

Notatki do ćwiczeń z Algebry z Geometrią II

Wojciech Niedziółka

5 Część diagonalizowalna i nilpotentna macierzy, formy kwadratowe, diagonalizacja i sygnatura (algorytm Lagrange'a)

W ramach dopowiedzenia do ostatnich zajęć zastanówmy się nad tym, jak skutecznie szukać wektorów, które należą do $\ker(M - \lambda \mathbb{1})^j$, a nie należą do $\ker(M - \lambda \mathbb{1})^{j-1}$. Zgadywanie jest jedną z metod, jeśli mamy bazy jąder, to czasem widać, jaki wektor musimy wybrać przy konstrukcji bazy Jordana, ale można zrobić to w sposób algorytmiczny. Można wykorzystać fakt, że jądra kolejnych potęg mają coraz większy wymiar (aż do wysycenia, tzn. momentu, gdy wymiar jądra $\ker(M - \lambda \mathbb{1})^j$ to krotność pierwiastka λ), więc $\dim(\ker(M - \lambda \mathbb{1})^j) > \dim(\ker(M - \lambda \mathbb{1})^{j-1})$. W naszych przykładach objawiało się to tym, że kolejne jądra były rozpinane przez coraz większe zestawy wektorów. Oznacza to, że co najmniej jeden z wektorów rozpinających $\ker(M - \lambda \mathbb{1})^j$ nie należy do $\ker(M - \lambda \mathbb{1})^{j-1}$. Biorąc za przykład ostatnie zadanie z poprzednich zajęć, mamy

$$\ker(M - \mathbb{1})^2 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$\ker(M - \mathbb{1})^3 = \mathbb{R}^5 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Wiemy, że co najmniej jeden z pięciu wektorów drugiej podprzestrzeni nie należy do pierwszej. Kiedy poszukujemy kandydata na $\mathbf{v}_2^{(3)}$ wystarczy po kolei sprawdzić czy dany wektor należy do $\ker(M - \mathbb{1})^2$ i wybrać pierwszy, który nie należy. Jak łatwo sprawdzić czy dany wektor należy do jądra? Wystarczy pomnożyć go przez wiersze i jeśli któryś wynik da coś niezerowego, to wiemy, że mamy wektor nienależący do jądra. Możemy sprawdzić pierwszy z nich, okazuje się, że

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

zatem ten wektor należy do $\ker(M - \mathbb{1})^3$, ale nie należy do $\ker(M - \mathbb{1})^2$

Teraz omówimy bardzo przydatną własność postaci Jordana, jeśli rozdzielimy postać Jordana na dwie części: diagonalną i ponad diagonalną możemy zauważyć dwie ciekawe własności. Omówmy to na przykładzie jednej klatki

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N$$

Pierwsza macierz D mnoży wektor przez stałą, a macierz N to macierz która kasuje pierwszy wektor bazy ($Ne_1 = 0$) i "przesuwa" pozostałe (tzn. $Ne_i = e_{i-1}$). Nietrudno się przekonać że zachodzi $DN = ND$ (w takim wypadku mówi się że macierze komutują), oraz $N^3 = 0$. Dodatkowo D jest diagonalny i np. łatwo policzyć $\exp$ tej macierzy. Taki rozkład nazywamy podziałem na część diagonalizowalną i nilpotentną, dla ścisłości można podać definicję

Definicja 15. Macierz nazywamy nilpotentną, jeśli dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $N^k = 0$, dodatkowo jeśli $N^{k-1} \neq 0$ to k nazywamy stopniem nilpotentności (jest to najmniejsza potęga dla której mamy $N^k = 0$)

Ponieważ klatki Jordana są niezależne (macierz w formie Jordana jest blokowo diagonalna), można dokonać takiego podziału dla dowolnej postaci Jordana i mieć przydatne własności, że $DN = ND$, $N^k = 0$ i D jest diagonalne. Dla postaci Jordana macierzy, które przeliczyliśmy tydzień temu taki rozkład wygląda następująco

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{D}_1 + \tilde{N}_1$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{D}_2 + \tilde{N}_2$$

Korzystając z macierzy zmiany bazy i postaci $M = S^{-1}DS$ możemy znaleźć część diagonalizowalną ($D = S^{-1}\tilde{D}S$) i nilpotentną ($N = S^{-1}\tilde{N}S$) macierzy oryginalnych macierzy.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D_1 + N_1 \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = D_2 + N_2
\end{aligned}$$

