Postnewtonowskie poprawki relatywistyczne i fale grawitacyjne

Raport z projektu zrealizowanego w ramach przedmiotu "Zespołowe projekty studenckie 2" pod opieką doktora Tomasza Tarkowskiego

Franciszek Jan Drągowski, Paweł Sajdak

wrzesień 2026

Streszczenie

W projekcie symulowano ruch podwójnego układu pulsara Hulse'a-Taylora (PSR B1913 +16) poprzez numeryczne całkowanie równania ruchu układu, które uwzględniało poprawki postnewtonowskie, wynikające z przewidywań ogólnej teorii względności. Poprawki rozważono włącznie do rzędu 5/2PN, będącego pierwszym rzędem wprowadzającym efekty dyssypacji energii układu poprzez emisję fal grawitacyjnych. Analizowano wyniki symulacji wykorzystujących dwa różne algorytmy numerycznego całkowania ruchu: metody RK4 oraz DP5(4). W obydwu przypadkach, z upływem czasu zaobserwowano zanik względnej separacji obiektów układu, który jest spodziewanym efektem uwzględnienia emisji fal grawitacyjnych. Na podstawie otrzymanych wyników, wyznaczono odpowiadające im tempo zaniku okresu orbitalnego układu pulsara, a otrzymane wartości stanowiły, w zależności od metody symulacji, około 61,7-62,5% literaturowego tempa zaniku przewidzianego teoretycznie.

Słowa kluczowe: fale grawitacyjne, przybliżenie postnewtonowskie, pulsar Hulse'a–Taylora, metody numeryczne, RK4, DP5(4).

Copyright (c) 2026 Franciszek Jan Drągowski, Paweł Sajdak. Udostępniono na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa – Na tych samych warunkach 4.0 Międzynarodowa. Pełna treść licencji dostępna jest pod adresem `https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/`.

1 Wstęp

1.1 Grawitacyjne równanie ruchu

Rozważmy układ dwóch nierotujących ciał o masach m_1 i m_2 umieszczonych w pustej przestrzeni. Klasyczne prawa Newtona i Keplera przewidują, że każde z tych ciał osobno krąży po swojej eliptycznej orbicie, w której ognisku znajduje się nieprzemieszczający się środek masy układu. Pojawiające się "zagadnienie dwóch ciał" jest zazwyczaj rozwiązywane poprzez

zapisanie równania ruchu dla wektora $\mathbf{x} = \mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}$, łączącego położenia pierwszego ($\mathbf{x}_1$) i drugiego ($\mathbf{x}_2$) ciała.
Prawo grawitacji Newtona przewiduje równanie ruchu:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{n}}, \tag{1}$$

gdzie $M = m_1 + m_2$, G to stała grawitacji, $\hat{\mathbf{n}}$ oznacza wersor w kierunku $\mathbf{x}$, natomiast r jest zmienną w czasie długością wektora $\mathbf{x}$, czyli odległością pomiędzy ciałami.

Wzór (1) nie uwzględnia jednak efektów opisanych przez ogólną teorię względności, rozwiniętą przez Alberta Einsteina na początku XX. wieku. Efekty te można, w przybliżony sposób, włączyć do analizy ruchu dwóch ciał poprzez wprowadzenie do równania (1) dodatkowych członów, zwanych "poprawkami post-newtonowskimi".

Przybliżenie post-newtonowskie ogólnej teorii względności opiera się na rozważaniu kolejnych poprawek o rosnącym rzędzie wielkości $\epsilon \sim (v/c)^2 \sim (GM/r)/c^2$, gdzie v jest wartością prędkości względnej dwóch ciał ($|\mathbf{v}| = |d\mathbf{x}/dt|$), a c to prędkość światła w próżni.
Równanie ruchu z poprawkami post-newtonowskimi do rzędu $5/2$ może być zapisane jako[1]:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{n}} \; &+ \frac{GM}{r^2}\left[\hat{\mathbf{n}}(A_{PN} + A_{2PN}) + \dot{r}\mathbf{v}(B_{PN} + B_{2PN})\right] + \\ &+ \frac{GM}{r^2}\cdot\frac{8GM\eta}{5r}\left[\dot{r}\hat{\mathbf{n}}\cdot A_{2.5PN} - \mathbf{v}\cdot B_{2.5PN}\right],\end{aligned} \tag{2}$$

gdzie $\eta = m_1 m_2/M^2$ [1].
Powyższy wzór zawiera poprawki danego rzędu rozdzielone na dwa elementy - jeden mnożony przez wersor $\hat{\mathbf{n}}$, a drugi mnożony przez wektor $\mathbf{v}$ - zawierające odpowiednio współczynniki A_{kPN} i B_{kPN}. Poprawki definiowane są dla całkowitych lub połówkowych rzędów ϵ, przy czym poprawki rzędów $1/2$ i $3/2$ nie występują (są równe zero).

Wartości współczynników występujących w równaniu (2) mogą być obliczone według następujących wzorów [1]:

$$\begin{aligned}
c^2 \times A_{PN} &= -(1+3\eta)v^2 + \frac{3}{2}\eta\dot{r}^2 + 2(2+\eta)\frac{GM}{r},\\
c^2 \times B_{PN} &= 2(2-\eta),\\
c^4 \times A_{2PN} &= -\eta(3-4\eta)v^4 + \frac{1}{2}\eta(13-4\eta)v^2\frac{GM}{r} + \frac{3}{2}\eta(3-4\eta)v^2\dot{r}^2 + \\
&\quad + (2+25\eta+2\eta^2)\dot{r}^2\frac{GM}{r} - \frac{15}{8}\eta(1-3\eta)\dot{r}^4 - \frac{3}{4}(12+29\eta)\left(\frac{GM}{r}\right)^2,\\
c^4 \times B_{2PN} &= \frac{1}{2}\eta(15+4\eta)v^2 - \frac{3}{2}\eta(3-2\eta)\dot{r}^2 - \frac{1}{2}(4+41\eta+8\eta^2)\frac{GM}{r},\\
c^5 \times A_{2.5PN} &= 3v^2 + \frac{17}{3}\frac{GM}{r},\\
c^5 \times B_{2.5PN} &= v^2 + 3\frac{GM}{r}.
\end{aligned}$$

[1]Kropka nad zmienną oznacza tu, standardowo, pochodną po czasie

Newtonowskie równanie (1) opisuje układ, w którym zarówno całkowita energia, jak i moment pędu są ściśle zachowane w czasie. Dodanie poprawek post-newtonowskich pierwszego oraz drugiego rzędu nie narusza tego stanu rzeczy [2]. Sytuacja zmienia się jednak, gdy uwzględniona zostaje poprawka rzędu 5/2, która, jako pierwsza, włącza do rozważań emisję fal grawitacyjnych przez orbitujący układ dwóch ciał. Poprawka rzędu 5/2 jest pierwszym z członów "dyssypacyjnych", które to uwzględniają unoszenie energii oraz momentu pędu układu przez emitowane fale grawitacyjne.

1.2 Układ pulsara Hulse'a–Taylora PSR B1913+16

Pulsar PSR B1913+16 jest pierwszym odkrytym pulsarem wchodzącym w skład tak zwanego *układu gwiazdy podwójnej* (ang. *binary star system*). Został on odkryty w 1974 roku przez Russella Alana Hulse'a i Josepha Hootona Taylora Juniora [3], od których nazwisk pochodzi alternatywna nazwa pulsara. Periodyczne zmiany tempa obserwowanych pulsacji wskazały na to, że pulsar ten krąży w układzie podwójnym z innym obiektem, który okazał się być drugą gwiazdą neutronową (ale nie pulsarem). Ze względu na możliwość obserwacji impulsów promieniowania wysyłanego przez pulsar (w szczególności częstotliwości odbierania sygnałów), omawiany układ podwójny stał się znakomitym obiektem do eksperymentalnego testowania efektów ogólnej teorii względności przewidywanych dla układu dwóch krążących masywnych obiektów.

