

Notatki do ćwiczeń z Algebry z Geometrią II

Wojciech Niedziółka

4 Szukanie bazy i postaci Jordana

Definicja 14. Przestrzenią pierwiastkową nazywamy $\ker(M - \lambda \mathbb{1})^k$ gdzie λ jest wartością własną macierzy o krotności k

Przestrzeń pierwiastkowa jest rozpięta na wszystkich uogólnionych wektorach własnych związanych z wartością własną λ . Może się jednak zdarzyć, że już dla mniejszej potęgi będziemy mieli jądro wymiaru k , które będzie rozpięte przez wszystkie uogólnione wektory własne, dzieje się tak kiedy mamy co najmniej dwie klatki Jordana z wartością własną λ

Przypomnijmy sobie ogólny schemat szukania bazy i postaci Jordana. Najpierw szukamy wielomianu charakterystycznego, oraz jego pierwiastków wraz z krotnościami. Następnie analizujemy po kolei każdą wartość własną i ich klatki Jordana. Pierwszym krokiem jest zbadać jądro $M - \lambda \mathbb{1}$, jego wymiar powie nam ile mamy wektorów własnych dla danej wartości własnej, a ponieważ każda klatka ma dokładnie jeden wektor własny to będziemy wiedzieć ile jest klatek Jordana dla danej wartości własnej. Przydatna jest tu wiedza, że jeśli mamy jądro macierzy, która ma m niezależnych wierszy i n kolumn, to wymiar jądra wynosi $n - m$. Następnie badamy jądra kolejnych potęg $(M - \lambda \mathbb{1})^2, (M - \lambda \mathbb{1})^3 \dots$, aż do momentu, w którym dostaniemy jądro wymiaru k -krotność λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego. Mając nasze jądra możemy zbudować część bazy związaną z wartością własną λ korzystając z tego że uogólnione wektory własne tworzą serię

$$\begin{aligned}(M - \lambda_i)v_i^{(1)} &= 0 \\(M - \lambda_i)v_i^{(2)} &= v_i^{(1)} \\(M - \lambda_i)v_i^{(3)} &= v_i^{(2)} \\&\vdots\end{aligned}$$

gdzie λ_i to i -ta wartość własna, $v_i^{(j)}$ to j -ty z serii uogólniony wektor własny z i -tej klatki Jordana. Procedura jest następująca: wybieramy ostatni wektor z serii, a następnie mnożąc przez $M - \lambda \mathbb{1}$ generujemy jej resztę. Ponieważ ostatni wektor z serii to taki wektor, który należy do $\ker(M - \lambda \mathbb{1})^j$, ale nie należy do $(M - \lambda \mathbb{1})^{j-1}$ mamy dużą swobodę wyboru (w jakimś sensie wybierając losowo wektor z przestrzeni j -wymiarowej prawie zawsze dostaniemy coś, co nie należy do $j-1$ wymiarowej podprzestrzeni). Na podstawie wymiarów jąder można też wywnioskować jakie są rozmiary klatek Jordana korzystając z faktu, że $\ker(M - \lambda \mathbb{1})^j$ zawiera wszystkie wektory z klatek o wartościach własnych λ , które mają w ramach klatki numer co najwyżej j (dla $j = 1$ mamy wektory własne, dla $j = 2$ mamy wektory własne i drugie wektory z serii długości ≥ 2 itd.). Co jeśli mamy dwie klatki o tej samej wartości własnej? Należy zacząć od najdłuższej serii, a po jej znalezieniu szukać drugiej najdłuższej i tak do skutku.

Zad. 4.1

Znaleźć bazę i postać Jordana macierzy

$$\text{a) } M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Rozw. 4.1

a) Pierwszy krok to znalezienie wielomianu charakterystycznego

$$\omega_M(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)^2$$

Mamy dwie wartości własne -1 i 2 , obie mają krotność dwa, zanim powiemy coś o postaci Jordana trzeba przyjrzeć się podprzestrzeniom własnym.

$$\begin{aligned} \ker(M - (-1)\mathbb{1}) &= \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \ker(M - 2\mathbb{1}) &= \ker \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Mamy po jednym wektorze własnym dla każdej wartości własnej. Wiedząc, że każda z klatek Jordana ma dokładnie jeden wektor własny, możemy wywnioskować że każda z wartości własnych będzie miała po jednej klatce, które będą miały rozmiar związany z krotnością czyli 2×2

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Wiemy też, że baza będzie się składać z dwóch części, dwuelementowej serii dla pierwszej klatki i drugiej dwuelementowej serii dla drugiej klatki

