

Notatki do ćwiczeń z Algebry z Geometrią II

Wojciech Niedziółka

2 Wektory i wartości własne, diagonalizacja macierzy

Zaczynamy powtórką definicji z wykładu

Definicja 2. Niech $T \in \text{End}(V)$ będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V (tzn. przekształcenie liniowe tej przestrzeni w siebie), wektor $\mathbf{v} \neq 0$ taki, że $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ dla $\lambda \in \mathbb{C}$ nazywamy wektorem własnym, a λ wartością własną T odpowiadającą wektorowi własnemu $\mathbf{v}$

Wniosek 3. $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow (T - \lambda\mathbb{1})\mathbf{v} = 0$, oznacza to, że jeśli λ jest wartością własną to $T - \lambda\mathbb{1}$ jest operatorem nieodwracalnym, co dla macierzy oznacza, że $\det(T - \lambda\mathbb{1}) = 0$. Wektor własny można znaleźć badając $\ker(T - \lambda\mathbb{1})$

Przykład 4. Przeanalizujemy macierz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny jest równy $\omega_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda - 5)(\lambda + 2)$, więc mamy dwie wartości własne -2 i 5 . Możemy teraz znaleźć wektory własne używając redukcji wierszowej (tzn. możemy dodawać wiersze i mnożyć wiersz przez stałą, oraz usuwać wiersz złożony z samych zer)

$$\begin{aligned} V_{-2} &= \ker(A - (-2)\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle \\ V_5 &= \ker(A - 5\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

V_λ będziemy nazywać podprzestrzenią własną związaną z wartością własną λ . Ogólnie, jeśli krotność λ jako pierwiastka $\omega_A(\lambda)$ wynosi k , wymiar podprzestrzeni własnej spełnia $1 \leq \dim(V_\lambda) \leq k$

Definicja 5 (Tylko dla przestrzeni skończonego wymiaru, ale innych nie będziemy robić). Spektrum to zbiór wartości własnych operatora T , oznaczamy je $\sigma(T)$

Zad. 2.1

Znajdź spektrum i podprzestrzenie własne następujących macierzy

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Rozw. 2.1

a) Najpierw szukamy wartości własnych

$$\omega_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-(2-\lambda)\lambda+1) = (1-\lambda)^3$$

Wartości własne to pierwiastki wielomianu charakterystycznego, więc mamy $\sigma(A) = \{1\}$. Aby znaleźć wektory własne, przeanalizujemy jądro używając redukcji wierszowej

$$\ker(A - 1\mathbb{I}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nasze jądro jest dwuwymiarową podprzestrzenią $\mathbb{C}^3$, mamy zatem dwa liniowo niezależne wektory własne o wartości własnej 1, np.

$$\mathbf{v}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podprzestrzeń własna związana z wartością własną 1 to

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

b) Najpierw szukamy wartości własnych

$$\omega_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 \\ 4 & -1-\lambda & -4 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = (3-\lambda)(-1-\lambda)^2$$

Mamy dwa pierwiastki: 3 o krotności jeden i -1 o krotności dwa, więc szukane spektrum to $\sigma(B) = \{-1, 3\}$. Wiemy, że każda wartość własna musi mieć co najmniej jeden wektor własny, a co najwyżej tyle ile wynosi krotność tej wartości własnej. Zanim zaczniemy analizę jądra wiemy już że mamy jeden wektor własny z wartością własną 3 i jeden bądź dwa wektory własne o wartości własnej -1. Możemy je teraz znaleźć i sprawdzić naszą intuicję

$$V_3 = \ker(B - 3\mathbb{I}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 4 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Dla drugiej wartości własnej mamy

$$V_{-1} = \ker(B + 1\mathbb{I}) = \ker \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Czyli ostatecznie mamy po jednym wektorze własnym do każdej wartości własnej

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Najpierw szukamy wartości własnych

$$\omega_C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda = (-\lambda)(1+i-\lambda)(1-i-\lambda)$$