Jednym ze skutków emisji fal grawitacyjnych jest tracenie energii przez układ. W układzie podwójnym objawia się to między innymi przez postępujący "zanik orbity". W efekcie, gwiazdy podczas największego zbliżenia (tj. periastronu) znajdują się coraz bliżej siebie, a odstępy pomiędzy kolejnymi czasami znalezienia się gwiazd w periastronie maleją na skutek zmniejszającego się okresu orbity. Wieloletnie obserwacje pulsara Hulse'a-Taylora pozwoliły na stwierdzenie doskonałej zgodności obserwowanego tempa zaniku orbity z przewidywaniami ogólnej teorii względności, co stanowi jeden z eksperymentalnych dowodów istnienia fal grawitacyjnych oraz prawdziwości samej teorii [4].

W symulacji wykorzystano następujące fizyczne parametry układu:

- masa pulsara (m_1): 1,4414 $M_\odot$,
- masa towarzyszącego obiektu (m_2): 1,3867 $M_\odot$,
- początkowa odległość w periastronie (r_0): 746600 km,
- początkowa prędkość względna (v_0): 901,6 km/s,

gdzie $M_\odot$ jest standardowym astronomicznym symbolem oznaczającym masę Słońca.
Masy obiektów zaczerpnięto bezpośrednio z Artykułu [4]. Wartości r_0 i v_0 można otrzymać wykorzystując wartości mimośrodu orbity oraz okresu orbitalnego układu, równe odpowiednio $e \approx 0{,}62$ oraz $P_b \approx 0{,}323$ dnia [4].[2]

[2] Z trzeciego Prawa Keplera: $a^3/P_b^2 = G(m_1 + m_2)/(4\pi^2)$, gdzie a jest półosią wielką względnej orbity. Odległość w periastronie jest równa: $r = a(1 - e)$. Względna prędkość w periastronie może być obliczona za pomocą równania *vis-viva*: $v^2 = G(m_1 + m_2)(2/r - 1/a)$.

$M_\odot$ skraca się w obliczeniach dzięki wykorzystaniu wartości stałej grawitacji:
$G = 1{,}327 \times 10^{11}\ \mathrm{km}^3/(M_\odot \cdot \mathrm{s}^2)$.

2 Metody numeryczne użyte w symulacji

Istotą projektu było przygotowanie oraz przeprowadzenie symulacji ewolucji układu pulsara Hulse'a-Taylora, aby zbadać spodziewany zanik orbity na skutek emisji fal grawitacyjnych. W symulacji obliczano kolejne współrzędne wektora względnego położenia gwiazd, łączącego obydwa składniki układu podwójnego ($\mathbf{x}$). Względne przyspieszenie układu obliczano według grawitacyjnego równania ruchu z poprawkami post-newtonowskimi do rzędu $5/2$, zgodnie ze wzorem (2).

Symulację przeprowadzono za pomocą dwóch różnych programów napisanych w języku C++, przy wykorzystaniu dwóch algorytmów całkujących równianie ruchu: algorytmu Rungego-Kutty oraz algorytmu Dormanda-Prince'a.

2.1 Metoda Rungego-Kutty

Rozważmy ogólny przypadek, w którym rozważamy dwie zmienne: niezależną x oraz zależną od niej $y(x)$. Zmiana y względem x opisywana jest równaniem różniczkowym:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{3}$$

gdzie znana jest postać funkcji f.

Znając wartości x_n oraz $y_n = y(x_n)$, wartość y dla kolejnej wartości x oddzielonej o krok h można obliczyć wykorzystując metodę **Rungego-Kutty 4. rzędu**. W tym celu należy obliczyć wartości funkcji f dla odpowiednich argumentów, podanych poniżej:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n), \\
k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2}\right), \\
k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_2}{2}\right), \\
k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3).
\end{aligned}$$

Kolejną wartość y można wyznaczyć następnie jako:

$$y_{n+1} = y(x_{n+1}) = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

gdzie $x_{n+1} = x_n + h$.

Równanie ruchu (2) reprezentuje bardziej skomplikowany przypadek niż równanie (3). Występują tu zarówno $\mathbf{x}(t)$, jak i $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$. W projekcie wykorzystano zatem zmodyfikowaną wersję metody Rungego-Kutty, która każdy etap zastosowania metody stosuje równocześnie do $\mathbf{x}$ i $\mathbf{v}$. Wykorzystana metoda jest opisana następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{x1} &= \mathbf{v}_n, & \mathbf{k}_{v1} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n);\\
\mathbf{k}_{x2} &= \mathbf{v}_n + h\frac{\mathbf{k}_{v1}}{2}, & \mathbf{k}_{v2} &= \mathbf{a}\left(\mathbf{x}_n + h\frac{\mathbf{k}_{x1}}{2}, \mathbf{v}_n + h\frac{\mathbf{k}_{v1}}{2}\right);\\
\mathbf{k}_{x3} &= \mathbf{v}_n + h\frac{\mathbf{k}_{v2}}{2}, & \mathbf{k}_{v3} &= \mathbf{a}\left(\mathbf{x}_n + h\frac{\mathbf{k}_{x2}}{2}, \mathbf{v}_n + h\frac{\mathbf{k}_{v2}}{2}\right);\\
\mathbf{k}_{x4} &= \mathbf{v}_n + h\mathbf{k}_{v3}, & \mathbf{k}_{v4} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}_n + h\mathbf{k}_{x3}, \mathbf{v}_n + h\mathbf{k}_{v3});\\
\mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_{x1} + 2\mathbf{k}_{x2} + 2\mathbf{k}_{x3} + \mathbf{k}_{x4}), & \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_{v1} + 2\mathbf{k}_{v2} + 2\mathbf{k}_{v3} + \mathbf{k}_{v4});
\end{aligned}$$

gdzie h jest krokiem czasowym, a wielkości $\mathbf{k}$ są wektorami.

2.2 Metoda Dormanda-Prince'a

Metoda Dormanda-Prince'a (wariant DP5(4)) należy do rodziny osadzonych (ang. *embedded*) metod Rungego-Kutty. W jednym kroku czasowym wykonuje ona siedem ewaluacji funkcji. Wykorzystuje przy tym właściwość FSAL (*First Same As Last*), co oznacza, że ostatnia ewaluacja z danego kroku jest jednocześnie pierwszą ewaluacją w kroku następnym. Pozwala to na równoczesne wyznaczenie przybliżenia rozwiązania rzędu piątego oraz rzędu czwartego przy optymalizacji kosztów obliczeniowych.

Podobnie jak w metodzie RK4, dla układu równań ruchu konieczne jest wyznaczenie wektorów pomocniczych (etapów) dla położenia i prędkości. Aby zachować spójność notacyjną, kolejne etapy $\mathbf{k}_{xi}$ oraz $\mathbf{k}_{vi}$ dla $i = 1, 2, \ldots, 7$ przyjmują postać:

$$\mathbf{k}_{xi} = \mathbf{v}_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\mathbf{k}_{vj}, \tag{4}$$

$$\mathbf{k}_{vi} = \mathbf{a}\left(\mathbf{x}_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\mathbf{k}_{xj},\ \mathbf{v}_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\mathbf{k}_{vj}\right), \tag{5}$$

gdzie a_{ij} to współczynniki tablicy Butchera charakterystyczne dla metody DP5(4).