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(2)}\}$$

Pozostaje znaleźć uogólnione wektory własne, poprzez przeanalizowanie kolejnych potęg macierzy

$$\ker(M - (-1)\mathbb{1})^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & -9 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 9 \\ 0 & -6 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Dostaliśmy dwuwymiarowe jądro, a wiemy że wartość własna -1 ma krotność 2, więc mamy już wszystkie potrzebne informacje. Jądro w pierwszej potęgce jest rozpięte przez $\mathbf{v}_1^{(1)}$, a jądro drugiej potęgi przez $\mathbf{v}_1^{(1)}$ i $\mathbf{v}_1^{(2)}$.

$$\ker(M - (-1)\mathbb{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \mathbf{v}_1^{(1)} \rangle$$

$$\ker(M - (-1)\mathbb{1})^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)} \rangle$$

Na $\mathbf{v}_1^{(2)}$ - nasz uogólniony wektor własny dla wartości własnej -1 , możemy wybrać dowolny wektor należący do drugiej przestrzeni, który nie należy do pierwszej, na przykład

$$\mathbf{v}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wtedy naszym drugim wektorem z klatki Jordana będzie

$$\mathbf{v}_1^{(1)} = (M - (-1)\mathbb{1})\mathbf{v}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dla drugiej wartości własnej mamy

$$\ker(M - 2\mathbb{1})^2 = \ker \begin{pmatrix} 15 & 0 & -6 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Znowu wystarczy jądro drugiej potęgi, bo jego wymiar to dwa i jest równy krotności 2 jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego, podsumowując

$$\ker(M - 2\mathbb{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \mathbf{v}_2^{(1)} \rangle$$

$$\ker(M - 2\mathbb{1})^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \mathbf{v}_2^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(2)} \rangle$$

Mamy zatem $\mathbf{v}_2^{(2)}$ nasz uogólniony wektor własny dla wartości własnej 2, jest to dowolny wektor z drugiej przestrzeni, który nie należy do pierwszej, na przykład

$$\mathbf{v}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wtedy naszym drugim wektorem będzie

$$\mathbf{v}_2^{(1)} = (M - 2\mathbb{1})\mathbf{v}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Podsumowując mamy bazę Jordana i postać Jordana naszej macierzy

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(2)}\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Możemy też zapisać naszą macierz M jako $S^{-1}JS$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Można sprawdzić, że $S^{-1}JS$ daje faktycznie naszą początkową macierz M , więc znaleźliśmy poprawną postać i bazę Jordana. Ponieważ mieliśmy dużą dowolność w konstrukcji bazy, użycie wzoru $M = S^{-1}JS$ jest najpewniejszym sposobem upewnienia się czy nie ma błędu

b) Pierwszy krok to znalezienie wielomianu charakterystycznego

$$\omega_M(\lambda) = (1 - \lambda)^5$$

Mamy jedną wartość własną 1 o krotności 5, zbadajmy przestrzeń własną by dowiedzieć się ile klatek Jordana ma nasza macierz

$$\ker(M - \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Mamy dwa wektory własne $\mathbf{v}_1^{(1)}$ i $\mathbf{v}_2^{(1)}$. Wiedząc, że każda z klatek Jordana ma dokładnie jeden wektor własny, możemy wywnioskować że mamy dwie klatki Jordana, ich rozmiary muszą się sumować do 5 (krotności wartości własnej), ale nie wiemy jak wymiary rozkładają się na nasze klatki, czy mamy jedną klatkę 1×1 i jedną 4×4 czy może klatkę 2×2 i 3×3 ? Aby to sprawdzić musimy badać jądra kolejnych potęg $M - \mathbb{1}$

$$\ker(M - \mathbb{1})^2 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Jądro drugiej potęgi jest rozpięte przez wektory własne i uogólnione wektory własne, które są drugie w swojej serii. Wymiar jądra wynosi cztery, a już wiemy że są dwa wektory własne, więc możemy być pewni że obie klatki są co najmniej 2×2 . Suma rozmiarów klatek to 5 -krotność pierwiastka, więc postać Jordana ma postać

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wiemy że baza będzie się składać z dwóch części, dwuelementowej serii dla pierwszej klatki i trzeylementowej dla drugiej klatki.

$$B = \{\mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(3)}\}$$

Wiemy że jest 5 uogólnionych wektorów własnych, więc musimy jeszcze zbadać $\ker(M - \mathbb{1})^3$, które jak się okaże jest 5 wymiarową przestrzenią, więc skoro wymiar jest równy krotności pierwiastka wielomianu charakterystycznego, możemy zakończyć badanie jąder i rozpocząć konstrukcję bazy

$$\ker(M - \mathbb{1})^3 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^5$$

