 i wycinamy z niego składowe równoległe do g_1 i g_2 tak, by został wektor prostopadły do nich, ponieważ g_1 i g_2 pochodzą od w_3 i w_4 możemy być pewni że nie dostaniemy wektora zerowego.

$$g_3 = \overbrace{w_5 - \underbrace{\frac{\langle g_1 | w_5 \rangle}{\|g_1\|^2} g_1}_{\substack{\text{składowa } w_5 \\ \text{równoległa do } g_1}} - \underbrace{\frac{\langle g_2 | w_5 \rangle}{\|g_2\|^2} g_2}_{\substack{\text{składowa } w_5 \\ \text{równoległa do } g_2}}}^{\text{wektor prostopadły do } g_1 \text{ i } g_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1/2}{3/2} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Po znormalizowaniu tych wektorów dostajemy bazę ortonormalną

$$\hat{g}_1 = \frac{1}{\|g_1\|} g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{g}_2 \qquad = \frac{1}{\|g_2\|} g_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{g}_3 = \frac{1}{\|g_3\|} g_3 = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$