Na podstawie wyznaczonych etapów obliczane są nowe wartości położenia i prędkości w czasie t_{n+1}:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\sum_{i=1}^{7} b_i\mathbf{k}_{xi}, \tag{6}$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + h\sum_{i=1}^{7} b_i\mathbf{k}_{vi}, \tag{7}$$

gdzie b_i to wagi dla przybliżenia rzędu piątego.

Różnica między przybliżeniem rzędu piątego (b_i) i czwartego (b_i^*) służy do wyznaczenia wartości lokalnego błędu numerycznego (estymatora błędu):

$$\mathbf{err} = \left\| h \sum_{i=1}^{7} (b_i - b_i^*) \mathbf{k}_{xi} \right\|. \tag{8}$$

Znając wielkość błędu lokalnego, algorytm w sposób adaptacyjny dobiera krok czasowy. Przyjmując zadaną tolerancję błędu τ, wielkość kroku czasowego h w następnej iteracji jest aktualizowana zgodnie ze wzorem:

$$h_{\text{nowy}} = S \cdot h \cdot \left(\frac{\tau}{\mathbf{err}} \right)^{1/5}, \tag{9}$$

gdzie S (często przyjmujące wartość ok. 0,9) jest współczynnikiem bezpieczeństwa zapobiegającym zbyt agresywnym zmianom kroku i minimalizującym ryzyko konieczności powtarzania odrzuconych kroków.

3 Analiza wyników symulacji

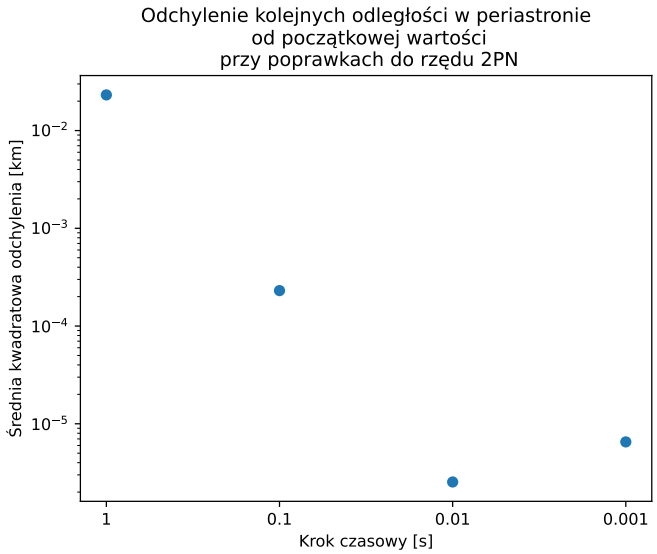
3.1 Program I - Metoda Rungego-Kutty 4. rzędu

Za pomocą programu przeprowadzono symulację względnego ruchu składników układu pulsara Hulse'a-Taylora. Przy całkowitym rozważanym czasie równym 10^9 s ($\sim$ 31,7 lat) symulację przeprowadzono dla trzech stałych kroków czasowych: 1 s, 0,1 s oraz 0,01 s. Dodatkowo, dla całkowitego czasu 10^7 s przeprowadzono symulację z jeszcze mniejszym krokiem czasowym wynoszącym 0,001 s. Przy danej konfiguracji, równanie ruchu obliczano do rzędu 2. lub 2,5. poprawek post-newtonowskich (PN). Plikiem wyjściowym programu symulacyjnego był plik tekstowy z zapisanym wartościami czasu t oraz odległości r dla minimów oraz maksimów względnego dystansu między obiektami układu (r).

Analizę wyników symulacji rozpoczęto poprzez zbadanie wpływu wywieranego na nie przez wybór danego kroku czasowego. W tym celu skorzystano z faktu, że przy uwzględnianiu poprawek post-newtonowskich tylko do rzędu 2 układ nie traci energii, a tym samym nie zmieniają się parametry względnej orbity, w tym odległość (r_p) między obiektami w periastronie (zob. koniec Sekcji 1.1). Za miarę dokładności symulacji przyjęto średnią kwadratową z odchyleń otrzymywanych wartości r_p od początkowej wartości separacji, przy uwzględnianiu poprawek do rzędu 2PN. Przy idealnej symulacji odchylenia te powinny być zerowe. Skończona wielkość kroku czasowego wpływa jednak na zmniejszanie symulowanych r_p, między innymi z powodu "przeskakiwania" dokładnej chwili czasu periastronu.

Na Rysunku 1 przedstawiono, w skali logarytmicznej, średnią kwadratową odchyleń obliczoną dla różnych kroków czasowych w symulacji do rzędu 2PN. W każdym z przypadków wzięto pod uwagę ten sam symulowany okres czasu[3] wynoszący 10^7 s. Na rysunku można

[3] W przypadku symulacji z dłuższym czasem wybrano tutaj tylko pierwsze 10^7 s



Rysunek 1: Porównanie średnich kwadratowych odchyleń separacji w periastronie $(r_p - r_0)$ otrzymanych w symulacji z poprawkami do rzędu 2PN przy różnych wartościach kroku czasowego. Całkowity czas analizowany w symulacji wynosi 10^7 s.

zaobserwować, że średnie odchylenie znacząco spada przy zmianie kroku czasowego z 1 s na 0,1 s. Spadek jest widoczny także przy przejściu z 0,1 s na 0,01 s. Średnie odchylenie zaczyna jednak nieznacznie wzrastać przy zmianie kroku czasowego z 0,01 s na 0,001 s, co może wskazywać na to, że dla jeszcze mniejszych kroków czasowych oscyluje ono wokół wartości uzyskanych przy krokach 0,01 s i 0,001 s. Biorąc pod uwagę powyższe spostrzeżenia, stwierdzono, że zmniejszenie kroku czasowego poniżej 0,01 s prawdopodobnie nie przyniosłoby większej poprawy dokładności symulacji.

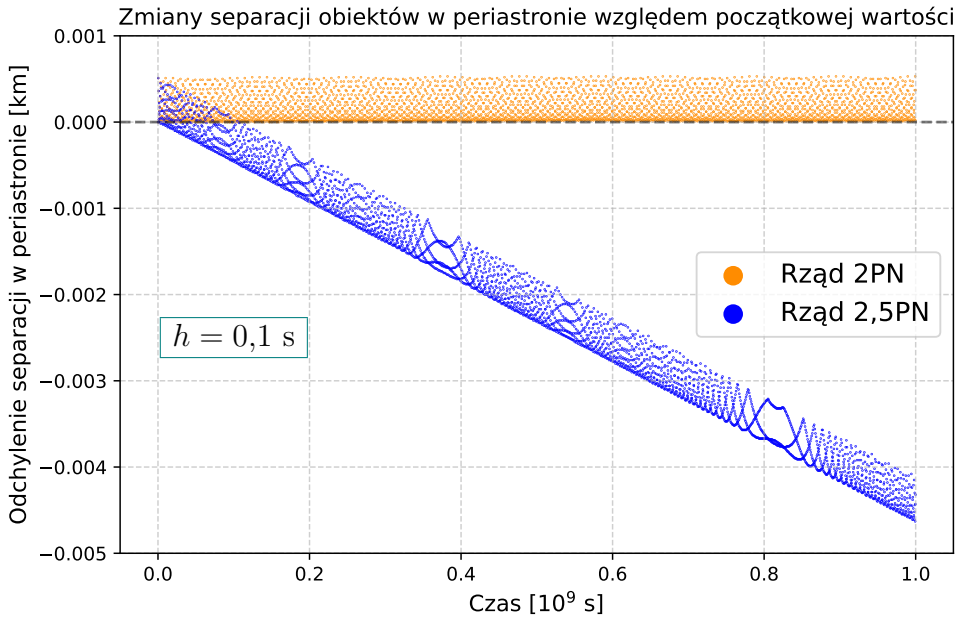
W pozostałej części tej sekcji, rozważane są już pełne wyniki symulacji wyłącznie dla kroków czasowych 0,1 s oraz 0,01 s.

