

Notatki do ćwiczeń z Algebry z Geometrią II

Wojciech Niedziółka

6 Diagonalizacja form kwadratowych, algorytm Lagrange'a i kryterium Sylwestera

Najpierw omówmy zmianę bazy formy kwadratowej. Są tu pewne analogie do zmiany bazy endomorfizmu (które pojawiały się co chwila przy diagonalizacji), ale są też istotne różnice. Przyjrzyjmy się formie kwadratowej

$$Q(\vec{v}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 - x_2^2$$
$$\vec{v} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2$$

$\hat{e}_1, \hat{e}_2$ to elementy bazy, a x_1, x_2 to współrzędne wektora w tej bazie. Możemy też napisać $[\vec{v}]^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Jeśli wprowadzimy podstawienie

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1 + 2x_2 \\ \xi_2 = x_2 \end{cases}$$

To dostaniemy diagonalną postać $\xi_1^2 - \xi_2^2$, ξ_1, ξ_2 to współrzędne wektora $\vec{v}$ w bazie diagonalizującej (tzw. współrzędne diagonalizujące). Jaka jest baza diagonalizująca? Przyjrzyjmy się następującej równości, jeśli $\hat{f}_1, \hat{f}_2$ to baza diagonalizująca, musi zachodzić

$$\vec{v} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 = \xi_1\hat{f}_1 + \xi_2\hat{f}_2$$

Innymi słowy, możemy zapisać $[\vec{v}]^f = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ (znaczy to dokładnie tyle, że w bazie f , pierwsza współrzędna to ξ_1 , a druga ξ_2 , czyli $\vec{v} = \xi_1\hat{f}_1 + \xi_2\hat{f}_2$). Wiemy, jak transformują się współrzędne, możemy wykorzystać tę wiedzę, by znaleźć transformację wektorów bazy. Zapiszmy transformację współrzędnych w postaci macierzowej

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Możemy zinterpretować tę równość jako zmianę bazy

$$[\vec{v}]^f = [id]_e^f [\vec{v}]^e$$

Czyli powyższa macierz jest macierzą zmiany bazy $[id]_e^f$, możemy ją odwrócić

$$[id]_f^e = ([id]_e^f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tutaj przypominamy sobie wiedzę, której nauczyliśmy się przy okazji diagonalizacji, jeśli mamy macierz zmiany bazy z bazy f do e , to jej kolumny są elementami bazy f zapisanymi w bazie e . Innymi słowy

$$\begin{aligned}\hat{f}_1 &= \hat{e}_1 \\ \hat{f}_2 &= -2\hat{e}_1 + \hat{e}_2\end{aligned}$$

Na koniec tego wstępu omówmy jeszcze jedną różnicę między formami kwadratowymi a endomorfizmami. Podczas diagonalizacji stosowaliśmy wzór $M = S^{-1}DS$, gdzie M było macierzą w bazie standardowej e , D macierzą w bazie diagonalnej d , a $S = [id]_e^d$ macierzą zmiany bazy. Spróbujmy znaleźć analogię tego wzoru dla form kwadratowych, mamy interpretację macierzową, którą można zapisać w różnych bazach

$$\begin{aligned}Q(\vec{v}) &= ([v]^e)^T [Q]_e [v]^e \\ Q(\vec{v}) &= ([v]^f)^T [Q]_f [v]^f\end{aligned}$$

Podstawiając do drugiego transformację współrzędnych i przyrównując do pierwszego dostajemy

$$([v]^f)^T [Q]_f [v]^f = ([id]_e^f [v]^e)^T [Q]_f [id]_e^f [v]^e = ([v]^e)^T ([id]_e^f)^T [Q]_f [id]_e^f [v]^e = ([v]^e)^T [Q]_e [v]^e$$

Czyli dostajemy wzór na zmianę bazy macierzy formy kwadratowej (który działa też dla form dwuliniowych)

$$([id]_e^f)^T [Q]_f [id]_e^f = [Q]_e$$

Widzimy, że jest on podobny do wzoru dla endomorfizmów, z tą różnicą, że mamy transpozycję zamiast odwrotności

Zad. 6.1

Zdiagonalizuj następujące formy kwadratowe, znajdź bazę diagonalizującą, sygnaturę i rząd

