Notatki do ćwiczeń z Algebry z Geometrią II

Wojciech Niedziółka

1 Tw. Cayleya-Hamiltona i zastosowania: potęgowanie macierzy, rekurencje, funkcje od operatora

Na początek mała przypominajka z wykładu

Twierdzenie 1. *(Cayley-Hamilton)*
Niech $A \in \mathbb{K}^n_n$ będzie macierzą kwadratową $n \times n$, a $\omega_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1})$ jej wielomianem charakterystycznym. Wtedy $\omega_A(A) = 0$

Zanim przejdziemy do zastosowań, warto sobie sprawdzić to twierdzenie na palcach, by upewnić się, że rozumiemy o co w nim chodzi

Zad. 1.1

Sprawdź tw. Cayleya-Hamiltona dla następujących macierzy

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Rozw. 1.1

a) Najpierw znajdźmy wielomian charakterystyczny

$$\omega_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

Aby podstawić do tego wielomianu macierz A musimy znać A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

Możemy teraz sprawdzić tw. Cayleya-Hamiltona

$$\omega_A(A) = A^2 - 5A - 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Najpierw znajdźmy wielomian charakterystyczny

$$\omega_B(\lambda) = \det(B - \lambda\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) - 4 + 9 + 6(2-\lambda) + (1-\lambda) - 6\lambda$$
$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 15\lambda + 18$$

Aby podstawić do tego wielomianu macierz B musimy znać B^2 i B^3

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -11 \\ -6 & -7 & 1 \\ 3 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$
$$B^3 = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -11 \\ -6 & -7 & 1 \\ 3 & 5 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & -36 & 12 \\ -3 & -3 & 33 \\ -21 & -30 & -30 \end{pmatrix}$$

Możemy teraz sprawdzić tw. Cayleya-Hamiltona

$$\omega_B(B) = -B^3 + 3B^2 - 15B + 18\mathbb{1} = -\begin{pmatrix} -21 & -36 & 12 \\ -3 & -3 & 33 \\ -21 & -30 & -30 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -3 & -7 & -11 \\ -6 & -7 & 1 \\ 3 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$
$$- 15\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + 18\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zad. 1.2

Oblicz k-tą potęgę macierzy (używając tw. Cayleya-Hamiltona)
a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^k = ?$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B^k = ?$ c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$, $C^k = ?$
d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D^k = ?$

Rozw. 1.2

Kluczem do rozwiązania tego problemu jest sprytne zastosowanie naszej wiedzy o dzieleniu wielomianów, wiemy że jeśli $\omega_A(z)$ jest naszym wielomianem charakterystycznym, to istnieją dwa wielomiany $f(z)$ i $g(z)$, takie że

$$z^k = f(z)\omega_A(z) + g(z)$$

oraz $\deg(g) < \deg\omega_A = n$. Jeśli wstawimy w to równanie macierz A i użyjemy tw. Cayleya-Hamiltona dostaniemy

$$A^k = f(A)\omega_A(A) + g(A) = g(A)$$

Co znacząco upraszcza nasz problem, zamiast podnosić macierz do potęgi k, wystarczy znaleźć resztę z dzielenia z^k przez wielomian charakterystyczny. Tu wystarczy już się posłużyć trikiem, jeśli podstawimy do równania pod z dowolny z pierwiastków wielomianu charakterystycznego z_1 otrzymamy

$$z_1^k = f(z_1)\omega_A(z_1) + g(z_1) = g(z_1)$$

Zasadnicze tw. algebry mówi, że wielomian n-tego stopnia ma n pierwiastków zespolonych, a wielomian $g(z)$ ma n nieznanych współczynników, zatem jest nadzieja że pozwoli nam to znaleźć wszystkie współczynniki (tak długo jak pierwiastki są różne, ale z tym też sobie poradzimy, patrz podpunkt d)).