Mamy trzy różne pierwiastki o krotności jeden, nasze spektrum to $\sigma(C) = \{0, 1-i, 1+i\}$ Badamy teraz podprzestrzenie własne

$$V_0 = \ker(C - 0\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} V_{1-i} = \ker(C - (1-i)\mathbb{1}) &= \ker \begin{pmatrix} -1+i & 0 & 0 \\ 1 & i & -1 \\ -1 & 1 & i \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -i \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{1+i} = \ker(C - (1+i)\mathbb{1}) &= \ker \begin{pmatrix} -1-i & 0 & 0 \\ 1 & -i & -1 \\ -1 & 1 & -i \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & i \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & i \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Czyli ostatecznie mamy po jednym wektorze własnym do każdej wartości własnej

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_{1-i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_{1+i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Definicja 6. Jeśli $T \in \text{End}(V)$ ma $n = \dim(V)$ LNZ wektorów własnych, to mówimy że T jest diagonalizowalny

Wniosek 7. Jeśli M to macierz operatora diagonalizowalnego T w pewnej bazie e (tzn. $M = [T]_e^e$, zwykle e to baza standardowa), istnieje macierz S i macierz diagonalna D takie że $M = S^{-1}DS$. Dodatkowo jeśli przez d oznaczymy bazę złożoną z wektorów własnych T to $D = [T]_d^d$ i $S = [id_V]_e^d$. Problem znalezienia macierzy D i S nazywamy problemem diagonalizacji macierzy

Wracając do naszego dwuwymiarowego przykładu 4, mieliśmy dwa liniowo niezależne wektory własne, więc możemy zidentyfikować M , D i S . Macierz M to macierz A z początku przykładu, a D to macierz, która ma na diagonalu -2 i 5 . Łatwiej będzie znaleźć macierz S^{-1} , która jest równa $S^{-1} = [id]_d^e$. Jej kolumny to będą wektory własne zapisane w bazie standardowej (co ważne, są one w tej samej kolejności co wartości własne w macierzy D)

$$S^{-1} = (\mathbf{v}_{-2} \quad \mathbf{v}_5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Macierz S można znaleźć odwracając ją

$$S = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Mamy więc

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Zad. 2.2

Zdiagonalizuj następującą macierz (Znajdź S i D jak wyżej) i oblicz $\exp(M)$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -103 & 100 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Rozw. 2.2

Najpierw musimy znaleźć spektrum i wektory własne

$$\omega_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 2 \\ -103 & 100-\lambda & 2 \\ -4 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 100\lambda^2 + \lambda - 100 = (-1-\lambda)(1-\lambda)(100-\lambda)$$

Spektrum jest równe $\sigma(A) = \{-1, 1, 100\}$, następnie analizujemy podprzestrzenie własne

$$V_{-1} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -103 & 101 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -103 & 99 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -99 & 99 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{100} = \ker \begin{pmatrix} -103 & 0 & 2 \\ -103 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -97 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -103 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 97 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Macierz S^{-1} jest dużo prostsza do znalezienia, bo kolumnami są znalezione właśnie wektory własne, odwracając ją mamy

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

I mamy (co można sobie na palcach sprawdzić)

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -103 & 100 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = S^{-1} D S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Powyższy wzór pozwala nam łatwo obliczyć $\exp(A)$, mamy szereg Taylora dla $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Daje nam to definicję $\exp(A)$

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

Możemy wstawić tam wzór $A = S^{-1} D S$ i zauważyć że S^{-1} i S będą się parami skracać

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S^{-1} D S S^{-1} D S \dots S^{-1} D S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S^{-1} D^n S = S^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n \right) S = S^{-1} \exp(D) S$$

Ponieważ D ma niezerowe elementy tylko na diagonalu (jest tzw macierzą diagonalną), jej k -ta potęga to macierz, która ma na diagonalu k -te potęgi wartości własnych, a poza tym ma 0, więc mamy prosty wzór na $\exp(D)$

$$\exp(D) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 100^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{100} \end{pmatrix}$$