

Notatki do ćwiczeń z Algebry z Geometrią II

Wojciech Niedziółka

7 Diagonalizacja form kwadratowych, kryterium Sylwestera, formy kwadratowe z parametrem

Kryterium Sylwestera pozwala określić sygnaturę formy kwadratowej poprzez liczenie minorów, np. jeśli macierz formy kwadratowej to

$$[Q]_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

To jej minory są równe $D_1 = -1$, $D_2 = \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = -9$, więc istnieje baza, w której forma jest diagonalna i na diagonalu ma $D_1 = -1$ i $D_2/D_1 = 9$. Jej sygnatura to (1,1).

Aby skutecznie stosować to kryterium warto nabrać intuicji tego jak macierz formy kwadratowej wiąże się z samą formą kwadratową. Możemy znaleźć formę kwadratową dla powyższej macierzy korzystając z wzoru $Q(x) = x^T [Q]_e x$.

$$Q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1^2 + 2 \times 2x_1x_2 + 5x_2^2$$

Śledząc związek elementów macierzowych i współczynników w formie kwadratowej łatwo się przekonać, że współczynnik -1 przy x_1^2 pochodzi z elementu (1,1) macierzy, współczynnik 5 przy x_2^2 pochodzi z elementu (2,2) macierzy, a współczynnik przy x_1x_2 to dwa razy element (1,2) (równy elementowi (2,1), bo macierz jest symetryczna). Gdybyśmy wzięli ogólną macierz 2×2 formy kwadratowej dostalibyśmy

$$Q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ax_1^2 + 2 \times bx_1x_2 + cx_2^2$$

Powyższe przykłady powinny uzasadnić intuicję, że jeśli mamy formę kwadratową $Q(x)$ rozpisaną we współrzędnych $x_1, x_2 \dots x_n$, możemy odczytać, że: element macierzowy na pozycji (j,j) to współczynnik przy x_j^2 , a element macierzowy na pozycji (j,j') dla $j \neq j'$ to połowa współczynnika przy $x_jx_{j'}$.

Zad. 7.1

Znajdź sygnaturę formy kwadratowej stosując kryterium Sylwestera

a) $Q(x) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2, x \in \mathbb{R}^3$

b) $Q(x) = -3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_4$ c) $Q(x) = 4x_1x_2 + 5x_2^2, x \in \mathbb{R}^2$

d) $Q(w) = \int_0^1 w(it)w(-it)dt, w \in \mathbb{R}_2[\cdot]$

Rozw. 7.1

a) Macierz formy kwadratowej w bazie standardowej e to

$$[Q]_e = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Jej minory to

$$D_1 = -1$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -3$$

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = -11$$

Istnieje więc baza w której forma jest diagonalna i jej elementy diagonalne to $D_1 = -1, D_2/D_1 = 3, D_3/D_2 = 11/3$, sygnatura jest równa (2,1)

b) Macierz formy kwadratowej w bazie standardowej e to

$$[Q]_e = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Jej minory to

$$D_1 = -3$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -6$$

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -26$$

$$D_4 = \det \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 13$$

Istnieje więc baza w której forma jest diagonalna i jej elementy diagonalne to $D_1 = -3, D_2/D_1 = 2, D_3/D_2 = 13/3, D_4/D_3 = -1/2$, sygnatura jest równa (2,2)

c) Macierz formy kwadratowej w bazie standardowej e to

$$[Q]_e = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Jej minory to

$$D_1 = 0$$

$$D_2 = \det \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right) = -4$$

Pojawia się tu problem, kryterium Sylwestera wymaga by wyznaczniki minorów były niezerowe, co nie jest tu spełnione. Jest to poważne ograniczenie tej metody, ale okazuje się że czasem można poradzić sobie sprytną zmianą bazy. Jeśli zamienimy wektory bazy, tzn. wprowadzimy $f_1 = e_2, f_2 = e_1$ (przez co nowe współrzędne będą dane przez $y_1 = x_2, y_2 = x_1$), to macierz w nowej bazie będzie miała postać

$$[Q]_f = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

I będzie miała niezerowe minory $D_1 = 5, D_2 = -4$ i wiemy, że w pewnej bazie diagonalizującej elementy diagonalne to $D_1 = 5, D_2/D_1 = -4/5$, więc sygnatura formy z zadania jest równa $(1,1)$. Ta sztuczka udała się tylko dlatego, że rząd formy kwadratowej jest równy wymiarowi przestrzeni wektorowej. Jeśli by tak nie było, tzn. mielibyśmy degenerację, po diagonalizacji byłyby zera na diagonalu jak w a), c) zadania 6.1, to kryterium Sylwestera nie dałoby nam żadnej informacji o sygnaturze formy kwadratowej. Drugą oczywistą wadą tej metody jest to, że nie można z niej "wyciągnąć" informacji o bazie diagonalizującej, aby to zrobić trzeba użyć algorytmu Lagrange'a dopełniania do kwadratu.

