

Notatki do ćwiczeń z Algebry z Geometrią II

Wojciech Niedziółka

3 Diagonalizacji ciąg dalszy, postać Jordana

Zacznijmy od przypomnienia o tym jak znajdujemy macierz odwzorowania liniowego. Mamy odwzorowanie $F : \mathbb{R}_2[\cdot] \rightarrow \mathbb{R}_2[\cdot]$ dane wzorem $(Fv)(t) = v(t - 1)$ i chcemy znaleźć macierz tego odwzorowania w bazie $e = \{1, t, t^2\}$. Procedura jest następująca: zadziałaj odwzorowaniem na elementy bazy wejściowej i wyraż wynik w bazie wyjściowej. Odwzorowanie F przesuwają argument wielomianu z t do $t - 1$, mamy więc

$$Fe_1 = F1 = 1 = e_1$$

$$Fe_2 = (Ft) = t - 1 = e_2 - e_1$$

$$Fe_3 = (Ft^2) = (t - 1)^2 = t^2 - 2t + 1 = e_3 - 2e_2 + e_1$$

Teraz pozostaje ułożyć z tego naszą macierz, kolejne równości dają nam kolumny

$$[F]_e^e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Przykład trochę bardziej związany z tym co robimy (tzn z macierzą zmiany bazy S^{-1}) to znalezienie macierzy odwzorowania id (identyczności) z bazy f do bazy e w sytuacji w której mamy elementy bazy f wyrażone przez el. bazy e (dokładnie taką sytuację mamy kiedy znaleźliśmy wektory własne). Np. jeśli $f = \{f_1, f_2, f_3\}$, $f_1 = 2e_1 + 3e_2$, $f_2 = 5e_1 - 2e_2$, $f_3 = 2e_1 - 4e_2 + 5e_3$, mamy

$$idf_1 = f_1 = 2e_1 + 3e_2$$

$$idf_2 = f_2 = 5e_1 - 2e_2$$

$$idf_3 = f_3 = 2e_1 - 4e_2 + 5e_3$$

Nasza macierz może być prosto odczytana z tych równań jako

$$[id]_f^e = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Zad. 3.1

Zdiagonalizuj następujące macierze (Znajdź S i D jak wyżej) i oblicz funkcje od operatora

a) $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\exp(tA) = ?$

- b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B^{2026} = ?$
- c) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 8 & -8 & 0 \\ 10 & -14 & 2 \end{pmatrix}$, $\exp(tC) = ?$
- d) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}D\right) = ?$

Rozw. 3.1

a) Najpierw musimy znaleźć spektrum i wektory własne

$$\omega_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 7 - \lambda & -5 \\ -2 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 11\lambda + 18 = (2 - \lambda)(9 - \lambda)$$

Spektrum jest równe $\sigma(A) = \{2, 9\}$, następnie analizujemy podprzestrzenie własne

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_9 = \ker \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Macierz S^{-1} jest dużo prostsza do znalezienia, bo kolumnami są znalezione właśnie wektory własne, odwracając ją mamy

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

I mamy

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = S^{-1}DS = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Możemy użyć tej formy by łatwo obliczyć $\exp(tA)$

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \exp\left(t \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\right) = S^{-1} \exp(tD) S = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{9t} \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2e^{2t} + 5e^{9t} & 5e^{2t} - 5e^{9t} \\ 2e^{2t} - 2e^{9t} & 5e^{2t} + 2e^{9t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Najpierw musimy znaleźć spektrum i wektory własne

$$\omega_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -3 \\ 1 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (-1 - \lambda)(1 - \lambda)$$

Spektrum jest równe $\sigma(B) = \{-1, 1\}$, następnie analizujemy podprzestrzenie własne

$$V_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Macierz S^{-1} jest dużo prostsza do znalezienia, bo kolumnami są znalezione właśnie wektory własne, odwracając ją mamy S

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

I mamy

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = S^{-1} D S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Możemy użyć tej formy by łatwo obliczyć B^{2026}

$$B^{2026} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2026} = S^{-1} D^{2026} S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2026} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Najpierw musimy znaleźć spektrum i wektory własne

$$\omega_C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -2 & -2 \\ 8 & -8-\lambda & 0 \\ 10 & -14 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 16\lambda = (-4-\lambda)(-\lambda)(4-\lambda)$$

