

Notatki do ćwiczeń z Algebry z Geometrią II

Wojciech Niedziółka

8 Równoważność form kwadratowych

Zad. 8.1

Dane są pary form kwadratowych $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$, oraz $Q_0 : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$. Zdiagonalizuj je i podaj sygnaturę, znajdź (jeśli istnieje) operator liniowy $F : V \rightarrow V_0$, taki że $\forall_{v \in V} : Q(v) = Q_0(Fv)$

a) $V = \mathbb{R}^2$, $Q(x) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2$ $V_0 = \mathbb{R}^2$, $Q_0(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $Q(x) = x_1x_2 - x_2x_3 + x_3x_1$ $V_0 = \mathbb{R}^3$, $Q_0(x) = x_1^2 + 4x_2x_3$

c) $V = \mathbb{R}_2^2$, $Q(X) = \det(X)$ $V_0 = \mathbb{R}_3[\cdot]$, $Q_0(v) = \int_0^1 v(t)^2 dt$

d) $V = \mathbb{R}_2^2$, $Q(X) = \det(X)$ $V_0 = \mathbb{R}_2^2$, $Q_0(X) = \text{Tr}\left(X^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X\right)$

e) $V = \mathbb{R}^2$, $Q(x) = x_1^2 - x_2^2$ $V_0 = \mathbb{R}^3$, $Q_0(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$

Rozw. 8.1

a) Sygnaturę możemy łatwo znaleźć algorytmem Lagrange'a, dostaniemy w ten sposób informacje przydatne do znalezienia operatora F , w obu przypadkach będzie wygodniej dopełnić do kwadratu człon x_2 (dla drugiej formy kwadratowej zmienimy oznaczenie na y , by się odróżniała bardziej od pierwszej w dalszych rachunkach)

$$Q(x) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 = \frac{9}{2}x_1^2 + 2\left(\frac{1}{2}x_1 + 2x_2\right)^2$$
$$Q_0(y) = 2y_1^2 - 2y_1y_2 + 5y_2^2 = 2\left(y_1 - \frac{1}{2}y_2\right)^2 + \frac{9}{2}y_2^2$$

Sygnatura obu form to $(2,0)$, ponieważ obie formy mają taką samą sygnaturę operator F istnieje, możemy wykorzystać wynik algorytmu Lagrange'a do podania postaci F . Nasz warunek $Q(x) = Q_0(y)$ z $y = Fx$ na pewno będzie spełniony jeśli zajdzie

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 &= y_1 - \frac{1}{2}y_2 \\ x_1 &= y_2 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy to narzucając warunek, że pierwszy wyraz $Q(x)$ będzie równy drugiemu $Q_0(y)$, a drugi wyraz $Q(x)$ będzie równy pierwszemu wyrazowi $Q_0(y)$. Rozwiązując układ równań dostajemy y wyrażone przez x

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 + 2x_2 \\ y_2 &= x_1 \end{cases}$$

Czyli nasz poszukiwany operator liniowy wyrażony jest przez macierz

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Oczywiście wybór był arbitralny i mogliśmy dokonać wielu innych, np. dając inne znaki lub przyrównując człony w "na drugi sposób", tzn

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 = \frac{3}{2}y_2 \\ \frac{3}{2}x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = \frac{5}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \\ y_2 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 \end{cases}$$

Zatem mogliśmy dać też inną odpowiedź, że operator liniowy spełniający $Q(x) = Q_0(F(x))$ to

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

b) Zaczynamy od algorytmu Lagrange'a dopełnienia do kwadratu, dla pierwszej formy kwadratowej trzeba zastosować standardową sztuczkę zmiany zmiennych, by otrzymać wyraz kwadratowy

$$\begin{aligned} Q(x) = x_1x_2 - x_2x_3 + x_3x_1 &= \begin{cases} x_1 = t_1 + t_2 \\ x_2 = t_1 - t_2 \\ x_3 = t_3 \end{cases} = t_1^2 - t_2^2 + 2t_2t_3 \\ &= t_1^2 - (t_2 - t_3)^2 + t_3^2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{2} - x_3\right)^2 + x_3^2 \\ Q_0(y) &= y_1^2 + 4y_2y_3 = y_1^2 + (y_2 + y_3)^2 - (y_2 - y_3)^2 \end{aligned}$$

Obie formy mają sygnaturę (2,1), więc F istnieje i aby podać jego postać możemy zażądać by wyrazy z tymi samymi znakami zgadzały się

$$\begin{cases} \frac{x_1+x_2}{2} = y_1 \\ x_3 = y_2 + y_3 \\ \frac{x_1-x_2}{2} - x_3 = y_2 - y_3 \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = \frac{x_1+x_2}{2} \\ y_2 = \frac{x_1-x_2}{4} \\ y_3 = x_3 - \frac{x_1-x_2}{4} \end{cases}$$