Moglibyśmy się zastanowić nad tym jaka jest tu przestrzeń pierwiastkowa $\ker(M - \mathbb{1})^5$, ale widać, że dla trzeciej potęgi mamy, jak to się mówi, wysycenie i każda wyższa potęga będzie dawać to samo. W ogólności musimy obliczyć $\ker(M - \lambda \mathbb{1})^j$ dla takiej potęgi j , dla której będziemy mieli k (krotność wartości własnej λ) wektorów w jądrze, j będzie rozmiarem największej klatki Jordana dla danej wartości własnej. Jeśli każda wartość własna ma jedną klatkę będzie to przestrzeń pierwiastkowa, ale jeśli (jak w naszym przypadku) mamy dwie klatki Jordana z tą samą wartością własną to j będzie mniejsze. Podsumowując mamy trzy jądra, które nas interesują, jeśli oznaczymy wektory bazy Jordana jak w poprzednich

przykładach to mamy

$$\begin{aligned}\ker(M - \mathbb{1}) &= \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(1)} \rangle \\ \ker(M - \mathbb{1})^2 &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(2)} \rangle \\ \ker(M - \mathbb{1})^3 &= \mathbb{R}^5 = \langle \mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(3)} \rangle\end{aligned}$$

Do tej pory mieliśmy tylko jedną klatkę Jordana, procedura polegała na znalezieniu ostatniego wektora z serii i wygenerowanie reszty przez działanie $(M - \lambda \mathbb{1})$, tutaj mamy jednak dwie serie co daje niewielką komplikację, musimy zacząć od którejś serii. Dobrą strategią jest najpierw znaleźć wektory z dłuższej serii. Dlaczego? Analizując powyższe wzory widzimy, że $\mathbf{v}_2^{(3)}$ należy do $\ker(M - \mathbb{1})^3$ ale nie należy do $\ker(M - \mathbb{1})^2$, co ważne jest to JEDYNY wektor z tą własnością. Jeśli byśmy chcieli teraz znaleźć $\mathbf{v}_1^{(2)}$ mielibyśmy dylemat, jest to wektor, który należy do $\ker(M - \mathbb{1})^2$ ale nie należy do $\ker(M - \mathbb{1})$, ale $\mathbf{v}_2^{(2)}$ też ma tę własność. Nie mamy możliwości na tym etapie by z pełną pewnością ustalić który wektor to $\mathbf{v}_1^{(2)}$, jest szansa że wybralibyśmy coś, co potem okazałoby się $\mathbf{v}_2^{(2)}$. Szukamy $\mathbf{v}_2^{(3)}$, dowolnego wektora, który należy do $\ker(M - \mathbb{1})^3$ ale nie należy do $\ker(M - \mathbb{1})^2$, możemy na przykład wybrać

$$\mathbf{v}_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resztę znajdujemy niemal automatycznie

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2^{(2)} &= (M - \mathbb{1})\mathbf{v}_2^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}_2^{(1)} &= (M - \mathbb{1})\mathbf{v}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Żeby znaleźć $\mathbf{v}_1^{(2)}$ poszukujemy wektora należącego do $\ker(M - \mathbb{1})^2$, ale nie do $\ker(M - \mathbb{1})$, który dodatkowo jest liniowo niezależny od już znalezionych wektorów. Dodatkowy warunek jest istotny, bo szukamy bazy, więc chcemy mieć coś "nowego". Zanim zaczniemy szukanie $\mathbf{v}_1^{(2)}$ warto sobie trochę zmienić postać jądra

$(M - \mathbb{1})^2$, możemy dodawać do siebie wektory i mnożyć je przez stałe, odejmijmy zatem od pierwszego wektora drugi, mamy

$$\ker(M - \mathbb{1})^2 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(2)} \rangle$$

Rozpoznajemy, że pierwszy wektor to $\mathbf{v}_2^{(2)}$, drugi to $\mathbf{v}_2^{(1)}$, a trzeci należy do $\ker(M - \mathbb{1})$. Pozwala nam to stwierdzić że $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ jest wektorem, który należy do $\ker(M - \mathbb{1})^2$, ale nie do $\ker(M - \mathbb{1})$ (kto nie wierzy może sobie sprawdzić z definicji jądra, czy ten wektor daje zero po przemnożeniu przez wiersze?). Dodatkowo jest liniowo niezależny od tego, co już znaleźliśmy, mamy więc nasz poszukiwany $\mathbf{v}_1^{(2)}$ i po krótkim rachunku też $\mathbf{v}_1^{(1)}$

$$\mathbf{v}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1^{(1)} = (M - \mathbb{1})\mathbf{v}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podsumowując mamy bazę Jordana i postać Jordana naszej macierzy

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(2)}, \mathbf{v}_2^{(3)}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Możemy też zapisać naszą macierz M jako $S^{-1}JS$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Można sprawdzić, że $S^{-1}JS$ daje faktycznie naszą początkową macierz M , więc znaleźliśmy poprawną postać i bazę Jordana. Ponieważ mieliśmy dużą dowolność w konstrukcji bazy, użycie wzoru $M = S^{-1}JS$ jest najpewniejszym sposobem upewnienia się czy nie ma błędu