Spektrum jest równe $\sigma(C) = \{-4, 0, 4\}$, następnie analizujemy podprzestrzenie własne

$$V_{-4} = \ker \begin{pmatrix} 10 & -2 & -2 \\ 8 & -4 & 0 \\ 10 & -14 & 6 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 8 & -8 & 0 \\ 10 & -14 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -7 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_4 = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 8 & -12 & 0 \\ 10 & -14 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & -7 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Macierz S^{-1} jest dużo prostsza do znalezienia, bo kolumnami są znalezione właśnie wektory własne, odwracając ją mamy

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

I mamy

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 8 & -8 & 0 \\ 10 & -14 & 2 \end{pmatrix} = S^{-1} D S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Możemy użyć tej formy by łatwo obliczyć $\exp(tC)$

$$\begin{aligned} \exp(tC) &= \exp \left(t \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 8 & -8 & 0 \\ 10 & -14 & 2 \end{pmatrix} \right) = S^{-1} \exp(tD) S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3e^{-4t} + 4 + 3e^{4t} & 5e^{-4t} - 8 + 3e^{4t} & -e^{-4t} + 4 - 3e^{4t} \\ -6e^{-4t} + 4 + 2e^{4t} & 10e^{-4t} - 8 + 2e^{4t} & -2e^{-4t} + 4 - 2e^{4t} \\ -9e^{-4t} + 8 + e^{4t} & 15e^{-4t} - 16 + e^{4t} & -3e^{-4t} + 8 - e^{4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d) Najpierw musimy znaleźć spektrum i wektory własne

$$\omega_D(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -3 & 1 \\ 2 & -4 - \lambda & 2 \\ 1 & -3 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = (-2 - \lambda)(2 - \lambda)^2$$

Spektrum jest równe $\sigma(D) = \{-2, 2\}$, następnie analizujemy podprzestrzenie własne

$$V_{-2} = \ker \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 12 & -24 \\ 0 & 4 & -8 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Macierz S^{-1} jest dużo prostsza do znalezienia, bo kolumnami są znalezione właśnie wektory własne, odwracając ją mamy

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

I mamy

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = S^{-1} D S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Możemy użyć tej formy by łatwo obliczyć $\sin\left(\frac{\pi}{2}D\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}D\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\right) = S^{-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}D\right)S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Po tych zadaniach z diagonalizacją macierzy możemy się pochylić nad ogólniejszym przypadkiem. Co jeśli nie mamy tyle niezależnych liniowo wektorów by zbudować z nich bazę?

Definicja 8. Klatką Jordana będziemy nazywać macierz kwadratową $n \times n$, taką że na diagonalu mamy n razy tę samą liczbę $\lambda \in \mathbb{C}$, na przekątnej ponad diagonalą mamy 1, a poza tym same 0

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Przykład 9. Klatki Jordana

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Przyjrzyjmy się następującej klatce 3×3 , która ma same zera na diagonalu, możemy obliczyć jej działanie na wektorach bazowych f

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M f_1 = 0$$

$$M f_2 = f_1 \quad M^2 f_2 = 0$$

$$M f_3 = f_2 \quad M^2 f_3 = f_1 \quad M^3 f_3 = 0$$

Czynimy teraz obserwację, że klatka Jordana z zerami na diagonalu w pierwszej potędze zeruje pierwszy wektor bazy, w drugiej potędze zeruje pierwszy i drugi, a w trzeciej potędze zeruje pierwszy, drugi i trzeci. Ta własność będzie kluczowa przy znajdowaniu postaci Jordana.