Co daje nam

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

c) Formę $Q(X)$ diagonalizujemy standardowo, rozpisujemy formę dla ogólnej macierzy

$$Q\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\right) = x_1x_4 - x_2x_3 = \frac{1}{4}(x_1 + x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{4}(x_2 - x_3)^2$$

Sygnatura tej formy to (2,2). Sygnatura drugiej formy nie jest potrzebna do ustalenia istnienia F , zauważmy, że forma jest zdefiniowana przez z całkę z kwadratu, wyraz pod całką jest nieujemny, więc

mamy $Q_0(v) \geq 0$, możemy być pewni zatem, że sygnatura tej formy (p,q) spełnia $q = 0$, czyli jest postaci $(p,0)$. Możemy z tego wywnioskować, że taki F nie istnieje, gdyby istniał to $Q(x) = Q_0(F(x))$, ale sygnatura Q to $(2,2)$, istnieje x , taki że $Q(x) < 0$, ale jednocześnie $Q_0(F(x)) \geq 0$, mamy sprzeczność. Jeśli ktoś nie wierzy w powyższy argument, to można uczciwie zdiagonalizować formę $Q_0(v)$, wybierając bazę jednomianów $\{1, t, t^2, t^3\}$ i zapisując w tej bazie wielomian v , by znaleźć postać formy Q_0 we współrzędnych

$$\begin{aligned} Q_0(v) &= \int_0^1 (x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + x_4 t^3)^2 dt = \dots \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right)^2 + \frac{1}{12}\left(x_2 + x_3 + \frac{9}{10}x_4\right)^2 + \frac{1}{180}\left(x_3 + \frac{3}{2}x_4\right)^2 + \frac{1}{2800}x_4^2 \end{aligned}$$

Sygnatura to $(4,0)$ i teraz ewidentnie widać, że nie możemy znaleźć F , które powiązałoby tę formę z $Q(x)$, które ma sygnaturę $(2,2)$

d) Formę $Q(X)$ diagonalizujemy jak w poprzednim podpunkcie, dowolna macierz może być zapisana we współrzędnych $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

$$Q\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\right) = x_1 x_4 - x_2 x_3 = \frac{1}{4}(x_1 + x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{4}(x_2 - x_3)^2$$

Sygnatura tej formy to $(2,2)$. W tej samej bazie możemy rozpisać formę $Q_0(X)$, użyjemy y jako oznaczenia współrzędnych by odróżnić je od tych w $Q(X)$, mamy $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$ i

$$\begin{aligned} Q_0(Y) &= \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_2 & y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \right) = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_2 & y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 + 2y_3 & y_2 + 2y_4 \\ 2y_1 + 3y_3 & 2y_2 + 3y_4 \end{pmatrix} \right) \\ &= y_1^2 + 4y_1 y_3 + 3y_3^2 + y_2^2 + 4y_2 y_4 + 3y_4^2 = (y_1 + 2y_3)^2 - y_3^2 + (y_2 + 2y_4)^2 - y_4^2 \end{aligned}$$

Sygnatura to $(2,2)$, możemy więc znaleźć F . Żeby mieć $Y = F(X)$ wystarczy zażądać następujących równości (tak, by wyrazy z tymi samymi znakami się zgadzały), wtedy ewidentnie $Q(X) = Q(Y)$ i związek między współrzędnymi jest liniowy

$$\begin{cases} \frac{x_1+x_4}{2} = y_1 + 2y_3 \\ \frac{x_2-x_3}{2} = y_2 + 2y_4 \\ \frac{x_1-x_4}{2} = y_3 \\ \frac{x_2+x_3}{2} = y_4 \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = \frac{-x_1+3x_4}{2} \\ y_2 = \frac{-x_2-3x_3}{2} \\ y_3 = \frac{x_1-x_4}{2} \\ y_4 = \frac{x_2+x_3}{2} \end{cases}$$

Nasz F jest zatem dany wzorem

$$F : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{-x_1+3x_4}{2} & \frac{-x_2-3x_3}{2} \\ \frac{x_1-x_4}{2} & \frac{x_2+x_3}{2} \end{pmatrix}$$

e) Dotychczas rozważaliśmy przypadki, w których $\text{rk}(Q) = \text{rk}(Q_0)$, co jeśli tak nie jest? W tym podpunkcie mamy sygnaturę $Q(x)$ równą $(1,1)$ i sygnaturę $Q_0(x)$ równą $(2,1)$. Nie są one sobie równe, ale

można zgadnąć F , z definicji będzie to odwzorowanie z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Chcemy, by zachodziło

$$x_1^2 - x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

Możemy przykładowo zażądać, by $x_1 = y_1$, $x_2 = y_3$, a $y_2 = 0$, wtedy

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Sprawdźmy, czy to działa

$$Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 - x_2^2$$

$$Q_0(F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)) = Q_0\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + 0^2 - x_2^2$$

Faktycznie, taki F spełnia wymaganą równość.