Nietrudno się przekonać że faktycznie tak jak w powyższym przykładzie $DN = ND$, mamy nasz rozkład na część diagonalizowalną i nilpotentną. Części nilpotentne zerują się przy potędze, która jest rozmiarem największej klatki Jordana danej macierzy, mamy

$$\begin{aligned}
N_1^2 &= 0 \\
N_2^3 &= 0
\end{aligned}$$

Teraz omówimy jak obliczyć funkcję analityczną od takiej macierzy. Ponieważ mnożenie naszych dwóch macierzy jest przemienne $DN = ND$, okazuje się że można stosować pewne wzory, które zachodzą dla liczb. Np. znany wzór $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ jest prawdziwy dla macierzy jeśli mamy dwie macierze komutujące (tzn. $M_1M_2 = M_2M_1$), tylko wtedy $\exp(M_1 + M_2) = \exp(M_1)\exp(M_2)$, dla dwóch dowolnych macierzy nie będzie to prawdą. Nas będzie interesował szereg Taylora, dla liczb mamy

$$f(x_0 + h) = \sum_{j=0}^{\infty} f^{(j)}(x_0) \frac{h^j}{j!}$$

Okazuje się, że można uzasadnić podobny wzór dla macierzy D i N (dzięki temu, że $DN = ND$), dodatkowo możemy wykorzystać fakt, że $N^k = 0$, który pozwoli nam uzyskać skończoną sumę

$$f(D + N) = \sum_{j=0}^{\infty} f^{(j)}(D) \frac{N^j}{j!} = \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(D) \frac{N^j}{j!}$$

Możemy policzyć przykładowo $f(x) = \exp(tx)$ dla macierzy z poprzedniego tygodnia

$$\begin{aligned} \exp \left(t \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) &= \exp(tD_1) + t \exp(tD_1)N_1 \\ &= \begin{pmatrix} (1-t)e^{-t} & te^{2t} & te^{-t} & e^{-t} - 2te^{-t} - e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ -te^{-t} & -te^{2t} & (1+t)e^{-t} & -e^{-t} - 2te^{-t} + e^{2t} \\ 0 & -te^{2t} & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \\ \exp \left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right) &= \exp(tD_2) + t \exp(tD_2)N_2 + \frac{t^2}{2} \exp(tD_2)N_2^2 \\ &= \begin{pmatrix} e^t - te^t + \frac{t^2}{2}e^t & te^t & -te^t + \frac{t^2}{2}e^t & te^t - \frac{t^2}{2}e^t & te^t - \frac{t^2}{2}e^t \\ te^t & e^t & te^t & -te^t & -te^t \\ 0 & 0 & e^t & te^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t & 0 \\ -te^t + \frac{t^2}{2}e^t & te^t & -te^t + \frac{t^2}{2}e^t & 2te^t - \frac{t^2}{2}e^t & e^t + te^t - \frac{t^2}{2}e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

To kończy naszą przygodę z diagonalizacją macierzy, postacią Jordana i obliczaniem funkcji od operatorów. Następnym działem są formy kwadratowe. Zaczniemy od wprowadzenia form dwuliniowych

Definicja 16. Formą dwuliniową nazywamy

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

takie, że jest liniowe w pierwszym i drugim argumencie, tzn. dla $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ i $v_i, w_i \in V$ ($i = 1, 2$) mamy

$$\begin{aligned} b(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) &= \alpha_1 b(v_1, w) + \alpha_2 b(v_2, w) \\ b(v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) &= \beta_1 b(v, w_1) + \beta_2 b(v, w_2) \end{aligned}$$

Jeśli $e = \{e_1, e_2 \dots e_n\}$ jest bazą to macierz $B = [b(e_i, e_j)]_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}}$ nazywamy macierzą formy dwuliniowej, można zapisać formę dwuliniową wzorem $b(v, w) = v^T B w$.