Definicja 10. Mówimy że macierz jest w postaci Jordana jeśli jest zbudowana z klatek Jordana (wartości własne mogą być te same dla różnych klatek), które są na diagonalu, a poza nimi jest 0. Bazę w której macierz ma tę postać nazywamy bazą Jordana, a jej elementy uogólnionymi wektorami własnymi

Przykład 11. Macierze w postaci Jordana, z zaznaczonymi klatkami

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cccc|cc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c|c|c} -3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

Twierdzenie 12. Każda macierz kwadratowa w pewnej bazie ma postać Jordana

Jeśli macierz jest diagonalizowalna to oczywiście postać diagonalna (wartości własne na diagonalu) jest szczególnym przykładem postaci Jordana. Istnieją macierze niediagonalizowalne, wtedy postać Jordana to (mówiąc lekko z angielskiego) "next best thing", pozwala ona też liczyć funkcje od operatora, choć jest to trochę bardziej zawile (ale o tym kiedy indziej). Teraz skupmy się na zrozumieniu procedury znajdowania postaci Jordana

Przykład 13. Rozważmy następującą macierz w postaci Jordana, użyjemy jej jako przykładu tego jak szukać uogólnionych wektorów własnych

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Jeśli policzymy wielomian charakterystyczny otrzymamy $\omega_M(\lambda) = (5 - \lambda)^2(2 - \lambda)^3$ (używając kilka razy rozwinięcia Laplace'a wzdłuż pierwszej kolumny). Wyznacznik nie zależy od bazy, w której jest wyrażona macierz odwzorowania liniowego $\det(S^{-1}AS) = \det(S^{-1})\det(A)\det(S) = \frac{1}{\det(S)}\det(A)\det(S) = \det(A)$, więc wielomian charakterystyczny daje nam informacje o wartościach własnych na diagonalu i ich krotnościach. Pozostaje znaleźć sposób ustalania uogólnionych wektorów własnych w sposób niezależny od bazy w której jest wyrażona macierz.

Obserwujemy, że można te wektory te są powiązane z jądrem macierzy $(M - \lambda\mathbb{1})^k$, jeśli oznaczymy bazę standardową $e_1, e_2 \dots e_5$, to mamy następujące zależności

$$\begin{aligned} \ker(M - 5\mathbb{1}) &= \langle e_1 \rangle & \ker(M - 5\mathbb{1})^2 &= \langle e_1, e_2 \rangle \\ \ker(M - 2\mathbb{1}) &= \langle e_3 \rangle & \ker(M - 2\mathbb{1})^2 &= \langle e_3, e_4 \rangle & \ker(M - 2\mathbb{1})^3 &= \langle e_3, e_4, e_5 \rangle \end{aligned}$$

Daje nam to pomysł na wyznaczenie uogólnionych wektorów własnych: rozważamy każdą wartość własną z osobna, najpierw $\lambda = 5$, ponieważ ma ona krotność 2, musimy znaleźć 2 uogólnione wektory własne, najpierw szukamy e_2 - wektor należący do $\ker(M - 5\mathbb{1})^2$ ale nie do $\ker(M - 5\mathbb{1})$ (może to być dowolny taki wektor), e_1 można wtedy znaleźć ze wzoru $e_1 = (M - 5\mathbb{1})e_2$. Następnie wartość własna $\lambda = 2$ o krotności 3, najprościej najpierw znaleźć e_5 , które będzie dowolnym wektorem należącym do $\ker(M - 2\mathbb{1})^3$ ale nie do $\ker(M - 2\mathbb{1})^2$, pozostałe dwa uogólnione wektory własne możemy znaleźć z zależności $e_4 = (M - 2\mathbb{1})e_5$, $e_3 = (M - 2\mathbb{1})^2e_5$. Elementy bazy Jordana można oznaczać też $\mathbf{v}_i^{(j)}$ gdzie i to numer klatki Jordana, a j to numer wektora w tej klatce, jest to minimalne j dla którego $(M - \lambda_i\mathbb{1})^j\mathbf{v}_i^{(j)} = 0$. W naszym przykładzie mamy $\mathbf{v}_1^{(1)} = e_1$, $\mathbf{v}_1^{(2)} = e_2$, $\mathbf{v}_2^{(1)} = e_3$, $\mathbf{v}_2^{(2)} = e_4$, $\mathbf{v}_2^{(3)} = e_5$

Zad. 3.2

Znajdź postać Jordana i bazę Jordana następującej macierzy $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 5 & -6 \\ 8 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