- a) $Q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1, x \in \mathbb{R}^4$
- b) $Q(X) = \det(X) + \text{Tr}(X^2), X \in \mathbb{R}_2^2$
- c) $Q(v) = v(-1)v'(1), v \in \mathbb{R}_2[\cdot]$ (dodatkowe dla chętnych)

Rozw. 6.1

a) Chcemy zastosować algorytm Lagrange'a "dopełniania do kwadratu", opierający się na wzorze $(x_i + a)^2 = x_i^2 + 2x_ia + a^2$, pozwala on nam połączyć wyraz kwadratowy x_i^2 z liniowym. Nasza forma kwadratowa nie ma jednak żadnego wyrazu typu x_i^2 , musimy więc wyprodukować sobie wyrazy kwadratowe sprytną zmianą bazy, skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $4x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = y_4 \end{cases}$$

lub w drugą stronę

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \\ y_3 = x_3 \\ y_4 = x_4 \end{cases}$$

Nasza forma kwadratowa w nowej bazie ma postać, która pozwala na użycie algorytmu Lagrange'a

$$\begin{aligned} Q(x(y)) &= y_1^2 - y_2^2 + (y_1 - y_2)y_3 + y_3y_4 + y_4(y_1 + y_2) \\ &= (y_1^2 + 2y_1\frac{1}{2}(y_3 + y_4) + \frac{1}{4}(y_3 + y_4)^2) - \frac{1}{4}(y_3 + y_4)^2 - y_2^2 - y_2y_3 + y_3y_4 + y_2y_4 \\ &= (y_1 + \frac{1}{2}(y_3 + y_4))^2 - \frac{1}{4}(y_3 + y_4)^2 - (y_2^2 + 2y_2\frac{1}{2}(y_3 - y_4) + \frac{1}{4}(y_3 - y_4)^2) + \frac{1}{4}(y_3 - y_4)^2 + y_3y_4 \\ &= (y_1 + \frac{1}{2}(y_3 + y_4))^2 - (y_2 + \frac{1}{2}(y_3 - y_4))^2 \end{aligned}$$

Mamy sygnaturę (1,1) i rząd 2. Warto tu zwrócić uwagę, że dostaliśmy rząd 2, mimo że mamy 4-wymiarową przestrzeń wektorową, taką sytuację nazywamy degeneracją i mówimy, że forma kwadratowa jest zdegenerowana, po diagonalizacji mamy zera na diagonalu. Współrzędne diagonalizujące to

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{1}{2}(y_3 + y_4) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ z_2 = y_2 + \frac{1}{2}(y_3 - y_4) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \\ z_3 = y_3 = x_3 \\ z_4 = y_4 = x_4 \end{cases}$$

Zapiszmy to w formie macierzowej

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Powyższa macierz to macierz zmiany bazy ze standardowej e do bazy diagonalizującej f ($[id]_e^f$). Kolumny macierzy odwrotnej do niej ($[id]_f^e$) to baza diagonalizująca

$$\begin{aligned} [id]_f^e &= ([id]_e^f)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ f_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Odwrocenie powyższej macierzy może zostać zrobione metodą Gaussa - Jordana. Dozwolone ruchy to dodawanie do siebie wierszy i mnożenie ich przez liczby, mamy wtedy $[A|1] \sim [1|A^{-1}]$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{w_2 \rightarrow -w_1 + w_2}]{\substack{w_1 \rightarrow w_1 + w_2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[\substack{w_2 \rightarrow -(w_2 + w_4)}]{\substack{w_1 \rightarrow w_1 - w_3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

W tych bazach nasza forma kwadratowa ma poniższe postacie i spełnia $[Q]_f = ([id]_f^e)^T [Q]_e [id]_f^e$ (co można sprawdzić, jeśli ktoś wątpi)

$$[Q]_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [Q]_e = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Jeśli ktoś wątpi w te postacie macierzowe to można sprawdzić, że dają poprawne formy kwadratowe według definicji

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = z_1^2 - z_2^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_1$$

b) W przypadku gdy wzór formy kwadratowej jest dany przez bardziej skomplikowaną formułę jak w tym podpunkcie, pierwszym krokiem jest zapisanie formy kwadratowej w bazie. Dla macierzy 2×2 mamy bazę standardową e

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dowolną macierz można rozisać w tej bazie ze współzrędnymi a, b, c, d

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a e_1 + b e_2 + c e_3 + d e_4$$