Przykład 17. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ mamy przykładową formę dwuliniową $b(x, y) = x_1 y_1 + 4x_2 y_1 - x_3 y_3$, gdzie x_i, y_i to współrzędne wektorów x, y . Jej macierz jest postaci

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Można się przekonać, że zachodzi wzór

$$b(x, y) = x^T B y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & b(e_1, e_2) & b(e_1, e_3) \\ b(e_2, e_1) & b(e_2, e_2) & b(e_2, e_3) \\ b(e_3, e_1) & b(e_3, e_2) & b(e_3, e_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Definicja 18. Formą kwadratową nazywamy odwzorowanie

$$Q : V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \mapsto b_{\text{sym}}(v, v)$$

dla pewnej symetrycznej formy dwuliniowej $b_{\text{sym}}(v, w)$ (oznacza to że $b_{\text{sym}}(v, w) = b_{\text{sym}}(w, v)$, lub w języku macierzy $B_{\text{sym}} = B_{\text{sym}}^T$). Tzn. $Q(v) = b_{\text{sym}}(v, v)$, forma kwadratowa powstaje przez wstawienie w oba argumenty tego samego wektora. Jeśli $e = \{e_1, e_2 \dots e_n\}$ jest bazą to macierz $Q = [b_{\text{sym}}(e_i, e_j)]_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}}$ nazywamy macierzą formy kwadratowej, można zapisać formę kwadratową wzorem $Q(v) = v^T Q v$. Z formy kwadratowej można też odtworzyć odpowiadającą symetryczną formę dwuliniową traktując jej macierz jako macierz formy dwuliniowej.

Kontynuując poprzedni przykład, chcemy znaleźć części symetryczną i antysymetryczną macierzy B , mamy $B = B_{\text{sym}} + B_{\text{asym}}$, gdzie $B_{\text{sym}}^T = B_{\text{sym}}$, $B_{\text{asym}}^T = -B_{\text{asym}}$. Możemy zapostulować

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B_{\text{sym}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B_{\text{asym}}}$$

Mamy równania $a + b = 4$, $a - b = 0$, co daje nam $a = b = 2$. Można też znaleźć część symetryczną i antysymetryczną używając ogólnych wzorów $B_{\text{sym}} = \frac{B+B^T}{2}$, $B_{\text{asym}} = \frac{B-B^T}{2}$. Nietrudno się przekonać, że faktycznie ich suma daje B i transpozycja nie zmienia pierwszej, a na drugiej produkuje minus. Ponieważ $B_{\text{asym}}^T = -B_{\text{asym}}$, $v^T B_{\text{asym}} v = 0$ dla dowolnego wektora, wkład do formy kwadratowej daje tylko część symetryczna, a informacja o części antysymetrycznej jest tracona. Forma kwadratowa, którą uzyskujemy to $x_1^2 + 4x_1x_2 - x_3^2$

Teraz chcemy się przyjrzeć problemowi diagonalizacji formy kwadratowej. Można użyć podejścia już znanego dla macierzy i diagonalizować macierz formy kwadratowej, ale istnieją też prostsze metody korzystające z własności form kwadratowych. Ważna uwaga jest taka, że diagonalizacja form kwadratowych jest czymś zupełnie innym niż diagonalizacja macierzy, co powinno stać się zaraz jasne, mamy tu zupełnie inne własności i zadajemy inne pytania.

Najbardziej podstawową metodą sprowadzenia formy kwadratowej do postaci diagonalnej jest metoda Lagrange'a, opiera się ona na tak zwanym dopełnieniu do kwadratu. Zobaczmy to na przykładzie

$$Q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_3^2 = (x_1 + 2x_2)^2 - 4x_2^2 - x_3^2$$

Uzyskujemy w rezultacie wyrażenie zawierające tylko kwadraty współrzędnych. Mówimy, że

$$\tilde{x}_1 = x_1 + 2x_2$$

$$\tilde{x}_2 = x_2$$

$$\tilde{x}_3 = x_3$$

są współrzędnymi diagonalizującymi formę kwadratową, mamy $Q(\tilde{x}) = \tilde{x}_1^2 - 4\tilde{x}_2^2 - \tilde{x}_3^2$. Może się pojawić pokusa, by powiedzieć że mamy wartości własne 1, -4, -1, ale jeśli byśmy wprowadzili $\tilde{x}_2 = 2x_2$, to nasza forma kwadratowa miałaby postać $Q(\tilde{x}) = \tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2 - \tilde{x}_3^2$, więc mielibyśmy "wartości własne" 1, -1, -1. To spostrzeżenie to główna różnica pomiędzy diagonalizacją formy kwadratowej i macierzy, wartości własne nie są tu czymś "uniwersalnym", ale (dzięki temu że pracujemy w liczbach rzeczywistych) znaki tych wyrazów są niezależne od bazy diagonalizującej, to motywuje następującą definicję.