Wielkością analizowaną w dalszej części jest różnica $(r_p - r_0)$ separacji w periastronie otrzymywanych dla kolejnych okrążeń orbity oraz wartości początkowej (r_0). Opisywaną wielkość $(r_p - r_0)$ nazywano również "odchyleniem separacji w periastronie".

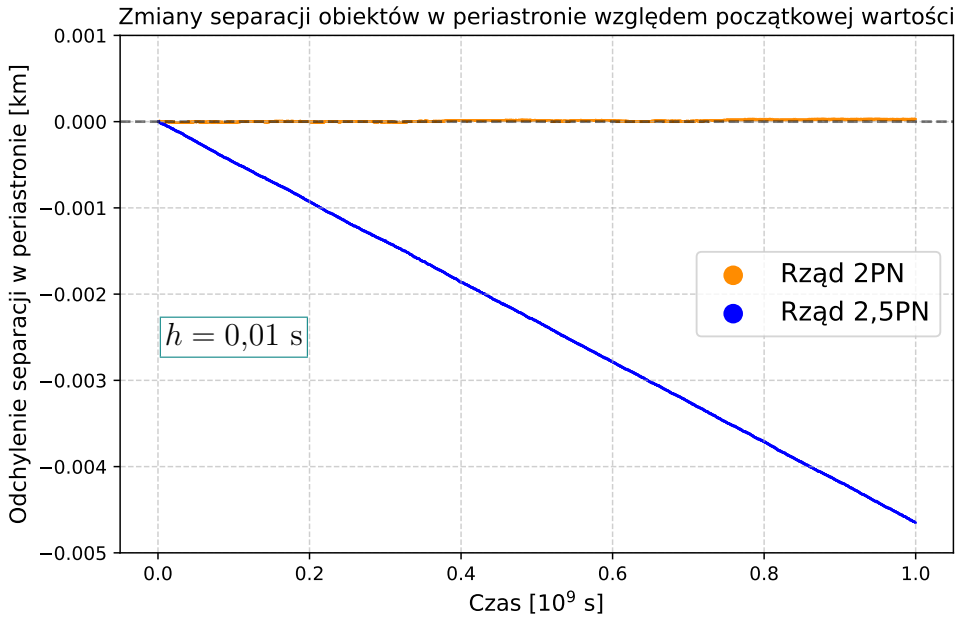
Na Rysunkach 2 i 3 przedstawiono zmianę odchylenia w czasie dla kroków czasowych równych kolejno 0,1 oraz 0,01 s. Na każdym z rysunków pokazano zmiany odchylenia dla symulacji uwzględniającej poprawki zarówno do rzędu 2PN, jak i 2,5PN.

Zgodnie z oczekiwaniami, w przypadku poprawek do rzędu 2PN nie jest obserwowana znacząca zmiana otrzymywanych odległości w periastronie (r_p). Zanik separacji jest natomiast wyraźnie widoczny w przypadku uwzględnienia poprawek post-newtonowskich do rzędu 2,5PN.

Innym interesującym spostrzeżeniem jest różnica pomiędzy wykresami dla dwóch różnych kroków czasowych. W przypadku większego kroku, 0,1 s (Rysunek 2), widoczny jest rozrzut punktów powyżej głównych lini wyznaczanych przez największe zagęszczenie punktów. Jest



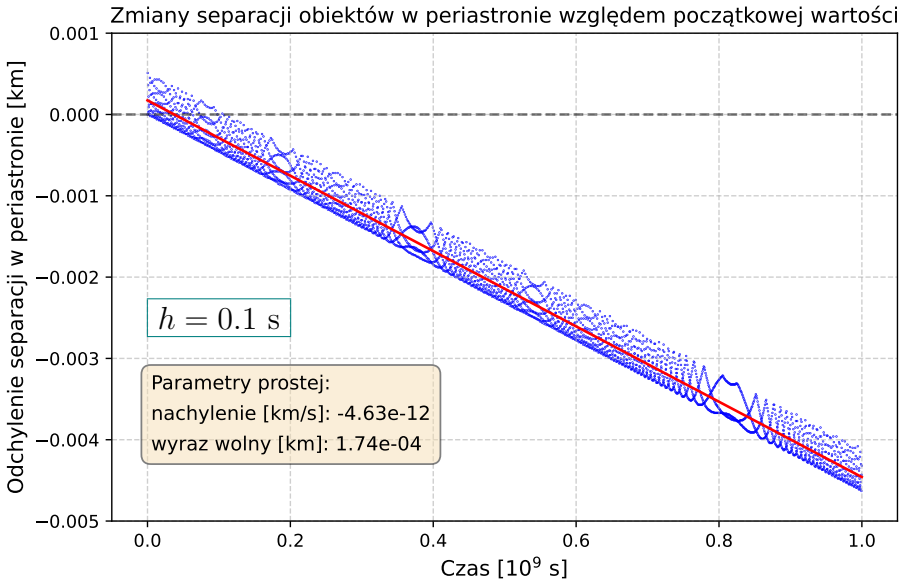
Rysunek 2: Odchylenia r_p od r_0 otrzymane dla symulacji z krokiem czasowym 0,1 s



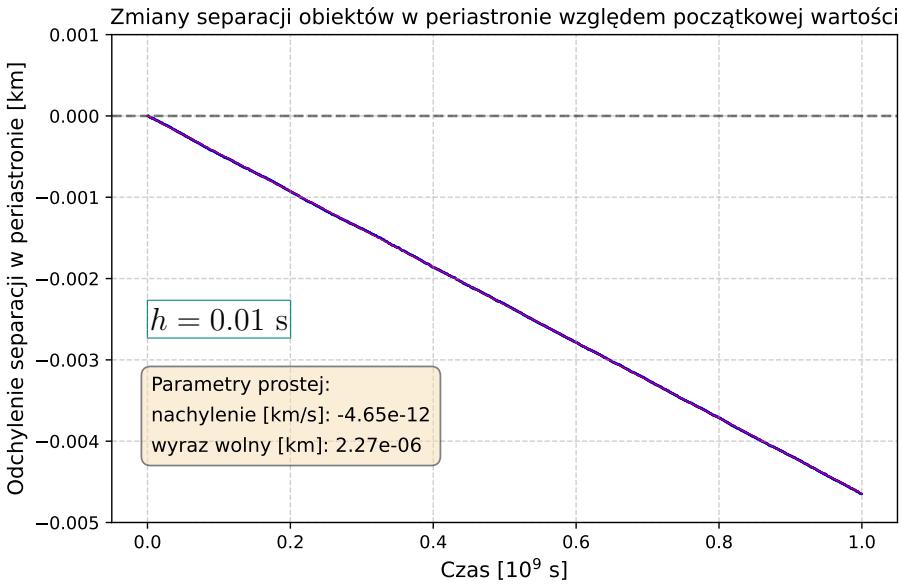
Rysunek 3: Odchylenia r_p od r_0 otrzymane dla symulacji z krokiem czasowym 0,01 s

to rezultat cyklicznego otrzymywania większych niż właściwa wartości r_p w skutek nieznacznego "przeskakiwania" przez symulację dokładnej chwili położenia w periastronie. Efekt ten jest dużo mniej widoczny w przypadku zastosowania mniejszego kroku czasowego, 0,01 s (Rysunek 3).