Teraz przeanalizujemy oba człony i rozpiszmy je używając tych współzrędných, wyznacznik jest dość prosty

$$\det \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = ad - bc$$

Ślad macierzy (oznaczany $\text{Tr}(A)$) to suma elementów na diagonalu, ma on kilka ciekawych własności, jak np. to, że jest cykliczny ($\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$) i że nie zależy od bazy ($\text{Tr}([F]_e^e) = \text{Tr}([F]_f^f)$), co jest prostym wnioskiem z pierwszego faktu.

$$\text{Tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2\right) = \text{Tr}\left(\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}\right) = a^2 + bc + bc + d^2$$

Możemy zapisać formę kwadratową we współrzędnych

$$Q(X) = ad - bc + a^2 + 2bc + d^2 = a^2 + ad + bc + d^2$$

Jest to postać, która umożliwia proste zastosowanie algorytmu Lagrange'a

$$\begin{aligned} Q(X) &= a^2 + ad + bc + d^2 = (a^2 + 2a\frac{1}{2}d + \frac{1}{4}d^2) - \frac{1}{4}d^2 + bc + d^2 \\ &= (a + \frac{1}{2}d)^2 + bc + \frac{3}{4}d^2 \\ &= (a + \frac{1}{2}d)^2 + \frac{1}{4}(b+c)^2 - \frac{1}{4}(b-c)^2 + \frac{3}{4}d^2 \end{aligned}$$

Gdzie na koniec zastosowaliśmy podobną sztuczkę co w poprzednim podpunkcie, by poradzić sobie z członem bc przy braku wyrazów kwadratowych b^2 i c^2 . Nasze współrzędne diagonalizujące to

$$\begin{cases} \tilde{a} = a + \frac{1}{2}d \\ \tilde{b} = b + c \\ \tilde{c} = b - c \\ \tilde{d} = d \end{cases}$$

Zapisując to w formie macierzowej, możemy odczytać macierze zmiany bazy

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \\ \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$[id]_f^e = ([id]_e^f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Odwrócenie powyższej macierzy może zostać zrobione metodą Gaussa - Jordana. Dozwolone ruchy to dodawanie do siebie wierszy i mnożenie ich przez liczby, mamy wtedy $[A|\mathbb{1}] \sim [\mathbb{1}|A^{-1}]$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_1 \rightarrow w_1 - w_4/2 \\ w_2 \rightarrow (w_2 + w_3)/2 \\ w_3 \rightarrow -(w_3 - w_2)/2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Baza $f = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ jest bazą diagonalizującą, w niej nasza forma kwadratowa ma poniższą postać i (co można sprawdzić) spełnia jak poprzednio $[Q]_f = ([id]_f^e)^T [Q]_e [id]_f^e$

$$[Q]_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$[Q]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Wybieramy najpierw bazę $\mathbb{R}_2[\cdot]$, będzie to baza jednomianów $e_1 = 1, e_2 = t, e_3 = t^2$. Obliczmy formę kwadratową dla ogólnego wielomianu, ze współzrędnymi x_k . Potem można od razu użyć algorytmu Lagrange'a by zdiagonalizować ją najpierw dopełniając kwadrat dla x_3 , a potem dla x_1

$$\begin{aligned} Q(x_1 + x_2 t + x_3 t^2) &= (x_1 - x_2 + x_3)(x_2 + 2x_3) = x_1 x_2 - x_2^2 + 2x_1 x_3 - x_2 x_3 + 2x_3^2 \\ &= x_1 x_2 - x_2^2 + 2(x_3^2 + 2x_3(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2) + (\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2)^2) - 2(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2)^2 \\ &= -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_1 x_2 - \frac{9}{8}x_2^2 + 2(x_3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2)^2 \\ &= -\frac{1}{2}(x_1^2 - 2x_1 \frac{3}{2}x_2 + \frac{9}{4}x_2^2) + \frac{9}{8}x_2^2 - \frac{9}{8}x_2^2 + 2(x_3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2)^2 \\ &= -\frac{1}{2}(x_1 - \frac{3}{2}x_2)^2 + 2(x_3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2)^2 \end{aligned}$$

Sygnatura wynosi (1,1), rząd jest równy 2, a współrzędne diagonalizujące dane są wzorami

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{3}{2}x_2 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + x_3 \end{cases}$$

Wektory bazy uzyskujemy odwracając powyższą macierz zmiany bazy

$$[id]_f^e = ([id]_e^f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1/4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Macierze formy kwadratowej w obu bazach dane są niżej i spełniają $[Q]_f = ([id]_f^e)^T [Q]_e [id]_f^e$

$$[Q]_e = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \quad [Q]_f = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Inną metodą znalezienia sygnatury jest tak zwane kryterium Sylwestera, polega ono na badaniu minorów macierzy formy kwadratowej.