Definicja 19. Jeśli forma kwadratowa jest diagonalna w bazie, tzn. ma postać

$$Q(\xi) = \sum_{i=1}^p \xi_i^2 - \sum_{j=1}^q \xi_{p+j}^2$$

gdzie ξ_i to współrzędne wektora ξ to parę (p, q) nazywamy sygnaturą formy kwadratowej. Sygnatura nie zależy od bazy diagonalizującej, dodatkowo ich sumę $p + q$ nazywamy rzędem formy kwadratowej i oznaczamy $\text{rk}(Q) = p + q$

W naszym przykładzie sygnatura wynosi $(1, 2)$, a rząd jest równy 3.

Formy kwadratowe pojawiają się naturalnie przy badaniu pochodnej wielu zmiennych i zawierają informację o drugiej pochodnej. Dla funkcji jednej zmiennej znak drugiej pochodnej mówił nam czy mamy minimum czy maksimum, dla funkcji wielu zmiennych rolę tę będzie pełnił sygnatura, ale to raczej temat na Analizę II.

Zad. 5.1

Znajdź sygnaturę i rząd następujących form kwadratowych

a) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$ b) $x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3 + 7x_2^2 + 8x_3^2$ c) x_1x_2

Rozw. 5.1

a) Wybieramy współrzędną x_1 i uzupełniamy kwadrat, pamiętając o wzorze skróconego mnożenia $(x_1 + a)^2 = x_1^2 + 2x_1a + a^2$ mamy

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = (x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2) - 4x_2^2 + 3x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 - x_2^2$$

Mamy zatem sygnaturę $(1, 1)$ (jeden plus, jeden minus), oraz rząd $\text{rk}(Q) = 2$, współrzędne diagonalizujące to

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1 + 2x_2 \\ \xi_2 = x_2 \end{cases}$$

b) Chcemy uzupełnić kwadrat dla zmiennej x_1 , mamy dwa człony liniowe, które musimy "wciągnąć"

$$\begin{aligned} x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3 + 7x_2^2 + 8x_3^2 &= (x_1^2 + 2x_1(2x_2 - 3x_3) + (2x_2 - 3x_3)^2) - (2x_2 - 3x_3)^2 \\ &\quad + 8x_2x_3 + 7x_2^2 + 8x_3^2 = (x_1 + 2x_2 - 3x_3)^2 + 3x_2^2 + 20x_2x_3 - x_3^2 = (x_1 + 2x_2 - 3x_3)^2 \\ &\quad + 3\left(x_2^2 + 2x_2\frac{10}{3}x_3 + \frac{100}{9}x_3^2\right) - \frac{100}{3}x_3^2 - x_3^2 = (x_1 + 2x_2 - 3x_3)^2 + 3\left(x_2 + \frac{10}{3}x_3\right)^2 - \frac{103}{3}x_3^2 \end{aligned}$$

Mamy zatem sygnaturę $(2, 1)$ (dwa plusy, jeden minus), oraz rząd $\text{rk}(Q) = 3$, współrzędne diagonalizujące to

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ \xi_2 = x_2 + \frac{10}{3}x_3 \\ \xi_3 = x_3 \end{cases}$$

c) Co jeśli nie ma wyrazu kwadratowego (x_i^2), aby uzupełnić kwadrat? Musimy sobie stworzyć jakiś, standardowym pomysłem jest zmienić zmienne (np. "pomieszać" pierwszą i drugą)

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \end{cases}$$

Otrzymujemy wtedy

$$x_1 x_2 = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = y_1^2 - y_2^2$$

Dostaliśmy od razu zdiagonalizowaną formę kwadratową, ogólnie nie byłoby tak prosto i trzeba by kontynuować procedurę według przepisu z poprzednich podpunktów. Mamy zatem sygnaturę $(1, 1)$ (jeden plus, jeden minus), oraz rząd $\text{rk}(Q) = 2$, współrzędne diagonalizujące to

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \end{cases}$$