Ogólny schemat postępowania dla takich zadań powinien być już jasny, jeśli sygnatury są równe możemy być pewni, że F istnieje, a algorytm Lagrange'a pozwala nam znaleźć przykład (podpunkty a), b), d)). Jeśli sygnatury się różnią, ale rzędy są takie same to F nie może istnieć (podpunkt c)). Jeśli rzędy są różne, F może istnieć nawet dla różnych sygnatur (podpunkt e)), nietrudno się przekonać, że może istnieć tylko jeśli $p \leq p_0$ i $q \leq q_0$, gdzie (p, q) to sygnatura $Q(x)$, a (p_0, q_0) to sygnatura $Q_0(x)$.

Zad. 8.2

W zależności od wartości parametrów $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ znajdź sygnaturę formy

$$\mathbb{R}^3 \ni x \mapsto Q(x) = a_1 x_2 x_3 + a_2 x_1 x_3 + a_3 x_1 x_2$$

Rozw. 8.2

Pomysł na to zadanie jest następujący: postać formy kwadratowej zależy od tego czy nasze parametry są równe zero czy nie, przeanalizujemy oddzielnie przypadki gdy wszystkie, dwa, jeden lub zero z nich jest równe zero. Użyjemy do tego algorytmu Lagrange'a, kryterium Sylwestera tu zawodzi, bo macierz tej formy kwadratowej na diagonalu ma same 0 i pierwszy minor jest przez to zerowy, co nie pozwala użyć kryterium.

Przypadek 1: $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$

Mamy $Q(x) = 0$ i sygnaturę równą $(0,0)$

Przypadek 2: $a_1 \neq 0, a_2 = 0, a_3 = 0$ (przypadki z a_2 i a_3 - jedynymi niezerowymi są analogiczne i mają te same wyniki)

Mamy $Q(x) = a_1 x_2 x_3$, możemy użyć wzoru skróconego mnożenia i otrzymać

$$Q(x) = a_1 x_2 x_3 = a_1 \left(\frac{1}{4}(x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_2 - x_3)^2 \right)$$

Jeśli a_1 jest dodatnie mamy + i -, jeśli a_1 jest ujemne mamy - i +, więc niezależnie od znaku sygnatura to (1,1)

Przypadek 3: $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 = 0$ (przypadki z a_1 i a_2 - jedynym zerowym są analogiczne i mają te same wyniki)

Mamy $Q(x) = a_1 x_2 x_3 + a_2 x_1 x_3$, można łatwo pozbyć się zależności od parametrów, ponieważ są niezerowe możemy wprowadzić nowe współrzędne

$$\begin{cases} y_1 = a_2 x_1 \\ y_2 = a_1 x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} a_1 x_2 x_3 + a_2 x_1 x_3 &= y_2 y_3 + y_1 y_3 = \begin{cases} y_1 = t_1 \\ y_2 = t_2 + t_3 \\ y_3 = t_2 - t_3 \end{cases} = t_2^2 - t_3^2 + t_1 t_2 - t_1 t_3 \\ &= (t_2 + \frac{1}{2} t_1)^2 - \frac{1}{4} t_1^2 - (t_3 + \frac{1}{2} t_1)^2 + \frac{1}{4} t_1^2 = (t_2 + \frac{1}{2} t_1)^2 - (t_3 + \frac{1}{2} t_1)^2 \end{aligned}$$

I otrzymujemy sygnaturę (1,1) niezależnie od znaków parametrów

Przypadek 4: $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$

Chcielibyśmy znowu zmienić zmienne, by uprościć problem, niestety nie jest możliwe "wchłonięcie" parametrów do zmiennych i otrzymanie formy kwadratowej niezależnej od a_1, a_2, a_3 . Możemy jednak wyciągnąć je przed nawias, jeśli podstawimy

$$\begin{cases} y_1 = x_1/a_1 \\ y_2 = x_2/a_2 \\ y_3 = x_3/a_3 \end{cases}$$

Otrzymamy

$$\begin{aligned} a_1 x_2 x_3 + a_2 x_1 x_3 + a_3 x_1 x_2 &= a_1 a_2 a_3 (y_2 y_3 + y_1 y_3 + y_1 y_2) = \begin{cases} y_1 = t_1 \\ y_2 = t_2 + t_3 \\ y_3 = t_2 - t_3 \end{cases} \\ &= a_1 a_2 a_3 (t_2^2 - t_3^2 + t_1 t_2 - t_1 t_3 + t_1 t_2 + t_1 t_3) \\ &= a_1 a_2 a_3 ((t_2 + t_1)^2 - t_1^2 - t_3^2) \end{aligned}$$

Sygnatura zatem zależy od znaku $a_1 a_2 a_3$, jeśli $a_1 a_2 a_3 > 0$ sygnatura wynosi (1,2), a jeśli $a_1 a_2 a_3 < 0$ to sygnatura jest równa (2,1)