Twierdzenie 20. (*Kryterium Sylwestera*)

Niech $[Q]_e$ będzie macierzą $n \times n$ formy kwadratowej, a D_i wyznacznikami macierzy $i \times i$ powstałymi z lewego górnego bloku macierzy $[Q]_e$, . kolumn i wierszy o indeksach nie większych niż i . Jej wyznacznik nazywamy minorem (czasem sama macierz jest nazywana minorem, ale będziemy się trzymać nomenklatury z wykładu) Jeśli dla wszystkich i zachodzi $D_i \neq 0$, to istnieje baza, w której macierz formy kwadratowej jest diagonalna i na diagonalu ma liczby $D_1, \frac{D_2}{D_1}, \frac{D_3}{D_2}, \dots, \frac{D_n}{D_{n-1}}$. Pozwala to na proste odczytanie sygnatury.

Zad. 6.2

Znajdź sygnaturę formy kwadratowej stosując kryterium Sylwestera

$$Q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2, x \in \mathbb{R}^2$$

Rozw. 6.2

W tym zadaniu możemy się posłużyć pewną obserwacją. Jak wiemy forma kwadratowa może zostać zdefiniowana przez symetryczną formę dwuliniową $Q(v) = b_{sym}(v, v)$. Innymi słowy mając formę dwuliniową możemy znaleźć formę kwadratową. Okazuje się że jest też wzór w drugą stronę, tzn. można znaleźć symetryczną formę dwuliniową jeśli znamy odpowiadającą jej formę kwadratową. Ten wzór to

$$b_{sym}(v, w) = \frac{1}{2}(Q(v + w) - Q(v) - Q(w))$$

Łatwo to sprawdzić, podstawiając do prawej strony $Q(v) = b_{sym}(v, v)$ i korzystając z liniowości w obu argumentach oraz symetryczności ($b_{sym}(v, w) = b_{sym}(w, v)$), że dostajemy równość lewej i prawej strony

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(b_{sym}(v + w, v + w) - b_{sym}(v, v) - b_{sym}(w, w)) \\ &= \frac{1}{2}(b_{sym}(v, v) + b_{sym}(v, w) + b_{sym}(w, v) + b_{sym}(w, w) - b_{sym}(v, v) - b_{sym}(w, w)) \\ &= \frac{1}{2}(b_{sym}(v, w) + b_{sym}(w, v)) = b_{sym}(v, w) \end{aligned}$$

Można wykorzystywać ten wzór przy szukaniu macierzy formy kwadratowej zamiast zgadywania użytego w poprzednim zadaniu. Obliczmy elementy macierzowe (ponieważ macierz jest symetryczna wystarczą nam elementy na i nad diagonalą, element pod diagonalą $b_{sym}(e_2, e_1) = b_{sym}(e_1, e_2)$)

$$\begin{aligned} b_{sym}(e_1, e_1) &= \frac{1}{2}(Q(2e_1) - 2Q(e_1)) = \frac{1}{2}(4 - 2) = 1 \\ b_{sym}(e_2, e_2) &= \frac{1}{2}(Q(2e_2) - 2Q(e_2)) = \frac{1}{2}(12 - 6) = 3 \\ b_{sym}(e_1, e_2) &= \frac{1}{2}(Q(e_1 + e_2) - Q(e_1) - Q(e_2)) = \frac{1}{2}(8 - 1 - 3) = 2 \end{aligned}$$

Macierz formy kwadratowej w bazie e jest równa macierzy formy symetrycznej

$$[Q]_e = [b_{sym}]_e = \begin{pmatrix} b_{sym}(e_1, e_1) & b_{sym}(e_1, e_2) \\ b_{sym}(e_2, e_1) & b_{sym}(e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

By zastosować kryterium Sylwestera potrzebujemy

$$D_1 = 1$$
$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -1$$

Istnieje więc baza w której elementy diagonalne to $D_1 = 1$, $D_2/D_1 = -1$, sygnatura jest równa $(1,1)$.