W celu wyznaczenia tempa zmian separacji w periastronie dopasowano prostą do danych odpowiadających poprawkom post-newtonowskim do rzędu 2,5PN, oddzielnie dla obydwu kroków czasowych. Wyniki dopasowania przedstawione zostały na Rysunkach 4 oraz 5. Otrzymane nachylenie prostej wyraża zmianę w czasie separacji w periastronie: $\dot{r}_p$.



Rysunek 4: Dopasowanie prostej do wyników symulacji do poprawek rzędu 2,5PN przy kroku czasowym 0,1 s, w celu wyznaczenia $\dot{r}_p$



Rysunek 5: Dopasowanie prostej do wyników symulacji do poprawek rzędu 2,5PN przy kroku czasowym 0,01 s, w celu wyznaczenia $\dot{r}_p$

Na podstawie otrzymanych wartości $\dot{r}_p$ obliczono tempo zaniku okresu orbitalnego, wykorzystując wzór (11) wyprowadzony w Suplemencie. Otrzymane wyniki to:

- $\dot{P}_b = -1{,}48\times10^{-12}$ s/s dla kroku czasowego $h = 0{,}1$ s,
- $\dot{P}_b = -1{,}49\times10^{-12}$ s/s dla kroku czasowego $h = 0{,}01$ s.

Tempo zaniku okresu orbitalnego wyznaczone na podstawie Pracy [5] przedstawione zostało w Artykule [4], gdzie podano przewidzianą wartość: $\dot{P}_b \approx -2{,}40 \times 10^{-12}$. Wartości $\dot{P}_b$ otrzymane w przedstawionej analizie wyników symulacji zgadzają się zatem co do rzędu wielkości z przewidywaną wartością, są jednak od niej około 1,6 razy mniejsze (wartości bezwzględne $\dot{P}_b$).

3.2 Program II – Metoda Dormanda-Prince'a DP5(4)

Drugi program symulacyjny oparto na osadzonej metodzie Rungego-Kutty rzędu 5(4) Dormanda-Prince'a (DP5(4)) z automatyczną, adaptacyjną kontrolą kroku czasowego. W odróżnieniu od stałokrokowej metody RK4, algorytm DP5(4) pozwala na ciągłe dopasowywanie kroku całkowania dt do dynamicznie zmieniających się warunków ruchu, gwarantując optymalny czas obliczeń przy zachowaniu żądanej dokładności numerycznej.

3.2.1 Zmienność kroku czasowego i geometria orbit

Na Rysunku 6 przedstawiono przebieg zmian kroku czasowego dt w funkcji czasu dla symulacji trwającej 10^9 s.

Zaobserwować można wyraźne oscylacje wartości dt w szerokim zakresie – od około 10^{-4} s do 10^3 s. Najmniejsze wartości kroku czasowego wymuszane są w okolicach periastronu, gdzie prędkości i przyspieszenia obiektów osiągają ekstrema, a zakrzywienie toru jest największe. W obszarach oddalonych od periastronu algorytm wydłuża krok całkowania, co pozwala znacznie ograniczyć łączną liczbę iteracji bez utraty precyzji w węzłowych punktach orbity.

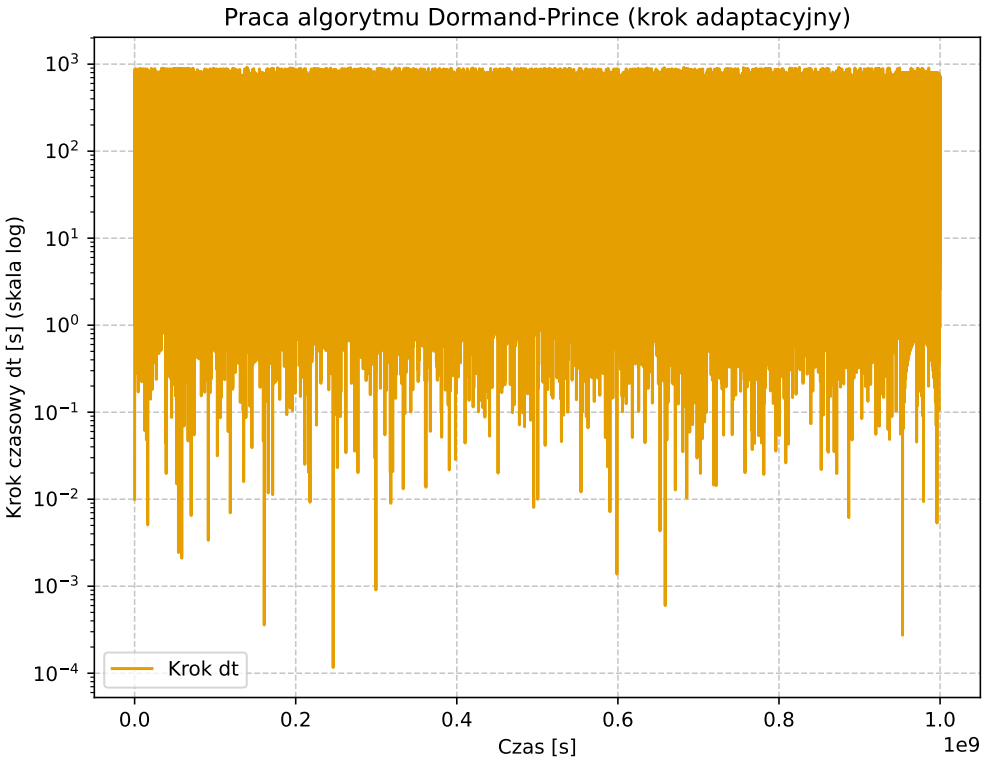
Na Rysunku 7 zaprezentowano geometrię wyznaczonego toru ruchu dla symulacji z poprawkami rzędu 2,5PN. Rysunek 7a przedstawia eliptyczną orbitę względną o silnym mimośrodzie ($e \approx 0{,}62$), natomiast Rysunek 7b ukazuje ruch obu pulsarów wokół ich wspólnego środka masy (barycentrum).

3.2.2 Precesja peryastronu

Włączenie zachowawczych poprawek postnewtonowskich 1PN oraz 2PN skutkuje obrotem elipsy orbitalnej w płaszczyźnie ruchu (zjawisko precesji peryastronu). Na Rysunku 8 pokazano zmianę położenia kątowego peryastronu w czasie dla pierwszych 10^7 s symulacji wyznaczoną metodą oknową.

Dopasowany trend liniowy wyznacza szybkość precesji peryastronu równą:

$$a = 4{,}77 \times 10^{-4}\ ''/\text{s}.$$



Rysunek 6: Zmiana kroku czasowego dt w czasie symulacji 10^9 s przy użyciu algorytmu Dormanda-Prince'a (skala logarytmiczna).

Przeliczając powyższą wartość na skalę roczną, uzyskujemy tempo precesji wynoszące około 4,18°/rok. Wynik ten wykazuje bardzo wysoką zgodność z wartością przewidywaną teoretycznie przez ogólną teorię względności dla układu Hulse'a-Taylora, wynoszącą ok. 4,22°/rok [4].