a) Znajdźmy najpierw wielomian charakterystyczny

$$\omega_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

Z tw. Cayleya-Hamiltona wynika, że $A^2 - 4A + 3 = 0$. Możemy zatem używając tego równania wyrazić k-tą potęgę macierzy jako

$$A^k = \alpha_k A + \beta_k \mathbb{1}$$

gdzie α_k i β_k to pewne liczby zależne od k. Wiedząc, że $z_1 = 1$ i $z_2 = 3$, które są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego, spełniają równanie $z^k = \alpha_k z + \beta_k$, możemy znaleźć współczynniki

$$\begin{cases} 1^k = \alpha_k 1 + \beta_k \\ 3^k = \alpha_k 3 + \beta_k \end{cases} \implies \begin{cases} 1 = \alpha_k 1 + \beta_k \\ 3^k - 1 = \alpha_k 2 \end{cases} \implies \begin{cases} \beta_k = 1 - \alpha_k = \frac{1}{2}(3 - 3^k) \\ \alpha_k = \frac{1}{2}(3^k - 1) \end{cases}$$

Daje nam to odpowiedź

$$A^k = \frac{1}{2}(3^k - 1)A + \frac{1}{2}(3 - 3^k)\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 3^k & 3^k - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Znajdźmy najpierw wielomian charakterystyczny

$$\omega_B(\lambda) = \det(B - \lambda\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

Z tw. Cayleya-Hamiltona wynika, że k-tą potęgę macierzy B można wyrazić jako

$$B^k = \alpha_k B + \beta_k \mathbb{1}$$

gdzie α_k i β_k to pewne liczby zależne od k. Wiedząc, że $z_1 = -1$ i $z_2 = 2$, które są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego, spełniają równanie $z^k = \alpha_k z + \beta_k$, możemy znaleźć współczynniki

$$\begin{cases} (-1)^k = \alpha_k(-1) + \beta_k \\ 2^k = \alpha_k 2 + \beta_k \end{cases} \implies \begin{cases} (-1)^k = \alpha_k(-1) + \beta_k \\ 2^k - (-1)^k = \alpha_k 3 \end{cases} \implies \begin{cases} \beta_k = (-1)^k + \alpha_k = \frac{1}{3}(2(-1)^k + 2^k) \\ \alpha_k = \frac{1}{3}(2^k - (-1)^k) \end{cases}$$

Daje nam to odpowiedź

$$B^k = \frac{1}{3}(2^k - (-1)^k)B + \frac{1}{3}(2(-1)^k + 2^k)\mathbb{1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2^{k+1} + (-1)^k) & \frac{2}{3}(2^k - (-1)^k) \\ \frac{1}{3}(2^k - (-1)^k) & \frac{1}{3}(2(-1)^k + 2^k) \end{pmatrix}$$

c) Znajdźmy najpierw wielomian charakterystyczny

$$\omega_C(\lambda) = \det(C - \lambda\mathbb{1}) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -5 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) + 5 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1 + i)(\lambda - 1 - i)$$

Z tw. Cayleya-Hamiltona wynika, że k-tą potęgę macierzy C można wyrazić jako

$$C^k = \alpha_k C + \beta_k \mathbb{1}$$

gdzie α_k i β_k to pewne liczby zależne od k. Wiedząc, że $z_1 = 1-i$ i $z_2 = 1+i$, które są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego, spełniają równanie $z^k = \alpha_k z + \beta_k$, możemy znaleźć współczynniki

$$\begin{cases} (1-i)^k = \alpha_k(1-i) + \beta_k \\ (1+i)^k = \alpha_k(1+i) + \beta_k \end{cases} \implies \begin{cases} (1-i)^k = \alpha_k(1-i) + \beta_k \\ (1+i)^k - (1-i)^k = \alpha_k 2i \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} \beta_k = (1-i)^k - \alpha_k(1-i) = \frac{1}{2i}((1+i)(1-i)^k - (1-i)(1+i)^k) \\ \alpha_k = \frac{1}{2i}((1+i)^k - (1-i)^k) \end{cases}$$