d) Musimy tu wykonać dodatkowy krok, najpierw trzeba znaleźć wzór na formę kwadratową we współrzędnych by móc odczytać jej macierz. Wybieramy bazę $\mathbb{R}_2[\cdot]$ w postaci $e = \{1, t, t^2\}$, tzw. bazę jednomianów. Dowolny wielomian może być zapisany w tej bazie jako $w(t) = x_1 1 + x_2 t + x_3 t^2$, gdzie x_1, x_2, x_3 to współrzędne. Wykorzystamy też własność $w(-it) = \overline{w(it)}$, która pozwoli nam przepisać wyraz pod całką jako $w(it)w(-it) = |w(it)|^2$. Podsumowując, mamy

$$Q(x_1 1 + x_2 t + x_3 t^2) = \int_0^1 |x_1 1 + x_2 it - x_3 t^2|^2 dt = \int_0^1 ((x_1 - x_3 t^2)^2 + x_2^2 t^2) dt = x_1^2 + \frac{1}{5} x_3^2 - 2x_1 x_3 \frac{1}{3} + x_2^2 \frac{1}{3}$$

Teraz możemy zapisać macierz formy kwadratowej w bazie jednomianów e

$$[Q]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Jej minory to

$$D_1 = 1$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{4}{3 \times 5 \times 9}$$

Istnieje więc baza w której forma jest diagonalna i jej elementy diagonalne to $D_1 = 1$, $D_2/D_1 = \frac{1}{3}$, $D_3/D_2 = \frac{4}{5 \times 9}$, sygnatura jest równa (3,0)

Zad. 7.2

W zależności od wartości $\lambda \in \mathbb{R}$ wyznacz sygnaturę formy kwadratowej

$$Q_\lambda : \mathbb{R}_2[\cdot] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \mapsto \int_{-1}^1 w(t)w(t+\lambda)dt$$

Rozw. 7.2

Plan na zadanie jest następujący, chcemy zastosować kryterium Sylwestera, by przeanalizować sygnaturę w zależności od wartości λ , najpierw musimy znaleźć macierz formy kwadratowej. Moglibyśmy postąpić jak w poprzednim zadaniu, wybrać bazę jednomianów $e = \{1, t, t^2\}$ obliczyć $Q(w)$ dla $w(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$ i odczytać macierz ze wzoru, ale spróbujmy innej metody. Macierz formy kwadratowej jest równa macierzy stowarzyszonej formy dwuliniowej

$$[Q]_e = [b_{sym}]_e^e = \begin{pmatrix} b_{sym}(e_1, e_1) & b_{sym}(e_1, e_2) & b_{sym}(e_1, e_3) \\ b_{sym}(e_2, e_1) & b_{sym}(e_2, e_2) & b_{sym}(e_2, e_3) \\ b_{sym}(e_3, e_1) & b_{sym}(e_3, e_2) & b_{sym}(e_3, e_3) \end{pmatrix}$$

Elementy macierzowe możemy policzyć ze wzoru na formę dwuliniową wyrażoną przez stowarzyszoną formę kwadratową

$$b_{sym}(x, y) = \frac{1}{2} (Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$$

Obliczmy najpierw elementy na diagonalu, wykorzystamy obserwację, że całka z funkcji nieparzystej po odcinku $[-1, 1]$ daje zero. Innymi słowy, dla k nieparzystych, $\int_{-1}^1 t^k dt = \frac{1}{k+1} t^{k+1} \Big|_{-1}^1 = 0$

$$\begin{aligned} b_{sym}(e_1, e_1) &= \frac{1}{2} (Q(2e_1) - 2Q(e_1)) = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 2 \times 2 dt - 2 \int_{-1}^1 1 \times 1 dt \right) \\ &= \int_{-1}^1 1 dt = 2 \\ b_{sym}(e_2, e_2) &= \frac{1}{2} (Q(2e_2) - 2Q(e_2)) = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 2t \times 2(t+\lambda) dt - 2 \int_{-1}^1 t \times (t+\lambda) dt \right) \\ &= \int_{-1}^1 t \times (t+\lambda) dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3} \\ b_{sym}(e_3, e_3) &= \frac{1}{2} (Q(2e_3) - 2Q(e_3)) = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 2t^2 \times 2(t+\lambda)^2 dt - 2 \int_{-1}^1 t^2 \times (t+\lambda)^2 dt \right) \\ &= \int_{-1}^1 t^2 \times (t+\lambda)^2 dt = \int_{-1}^1 t^4 + t^2 \lambda^2 dt = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \lambda^2 \end{aligned}$$