3.2.3 Zanik separacji w periastronie i tempo zmiany okresu orbitalnego

Uwzględnienie dyssypacyjnego członu 2,5PN prowadzi do stałej utraty energii układu na skutek emisji fal grawitacyjnych, co objawia się stopniowym zmniejszaniem odległości w periastronie. Na Rysunku 9 przedstawiono odchylenie separacji w periastronie $(r_p - r_0)$ w skali czasu 10^9 s ($\sim$ 31,7 lat).

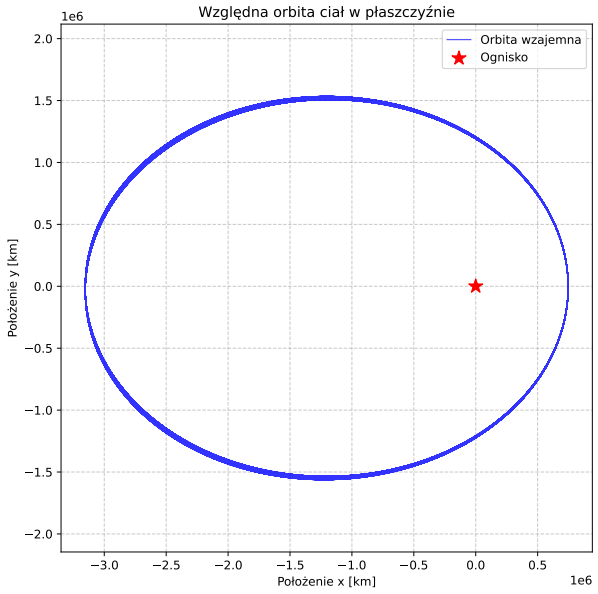
W wyniku dopasowania prostej metodą najmniejszych kwadratów uzyskano tempo spadku separacji w periastronie:

$$\dot{r}_p = -4{,}68 \times 10^{-12} \text{ km/s}.$$

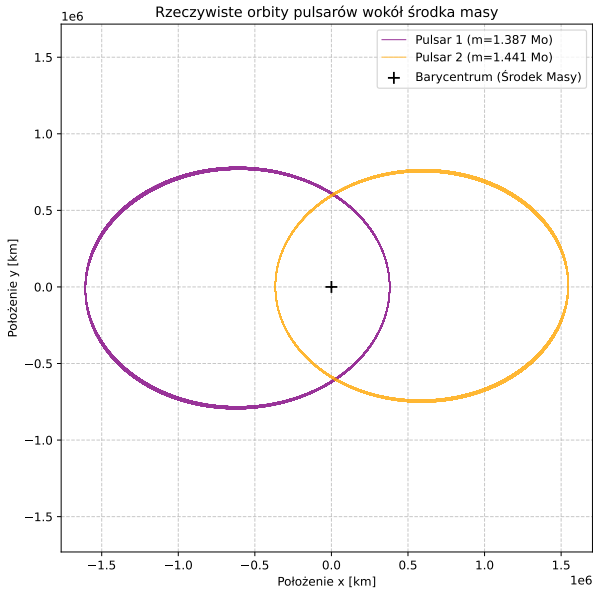
Wykorzystując wzór (11) z Suplementu, na podstawie wartości $\dot{r}_p$ wyznaczono tempo zaniku okresu orbitalnego układu:

$$\dot{P}_b = -1{,}50 \times 10^{-12} \text{ s/s}.$$

Otrzymana wartość $\dot{P}_b$ stanowi 62,5% wartości przewidywanej teoretycznie przez ogólną teorię względności ($\dot{P}_b \approx -2{,}40 \times 10^{-12}$ s/s [4]). Wynik ten jest wysoce spójny z rezultatami

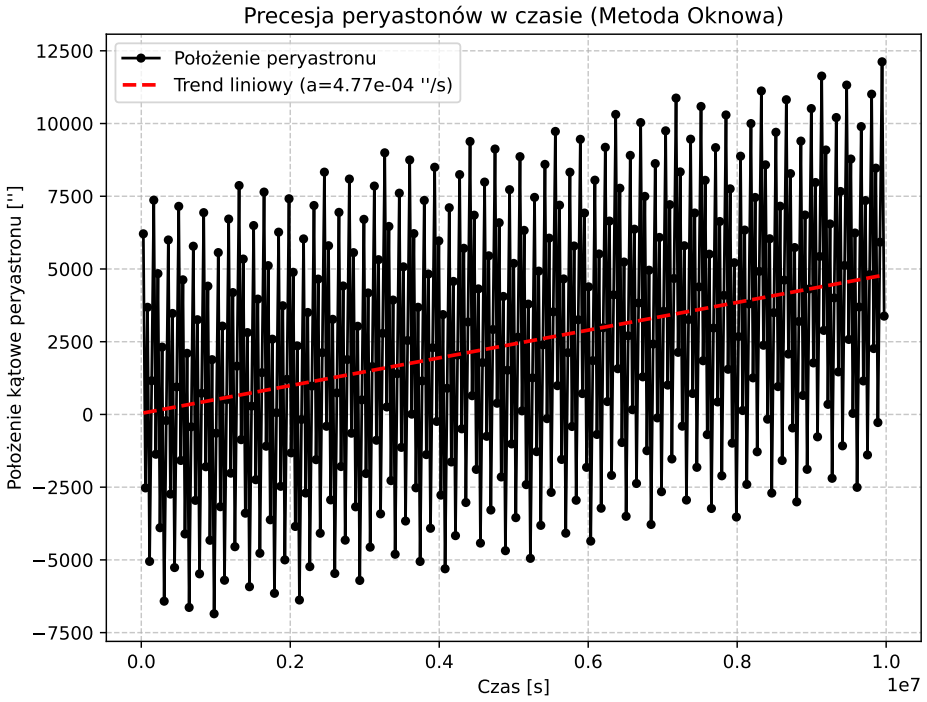


(a) Względna orbita w płaszczyźnie ruchu

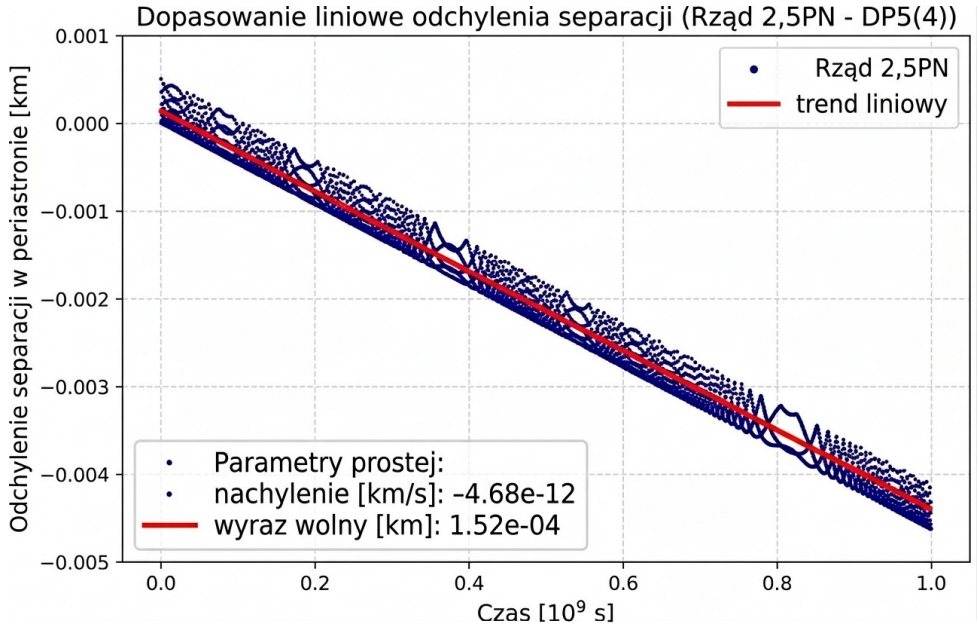


(b) Orbity pulsarów wokół środka masy

Rysunek 7: Geometria orbity układu podwójnego PSR B1913+16 uzyskana z symulacji z poprawkami 2,5PN dla czasu 10^7 s.