Daje nam to dobrą okazję do przypomnienia sobie trochę liczb zespolonych, używając $(1 \pm i) = \sqrt{2}e^{\pm i\pi/4}$, mamy

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{1}{2i}((1+i)(1-i)^k - (1-i)(1+i)^k) = \frac{2^{k/2}}{2i}((1+i)e^{-ik\pi/4} - (1-i)e^{ik\pi/4}) \\ &= \frac{2^{k/2}}{2i}(-2i\sin(k\pi/4) + 2i\cos(k\pi/4)) = 2^{k/2}(\cos(k\pi/4) - \sin(k\pi/4)) \\ \alpha_k &= \frac{1}{2i}((1+i)^k - (1-i)^k) = \frac{2^{k/2}}{2i}(e^{ik\pi/4} - e^{-ik\pi/4}) = 2^{k/2}\sin(k\pi/4) \end{aligned}$$

Daje nam to odpowiedź

$$C^k = 2^{k/2}\sin(k\pi/4)C + 2^{k/2}(\cos(k\pi/4) - \sin(k\pi/4))\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 2^{k/2}(2\sin(\frac{k\pi}{4}) + \cos(\frac{k\pi}{4})) & 2^{k/2}\sin(\frac{k\pi}{4}) \\ -5 \times 2^{k/2}\sin(\frac{k\pi}{4}) & 2^{k/2}(\cos(\frac{k\pi}{4}) - 2\sin(\frac{k\pi}{4})) \end{pmatrix}$$

d) Znajdźmy najpierw wielomian charakterystyczny

$$\omega_D(\lambda) = \det(D - \lambda\mathbb{1}) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Z tw. Cayleya-Hamiltona wynika, że k-tą potęgę macierzy C można wyrazić jako

$$D^k = \alpha_k D + \beta_k \mathbb{1}$$

gdzie α_k i β_k to pewne liczby zależne od k. Nasz wielomian ma miejsce zerowe tylko w $z = 1$ o krotności 2. Daje nam to jedno równanie na współczynniki α_k i β_k, aby dostać drugie musimy przyjrzeć się wzorowi

$$z^k = f(z)(z-1)^2 + \alpha_k z + \beta_k$$

Ponieważ krotność naszego pierwiastka jest większa niż jeden, jeśli zadziałamy obustronnie pochodną na nasze równanie, $z = 1$ wyzeruje problematyczny człon z $f(z)$

$$kz^{k-1} = f'(z)(z-1)^2 + f(z)2(z-1) + \alpha_k$$

Daje nam to układ równań

$$\begin{cases} 1^k = \alpha_k + \beta_k \\ k1^{k-1} = \alpha_k \end{cases} \implies \begin{cases} \beta_k = 1 - \alpha_k = 1 - k \\ \alpha_k = k \end{cases}$$

Daje nam to odpowiedź

$$D^k = kD + (1-k)\mathbb{1} = \begin{pmatrix} k+1 & k \\ -k & 1-k \end{pmatrix}$$

Zad. 1.3

Znajdź wzór ogólny na k-ty wyraz ciągu rekurencyjnego
a) $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$, $a_1 = 1$, $a_0 = 0$ b) $b_{k+1} = 4b_k - 5b_{k-1} + 2b_{k-2}$, $b_2 = e$, $b_1 = \pi$, $b_0 = 0$

Rozw. 1.3

a) Kluczem do rozwiązania tego zadania jest zdanie sobie sprawy, że liniowe ciągi rekurencyjne można przetłumaczyć na problem mnożenia macierzy. Zauważmy że skoro a_k i a_{k-1} pozwalają obliczyć a_{k+1} to możemy sobie zapisać przejście z pary a_k, a_{k-1} do pary a_{k+1}, a_k

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \end{pmatrix}$$

nasza macierz nie zależy od k, więc można napisać prosty wzór na a_k zależący od niej i warunków początkowych

$$\begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = A^{k-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

Nasz problem sprowadza się zatem do policzenia $k-1$ potęgi macierzy A

$$\omega_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}))(\lambda - \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))$$