Teraz policzymy elementy pozadiagonalne, ponieważ macierz jest symetryczna musimy znaleźć tylko 3 nad diagonalą, elementy pod diagonalą będą z symetrii takie same. Wykorzystamy też, to że policzyliśmy już $Q(e_j, e_j)$ wyżej, oraz to że całka z t^k dla nieparzystej potęgi daje zero

$$\begin{aligned} b_{sym}(e_1, e_2) &= \frac{1}{2} (Q(e_1 + e_2) - Q(e_1) - Q(e_2)) = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 (1+t)(1+t+\lambda) dt - 2 - \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 (1+t+\lambda+t+t^2+t\lambda) dt - 2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 (1+\lambda+t^2) dt - 2 - \frac{2}{3} \right) = \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{sym}(e_1, e_3) &= \frac{1}{2} (Q(e_1 + e_3) - Q(e_1) - Q(e_3)) = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 (1+t^2)(1+(t+\lambda)^2) dt - 2 - \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\lambda^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 (1+2t^2+\lambda^2+t^4+\lambda t^2) dt - 2 - \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\lambda^2 \right) = \frac{2}{3} + \lambda^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{sym}(e_2, e_3) &= \frac{1}{2} (Q(e_2 + e_3) - Q(e_2) - Q(e_3)) = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 (t+t^2)(t+\lambda+(t+\lambda)^2) dt - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\lambda^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 (t^2+3\lambda t^2+t^4+t^2\lambda^2) dt - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\lambda^2 \right) = \lambda \end{aligned}$$

Mamy macierz formy kwadratowej

$$[Q]_e = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \frac{2}{3} + \lambda^2 \\ \lambda & \frac{2}{3} & \lambda \\ \frac{2}{3} + \lambda^2 & \lambda & \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Obliczamy jej minory

$$D_1 = 2$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{4}{3} - \lambda^2$$

$$\begin{aligned} D_3 &= \det \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \frac{2}{3} + \lambda^2 \\ \lambda & \frac{2}{3} & \lambda \\ \frac{2}{3} + \lambda^2 & \lambda & \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\lambda^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{3}\lambda^4 - \frac{16}{15}\lambda^2 + \frac{32}{135} = \frac{2}{135} (45\lambda^4 - 72\lambda^2 + 16) \end{aligned}$$

Kryterium Sylwestera da nam sygnaturę jeśli ustalimy znaki minorów, ewidentnie będą one zależeć od λ , więc przeanalizujemy znaki poszczególnych minorów. Do tego przydatne będzie zauważenie, że D_3 jest wielomianem drugiego stopnia w zmiennej λ^2 , więc szybkie zastosowanie wzoru na zera funkcji kwadratowej daje nam

$$D_3 = \frac{2}{135} (45\lambda^4 - 72\lambda^2 + 16) = \frac{2}{3} \left(\lambda^2 - \frac{4}{3} \right) \left(\lambda^2 - \frac{4}{15} \right)$$

Możemy teraz znaleźć znaki minorów

$$D_1 = 2 > 0$$

$$D_2 = \frac{4}{3} - \lambda^2 = \begin{cases} = 0 & \text{jeśli } \lambda^2 = \frac{4}{3} \\ > 0 & \text{jeśli } \lambda^2 < \frac{4}{3} \\ < 0 & \text{jeśli } \lambda^2 > \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$D_3 = \frac{2}{135} \left(\lambda^2 - \frac{4}{3} \right) \left(\lambda^2 - \frac{4}{15} \right) = \begin{cases} = 0 & \text{jeśli } \lambda^2 = \frac{4}{3} \text{ lub } \lambda^2 = \frac{4}{15} \\ > 0 & \text{jeśli } \lambda^2 < \frac{4}{15} \\ < 0 & \text{jeśli } \frac{4}{15} < \lambda^2 < \frac{4}{3} \\ > 0 & \text{jeśli } \frac{4}{3} < \lambda^2 \end{cases}$$

Daje nam to następujące przypadki

Przypadek 1: $\lambda^2 < \frac{4}{15}$

Mamy $D_1 > 0$, $D_2/D_1 > 0$, $D_3/D_2 > 0$, więc sygnatura to (3,0)

Przypadek 2: $\frac{4}{15} < \lambda^2 < \frac{4}{3}$

Mamy $D_1 > 0$, $D_2/D_1 > 0$, $D_3/D_2 < 0$, więc sygnatura to (2,1)

Przypadek 3: $\frac{4}{3} < \lambda^2$

Mamy $D_1 > 0$, $D_2/D_1 < 0$, $D_3/D_2 < 0$, więc sygnatura to (1,2)

Przypadek 4: $\frac{4}{3} = \lambda^2$

Kryterium Sylwestera zawodzi, należy skorzystać z algorytmu Lagrange'a i "na piechotę" zdiagonalizować formę kwadratową. Okazuje się że sygnatura to (1,1)

Przypadek 5: $\lambda^2 = \frac{4}{15}$

Kryterium Sylwestera zawodzi, należy skorzystać z algorytmu Lagrange'a i "na piechotę" zdiagonalizować formę kwadratową. Okazuje się że sygnatura to (2,0)