Rysunek 8: Zmiana położenia kątowego peryastronu w czasie w symulacji 2,5PN z naniesionym trendem liniowym.



Rysunek 9: Dopasowanie liniowe odchylenia separacji w periastronie dla symulacji do rzędu 2,5PN z użyciem algorytmu DP5(4).

uzyskanymi dla Programu I (gdzie w zależności od kroku czasowego uzyskano od ok. 61,7% do 62,1%), co potwierdza spójność numeryczną obu algorytmów całkowania.

4 Funkcjonowanie programów

4.1 Program I – Metoda RK4

Symulacja wykorzystuje klasę `Vector` do przechowywania dwuwymiarowych wektorów położenia `X` oraz prędkości względnej `V` (oznaczanych w tekście jako $\mathbf{x}$ i $\mathbf{v}$). Klasa ta definiuje podstawowe operatory arytmetyczne, metodę wyznaczania długości `Mag()` oraz iloczyn skalarny, co pozwala na zwięzłe wyrażenia algebraiczne w kodzie.

Funkcja `calcAcc(const Vector&, const Vector&)` oblicza wektor przyspieszenia $\mathbf{a}$, uwzględniając poprawki postnewtonowskie do rzędu 2,5PN (lub wyłączając człon 2,5PN, gdy flaga `to2PN` jest ustawiona). Obliczane są współczynniki $A_1, A_2, A_{2.5}$ oraz $B_1, B_2, B_{2.5}$ pochodzące z formalizmu Pati & Will [1], a następnie składniki wzdłuż wersora radialnego $\hat{\mathbf{n}}$ i prędkości $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{a} = C_n \hat{\mathbf{n}} + C_v \mathbf{v},$$

gdzie C_n i C_v są funkcjami odległości $r = \|\mathbf{x}\|$, prędkości $v = \|\mathbf{v}\|$ oraz prędkości radialnej $\dot{r} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}$.

Całkowanie wykonuje metoda `Proceed()`, która implementuje klasyczny schemat Rungego–Kutty czwartego rzędu. Najpierw wyznaczany jest wektor przyspieszenia $\mathbf{k}_{v1} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$; następnie punkty pośrednie:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x} + \tfrac{h}{2}\mathbf{v}, & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v} + \tfrac{h}{2}\mathbf{k}_{v1}, \\ \mathbf{x}_3 &= \mathbf{x} + \tfrac{h}{2}\mathbf{v}_2, & \mathbf{v}_3 &= \mathbf{v} + \tfrac{h}{2}\mathbf{k}_{v2}, \\ \mathbf{x}_4 &= \mathbf{x} + h\mathbf{v}_3, & \mathbf{v}_4 &= \mathbf{v} + h\mathbf{k}_{v3}, \end{aligned}$$

gdzie h oznacza stały krok czasowy `tStep`. W tych punktach obliczane są kolejne przyrosty przyspieszenia $\mathbf{k}_{v2,3,4} = \mathbf{a}(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)$. Po otrzymaniu wszystkich czterech etapów położenie i prędkość są aktualizowane wzorem:

$$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \tfrac{h}{6}(\mathbf{v} + 2\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4), \qquad \mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v} + \tfrac{h}{6}(\mathbf{k}_{v1} + 2\mathbf{k}_{v2} + 2\mathbf{k}_{v3} + \mathbf{k}_{v4}).$$

W pętli głównej programu (plik `main.cpp`) po każdym kroku sprawdzany jest znak zmiany odległości $r = \|\mathbf{x}\|$. Gdy odległość przestaje rosnąć (przejście przez apoastron), zapisywany jest czas poprzedniego kroku jako wartość dodatnia; gdy odległość zaczyna rosnąć ponownie (przejście przez peryastron), zapisywany jest czas jako liczba ujemna. Taki sposób pozwala wyodrębnić jedynie ekstremalne wartości r, ograniczając ilość danych wyjściowych do niezbędnych punktów orbity, jednocześnie zachowując informację o kolejności przejść przez apsydy.

4.2 Program II – Implementacja algorytmu DP5(4)

Symulacja wykorzystuje prostą strukturę danych do przechowywania stanu układu: wektor położenia `X` oraz wektor prędkości względnej `V` są obiektami klasy `Vector`, która przechowuje dwie współrzędne `x` i `y` (ruch rozpatrywany jest w płaszczyźnie orbity). Klasa `Vector` oferuje operatory arytmetyczne, metodę wyznaczania długości `Mag()`, iloczyn skalarny oraz funkcję drukującą składniki, co umożliwia zwięzłe i czytelne wyrażenia algebraiczne w kodzie.

Główna pętla integratora znajduje się w metodzie `Proceed()`. Jej pierwszym krokiem jest ustalenie pierwszego etapu `k1`: jeśli poprzedni krok został już zaakceptowany, wykorzystuje się właściwość FSAL – ostatnio obliczony etap `k7` przechowywany jest w składowej `kLast` i podawany jako `k1` bieżącego kroku (`hasKLast` wskazuje, czy taka wartość jest dostępna). Funkcja `dpStep(h, k1, Xn, Vn, errX, errV, kLastOut)` wykonuje pojedynczy próbny krok metody Dormanda–Prince'a 5(4) według tablicy Butchera zdefiniowanej w anonimowej przestrzeni nazw (współczynniki `b1`,…,`b6` dla rozwinięcia piątego rzędu oraz `e1`,…,`e7` dla estymatora błędu). Siedem etapów `k1`…`k7` jest obliczane poprzez kolejne kombinacje bieżącego położenia i prędkości z odpowiednimi współczynnikami czasowymi c_i. Po wyjściu z `dpStep` otrzymujemy aproksymację stanu piątego rzędu (`Xn`, `Vn`) oraz wektor błędu będący różnicą między piątym a czwartym rzędem (`errX`, `errV`). Otrzymany etap `k7` zostuje zapisany do `kLastOut` i następnie przechowywany w polu klasy `kLast` jako pierwsze ogniwo następnego kroku (FSAL), co eliminuje jedną ewaluację funkcji przyspieszenia na krok.

Adaptacja kroku czasowego opiera się na porównaniu normy błędu lokalnego z zadaną tolerancją. Składniki błędu skalowane są indywidualnie dla pozycji i prędkości:

$$s_x = \texttt{absTol} + \texttt{relTol} \cdot \max(\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{x}_n\|), \qquad s_v = \texttt{absTol} + \texttt{relTol} \cdot \max(\|\mathbf{v}\|, \|\mathbf{v}_n\|),$$

a następnie obliczana jest uśredniona kwadratowa norma błędu:

$$\texttt{errNorm} = \sqrt{\frac{\|\texttt{errX}\|^2/s_x^2 + \|\texttt{errV}\|^2/s_v^2}{4}}.$$

Jeśli $\texttt{errNorm} \leq 1$, krok zostaje przyjęty; stan układu ulega aktualizacji, `kLast` otrzymuje wartość `k7`, a licznik kroków zaakceptowanych inkrementuje się. Nowy krok jest wtedy proporcjonalny do:

$$\texttt{factor} = \texttt{safety} \cdot \texttt{errNorm}^{-1/\texttt{pOrder}},$$

gdzie `safety` = 0,9, `pOrder` = 4 (rząd błędu), a wynik jest ograniczony do przedziału $[\texttt{minFactor}, \texttt{maxFactor}] = [0{,}1; 5{,}0]$ oraz do maksymalnego i minimalnego dopuszczalnego kroku (`tStepMax`, `tStepMin`). W przypadku odrzucenia kroku ($\texttt{errNorm} > 1$) krok zostaje zmniejszony przy użyciu tego samego wzoru (bez górnego ograniczenia) i próba zintegrowania kroku zostaje powtórzona.