Tw. Cayleya-Hamiltona implikuje że

$$A^{k-1} = \alpha_{k-1}A + \beta_{k-1}\mathbb{1} = \begin{pmatrix} \alpha_{k-1} + \beta_{k-1} & \alpha_{k-1} \\ \alpha_{k-1} & \beta_{k-1} \end{pmatrix}$$

Mamy dwa pierwiastki wielomianu charakterystycznego $z_{1/2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, daje nam to układ równań

$$\begin{cases} \frac{1}{2^{k-1}}(1-\sqrt{5})^{k-1} = \alpha_{k-1}\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) + \beta_{k-1} \\ \frac{1}{2^{k-1}}(1+\sqrt{5})^{k-1} = \alpha_{k-1}\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) + \beta_{k-1} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{1}{2^{k-1}}(1-\sqrt{5})^{k-1} = \alpha_{k-1}\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) + \beta_{k-1} \\ \frac{1}{2^{k-1}}\left((1+\sqrt{5})^{k-1} - (1-\sqrt{5})^{k-1}\right) = \alpha_{k-1}\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \beta_{k-1} = \frac{1}{2^{k-1}}(1-\sqrt{5})^{k-1} - \alpha_{k-1}\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) = \frac{1}{2^k\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})^{k-1} - (1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^{k-1}\right) \\ \alpha_{k-1} = \frac{1}{2^{k-1}\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^{k-1} - (1-\sqrt{5})^{k-1}\right) \end{cases}$$

Daje nam to odpowiedź

$$\begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{k-1} + \beta_{k-1} & \alpha_{k-1} \\ \alpha_{k-1} & \beta_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Trochę szybsze obliczeniowo będzie odczytanie że $a_{k-1} = \alpha_{k-1}$ i przesunięcie indeksu o jeden by otrzymać wynik

$$a_k = \alpha_k = \frac{(1+\sqrt{5})^k - (1-\sqrt{5})^k}{2^k\sqrt{5}}$$

b) Możemy zapisać naszą rekurencję jako

$$\begin{pmatrix} b_{k+1} \\ b_k \\ b_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k \\ b_{k-1} \\ b_{k-2} \end{pmatrix}$$

Daje nam to wzór na k-ty element ciągu

$$\begin{pmatrix} b_k \\ b_{k-1} \\ b_{k-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-2} \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}^{k-2} \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Musimy zatem znaleźć $k-2$ potęgę macierzy $\boldsymbol{B}$

$$\omega_{\boldsymbol{B}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(-\lambda)(-\lambda) + 2 - 5\lambda = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

Mamy zatem

$$z^{k-2} = f(z)(z-2)(z-1)^2 + \alpha_{k-2}z^2 + \beta_{k-2}z + \gamma_{k-2}$$

Mamy układ 3 równań na nasze współczynniki, pierwsze dwa biorą się z wstawienia pierwiastków 1 i 2, a trzecie z zadziałania pochodną na obie strony i wstawienia pierwiastka o krotności dwa czyli 1

$$\begin{cases} 1^{k-2} = \alpha_{k-2} + \beta_{k-2} + \gamma_{k-2} \\ 2^{k-2} = \alpha_{k-2}4 + \beta_{k-2}2 + \gamma_{k-2} \\ (k-2)1^{k-2} = \alpha_{k-2}2 + \beta_{k-2} \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_{k-2} = 1 + 2^{k-2} - k \\ \beta_{k-2} = \frac{1}{2}(-2^k + 6k - 8) \\ \gamma_{k-2} = \frac{1}{4}(2^k - 8k + 16) \end{cases}$$

Daje nam to poszukiwany wzór

$$\boldsymbol{B}^{k-2} = \alpha_{k-2}\boldsymbol{B}^2 + \beta_{k-2}\boldsymbol{B} + \gamma_{k-2}\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 11\alpha_{k-2} + 4\beta_{k-2} + \gamma_{k-2} & -18\alpha_{k-2} - 5\beta_{k-2} & 8\alpha_{k-2} + 2\beta_{k-2} \\ 4\alpha_{k-2} + \beta_{k-2} & -5\alpha_{k-2} + \gamma_{k-2} & 2\alpha_{k-2} \\ \alpha_{k-2} & \beta_{k-2} & \gamma_{k-2} \end{pmatrix}$$