Rozw. 3.2

Rozpoczynamy analogicznie do diagonalizacji macierzy od wielomianu charakterystycznego

$$\omega_M(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 8 & 5-\lambda & -6 \\ 8 & 4 & -5-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

Mamy dwie wartości własne, 1 o krotności dwa i -1 o krotności jeden, już teraz możemy czynić przypuszczenia jak będzie wyglądać postać Jordana, na pewno będzie miała jedną klatkę 1×1 z wartością własną -1, dla wartości własnej 1 możemy mieć jedną klatkę 2×2 lub dwie klatki 1×1 (w tym przypadku macierz byłaby diagonalizowalna). Żeby ustalić jaki przypadek mamy musimy poszukać wektorów własnych.

$$\begin{aligned} \ker(M - (-1)\mathbb{1}) &= \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 8 & 6 & -6 \\ 8 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= f_1 \\ \ker(M - \mathbb{1}) &= \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & -6 \\ 8 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= f_2 \end{aligned}$$

Mamy dwa wektory własne f_1 i f_2 , po jednym do każdej wartości własnej, ewidentnie diagonalizacja nie jest możliwa, bo mamy za mało liniowo niezależnych wektorów własnych, by stworzyć bazę $\mathbf{R}^3$. Wartość własna -1 ma krotność jeden, więc jej klatka Jordana jest 1×1 i na $\mathbf{v}_1^{(1)}$ można wybrać f_1 . Wiemy teraz że wartość własna 1 ma klatkę Jordana 2×2 , żeby znaleźć brakujący wektor patrzymy na

$$\ker(M - \mathbb{1})^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & -6 \\ 8 & 4 & -6 \end{pmatrix}^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -16 & 0 & 4 \\ -16 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Można się łatwo upewnić że f_2 należy do powyższego jądra, tak jak powinno być, teraz musimy wybrać wektor z tej dwuwymiarowej podprzestrzeni, który nie jest f_2 , ten wektor to poszukiwany $\mathbf{v}_2^{(2)}$. Wyborów mamy nieskończenie wiele, ale każdy jest dobry, np

$$\mathbf{v}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wtedy naszym drugim wektorem będzie

$$\mathbf{v}_2^{(1)} = (M - \mathbb{1})\mathbf{v}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & -6 \\ 8 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Podsumowując mamy postać Jordana J i bazę Jordana

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(2)}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Możemy zapisać macierz M używając macierzy zmiany bazy $S^{-1} = [id]_{\mathcal{B}}^e = (\mathbf{v}_1^{(1)} \mathbf{v}_2^{(1)} \mathbf{v}_2^{(2)})$ jako $M = S^{-1} J S$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 5 & -6 \\ 8 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Oczywiście można było wybrać jakiś inny wektor na $\mathbf{v}_2^{(2)}$, jeśli dokonilibyśmy alternatywnego wyboru dostalibyśmy równie dobrą bazę Jordana, np.

$$\tilde{\mathbf{v}}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_2^{(1)} = (M - \mathbb{I})\tilde{\mathbf{v}}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & -6 \\ 8 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1^{(1)}, \tilde{\mathbf{v}}_2^{(1)}, \tilde{\mathbf{v}}_2^{(2)}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ -16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Zauważmy, że $\tilde{\mathbf{v}}_2^{(1)}$ jest przeskalowanym wektorem $\mathbf{v}_2^{(1)}$, w momencie policzenia wektorów własnych wiedzieliśmy że jeden z wektorów bazy będzie proporcjonalny do f_2 , ale nie dokonywaliśmy wyboru, bo nie byliśmy pewni współczynnika jaki musi być by zachodziło $\mathbf{v}_2^{(1)} = (M - \mathbb{I})\mathbf{v}_2^{(2)}$. Wybór wektora $\mathbf{v}_2^{(2)}$ daje nam dowolność, ale musimy się upewnić że pozostałe wektory z klatki Jordana są "zgodne" z wyborem $\mathbf{v}_2^{(2)}$, dlatego najlepiej je wygenerować mnożąc przez $(M - \mathbb{I})$. Dla wartości własnej -1 mieliśmy klatkę Jordana 1×1 , więc mieliśmy pełną swobodę wyboru.