Zastosowano również kilka optymalizacji wydajnościowych w celu zmniejszenia obciążenia obliczeniowego i operacji wejścia/wyjścia. W funkcji wyznaczającej przyspieszenie postnewtonowskie `calcAcc` unikano wywoływania kosztownej funkcji `std::pow` przy obliczaniu potęg całkowitych – zastąpiono ją wielokrotnym mnożeniem (np. `v*v`, `rDot*rDot*rDot*rDot`). Ponadto, aby ograniczyć ilość zapisywanych danych, program wykrywa momenty przejścia przez apsydy (peryastron i apoastron) poprzez monitorowanie zmiany znaku iloczynu skalarnego $r_{\text{dot}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$ (prędkości radialnej); zapis do pliku następuje tylko wtedy, gdy r_{dot} zmienia znak, co odpowiada ekstremum odległości. Dodatkowo w trybie próbkowania współrzędnych co stały interwał czasowy (`sampleInterval`) wyjście jest ograniczane do określonych chwil symulacji, co znacząco redukuje operacje I/O bez utraty informacji o kluczowych punktach orbity.

5 Podsumowanie

W ramach projektu zrealizowano symulację ruchu układu podwójnego PSR B1913+16 z uwzględnieniem relatywistycznych poprawek postnewtonowskich do rzędu 2,5PN.
Główne wnioski i osiągnięcia pracy obejmują:

- Obserwacja efektów dyssypacyjnych: Włączenie członu 2,5PN doprowadziło do sukcesywnego zmniejszania separacji ciał w periastronie, co stanowi bezpośredni skutek emisji fal grawitacyjnych przez układ.

- Wyznaczenie tempa zaniku okresu orbitalnego: Otrzymana z symulacji wartość $\dot{P}_b$ zachowuje właściwy rząd wielkości w porównaniu z przewidywaniami teoretycznymi ($2{,}40 \times 10^{-12}$ s/s).

- Porównanie algorytmów: Zastosowanie metody DP5(4) z adaptacją kroku i właściwością FSAL pozwoliło na znaczną optymalizację czasu obliczeń oraz lepszą kontrolę błędu w porównaniu ze stałokrokową metodą RK4.

Dostępność kodów źródłowych

Kody źródłowe programów symulacyjnych napisanych w języku C++ oraz skrypty przeznaczone do analizy danych i generowania wykresów zostały udostępnione w publicznych repozytoriach:

`https://github.com/pawelsajdak/zps2`
`https://github.com/fdragowski480677/pulsar_simulation`

Udział autorów

Franciszek Jan Drągowski:
- Symulacja wykorzystująca algorytm DP5(4): przygotowanie programu, przeprowadzenie symulacji oraz analiza wyników
- Raport: opis metody Dormanda-Prince'a, przedstawienie wyników programu II (wykorzystującego ten algorytm), funkcjonowanie programów, podsumowanie

Paweł Sajdak:
- Symulacja wykorzystująca algorytm RK4: przygotowanie programu, przeprowadzenie symulacji oraz analiza wyników
- Raport: streszczenie, wstęp, opis metody Rungego-Kutty, przedstawienie wyników programu I (wykorzystującego ten algorytm), wyprowadzenie wzoru (11) w Suplemencie

Bibliografia

[1] Pati, M. E., & Will, C. M. (2002). Post-Newtonian gravitational radiation and equations of motion via direct integration of the relaxed Einstein equations. II. Two-body equations of motion to second post-Newtonian order, and radiation reaction to 3.5 post-Newtonian order. *Physical Review D, 65*(10), 104008. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.104008

[2] Iyer, B. R., & Will, C. M. (1995). Post-Newtonian gravitational radiation reaction for two-body systems: Nonspinning bodies. *Physical Review D, 52*(12), 6882. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.6882

[3] Hulse, R. A., & Taylor, J. H. (1975). Discovery of a pulsar in a binary system. *The Astrophysical Journal, 195*, L51. https://doi.org/10.1086/181708

[4] Weisberg, J. M., & Taylor, J. H. (2004). Relativistic binary pulsar B1913+16: Thirty years of observations and analysis. *arXiv preprint*, astro-ph/0407149. https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/0407149

[5] Peters, P. C., & Mathews, J. (1963). Gravitational radiation from point masses in a Keplerian orbit. *Physical Review, 131*(1), 435. https://doi.org/10.1103/PhysRev.131.435

[6] Peters, P. C. (1964). Gravitational radiation and the motion of two point masses. *Physical Review, 136*(4B), B1224. https://doi.org/10.1103/PhysRev.136.B1224

Suplement

Obliczenie tempa spadku okresu orbitalnego ($\dot{P}_b$) na podstawie tempa spadku separacji w periastronie ($\dot{r}_p$)

Trzecie prawo Keplera, zróżniczkowane po czasie:

$$\begin{aligned} a^3 &= \frac{GM}{4\pi^2} P_b^2, \\ 3a^2\dot{a} &= \frac{GM}{4\pi^2} \cdot 2P_b\dot{P}_b, \\ 3a^3\dot{a} &= \frac{GM}{4\pi^2} \cdot 2P_b\dot{P}_b a, \\ 3P_b^2\dot{a} &= 2P_b\dot{P}_b a, \\ \dot{P}_b &= \frac{3}{2} P_b \left(\frac{\dot{a}}{a}\right), \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie a jest półosią wielką względnej orbity układu.
Korzystając ze standardowej zależności $r_p = a(1-e)$, wiążącej promień periastronu z półosią wielką oraz mimośrodem eliptycznej orbity względnej, dostajemy: $\dot{r}_p = \dot{a}(1-e) - a\dot{e}$. Ze wzorów na $\dot{a}$ i $\dot{e}$ zawartych w rozdziale 5. Pracy [6], otrzymujemy:

$$a\dot{e} = \dot{a} \cdot \left[\frac{\frac{304}{15}e + \frac{121}{15}e^3}{\frac{64}{5}\frac{\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right)}{1-e^2}} \right].$$

Po podstawieniu $\dot{a}$ z równania (10):

$$\dot{r}_p = \frac{2a\dot{P}_b}{3P_b} \cdot \left[1 - e - \frac{\frac{304}{15}e + \frac{121}{15}e^3}{\frac{64}{5}\frac{\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right)}{1-e^2}} \right].$$

Stąd, wyznaczając a z trzeciego prawa Keplera, dostajemy ostateczny wzór łączący $\dot{P}_b$ z $\dot{r}_p$:

$$\dot{P}_b = \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{4\pi^2 P_b}{GM}\right]^{1/3} \cdot \dot{r}_p \cdot \frac{\frac{64}{5}\frac{\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right)}{1-e^2}}{\frac{64}{5}\frac{\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right)}{1+e} - \frac{304}{15}e - \frac{121}{15}e^3}. \tag{11}$$