Z dolnego wiersza można odczytać, że

$$b_{k-2} = \alpha_{k-2}b_2 + \beta_{k-2}b_1 + \gamma_{k-2}b_0$$

co daje ostatecznie

$$b_k = \alpha_k b_2 + \beta_k b_1 + \gamma_k b_0 = e(2^k - k - 1) + \pi\frac{1}{2}(-2^{k+2} + 6k + 4)$$

Zad. 1.4

Oblicz

a) $\exp\left(t\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)$ b) $\exp\left(t\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\right)$ c) $\sin\left(\frac{\pi}{6}\begin{pmatrix}4 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)$

d) $\varphi\left(\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & -3\end{pmatrix}\right)$, gdzie $\varphi(z) = \frac{1}{2-z}\frac{1}{3-z}\dots\frac{1}{n-z}$

Rozw. 1.4

a) To zadanie jest dość analogiczne do 1.2, okazuje się że dla funkcji analitycznych możemy użyć podobnego triku

$$\exp(tz) = f(z)\omega_A(z) + \alpha z + \beta$$

gdzie $f(z)$ jest pewną funkcją analityczną. Pozwala nam to łatwo obliczyć szukane wyrażenie

$$\omega_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix}-\lambda & 2\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (-\lambda)(1-\lambda) - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$$

Mamy dwa różne pierwiastki 2 i -1, daje nam to układ równań

$$\begin{cases} e^{2t} = 2\alpha + \beta \\ e^{-t} = -\alpha + \beta \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t}) \\ \beta = \frac{1}{3}(e^{2t} + 2e^{-t}) \end{cases}$$

Daje nam to

$$\exp\left(t\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right) = \alpha A + \beta\mathbb{1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}e^{2t}+2e^{-t} & 2e^{2t}-2e^{-t}\\ e^{2t}-e^{-t} & 2e^{2t}+e^{-t}\end{pmatrix}$$

b)

$$\omega_B(\lambda) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 3-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = (\lambda-2)^2$$

Daje to równanie

$$\exp(tz) = f(z)(z-2)^2 + \alpha z + \beta$$

Mamy jeden pierwiastek o krotności dwa, naszym drugim równaniem będzie równanie uzyskane po zadziałaniu pochodną i wstawieniu 2

$$\begin{cases} e^{2t} = 2\alpha + \beta \\ te^{2t} = \alpha \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = te^{2t} \\ \beta = e^{2t}(1-2t) \end{cases}$$

$$\exp\left(t\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\right) = \alpha B + \beta\mathbb{1} = e^{2t}\begin{pmatrix}1-t & -t\\ t & 1+t\end{pmatrix}$$

c)

$$\omega_C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

Mamy dwa różne pierwiastki 1 i 3, daje nam to układ równań

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{6}1\right) = \alpha + \beta \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}3\right) = 3\alpha + \beta \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \alpha C + \beta \mathbb{1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$\omega_D(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Mamy dwa różne pierwiastki 1 i -1, daje nam to układ równań

$$\begin{cases} \varphi(1) = \frac{1}{(n-1)!} = \alpha + \beta \\ \varphi(-1) = \frac{2}{(n+1)!} = -\alpha + \beta \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{2}{(n+1)!}\right) = \frac{n^2+n-2}{2(n+1)!} \\ \beta = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(n+1)!} + \frac{1}{(n-1)!}\right) = \frac{n^2+n+2}{2(n+1)!} \end{cases}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\right) = \alpha D + \beta \mathbb{1} = \frac{1}{2(n+1)!}\begin{pmatrix} 4n^2+4n-4 & 4(n^2+n-2) \\ -2(n^2+n-2) & -2n^2-2n+8 \end{pmatrix}$$