Wykład $\overline{\underline{XIV}}$

2021/22

Przeprowadzimy obecnie studium abstrakcyjnego systemu pierwiastkowego... Zacznijmy od elementarnego

Stw. 28. Niech (E_A, R_A), $A \in \{1,2\}$ będą systemami pierwiastkowymi. Wówczas $(E_1 \oplus E_2, R_1 \cup R_2)$, gdzie $R_A \equiv j_{R_A}(R_A)$, $j_{R_A} : R_A \hookrightarrow E_A$, jest systemem pierwiastkowym, zwanym SUMĄ PROSTĄ systemów pierwiastkowych (E_A, R_A).

suma prosta przestrzeni $\boxplus$!

czyli $\oplus \,\|\, \boxplus$

$r_1 \equiv (r_1, 0)$, $r_2 \equiv (0, r_2)$

D: Jako że $E_A = \langle R_A \rangle_{\mathbb{R}}$, przeto $\langle R_1 \cup R_2 \rangle_{\mathbb{R}} = E_1 \oplus E_2$, czyli (SP1) ✓.

(SP2) jest spełniony, gdyż R_A jest SP dla E_A.

Jeśli $\alpha, \beta \in R_A$, to $w_\alpha(\beta) \in R_A \subset R_1 \cup R_2$.

Jeśli natomiast $\alpha_A \in R_A$, to $w_{\alpha_1}(\alpha_2) = \alpha_2$ i $w_{\alpha_2}(\alpha_1) = \alpha_1$, bo $(\alpha_1 | \alpha_2) = 0$ w $E_1 \oplus E_2$.

W sumie mamy (SP3) ✓.

Prawdziwość (SP4) wynika z tożsamości

$$A^{E_1\oplus E_2}_{\alpha,\beta} = \begin{cases} A^{E_A}_{\alpha,\beta}\in\mathbb{Z} & \text{dla } \alpha,\beta\in R_A \\ 0 & \text{dla } \alpha\in R_1,\ \beta\in R_2 . \end{cases} \qquad \square$$

Uwagowe dla wyników klasyfikacyjnych:

Stw. 29. Niechaj $\alpha,\beta\in R$, przy czym $\beta\notin\langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}$, a nadto $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq \langle\beta|\beta\rangle$. Wówczas zachodzi dysjunkcja

$$\begin{aligned}
&(1)\ \langle\alpha|\beta\rangle = 0\\
\veebar\ &(2)\ \langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\beta|\beta\rangle \ \wedge\ \measuredangle(\alpha,\beta)\in\left\{\tfrac{\pi}{3},\tfrac{2\pi}{3}\right\}\\
\veebar\ &(3)\ \langle\alpha|\alpha\rangle = 2\langle\beta|\beta\rangle \ \wedge\ \measuredangle(\alpha,\beta)\in\left\{\tfrac{\pi}{4},\tfrac{3\pi}{4}\right\}\\
\veebar\ &(4)\ \langle\alpha|\alpha\rangle = 3\langle\beta|\beta\rangle \ \wedge\ \measuredangle(\alpha,\beta)\in\left\{\tfrac{\pi}{6},\tfrac{5\pi}{6}\right\}
\end{aligned}$$

D: Oznaczmy $n_1 := 2\frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle}$, $n_2 := 2\frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}$.

Wiemy, że $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Jest

wersory

$$n_1\cdot n_2 = 4\frac{\langle\alpha|\beta\rangle^2}{\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle} \equiv 4\langle\hat{\alpha}|\hat{\beta}\rangle^2 \equiv 4\cos^2\underset{\overset{\shortparallel}{\Theta}}{\sphericalangle(\alpha,\beta)}$$

oraz

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\langle\alpha|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle} \geq 1,$$ o ile $\langle\alpha|\beta\rangle \neq 0$ (założenie).

$\hookrightarrow$ p.p. $n_1 = 0 = n_2$

W takim razie $0 \leq \overset{\overset{\mathbb{Z}}{\downarrow}}{n_1\cdot n_2} \leq 4$, czyli $n_1\cdot n_2 \in \{0,1,2,3,4\}$.

Przy tym jeśli $n_1\cdot n_2 = 0$, to $\cos\Theta = 0$, czyli $\alpha \perp \beta$, a jeśli $n_1\cdot n_2 = 4$, to $\cos^2\Theta = 1$, czyli $\beta \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}$.

Rozważmy pozostałe przypadki :

(*) $n_1 \cdot n_2 = 1 \iff \cos^2\theta = \frac{1}{4} \iff \theta \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$,

ale $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, więc $(n_1, n_2) \in \{(1,1), (-1,-1)\}$.

$(n_1, n_2) = (1,1) \Rightarrow \langle\alpha|\beta\rangle > 0$, zatem $\theta = \frac{\pi}{3}$

$(n_1, n_2) = (-1,-1) \Rightarrow \langle\alpha|\beta\rangle < 0$, zatem $\theta = \frac{2\pi}{3}$

W obu przypadkach $\frac{n_2}{n_1} = 1$, czyli $\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\beta|\beta\rangle$.

(**) $n_1 \cdot n_2 = 2 \iff \cos^2\theta = \frac{1}{2} \iff \theta \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$, ale

$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ i $|n_2| \geq |n_1|$ (bo $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq \langle\beta|\beta\rangle$), zatem

$(n_1, n_2) \in \{(1,2), (-1,-2)\}$, przy czym

$(n_1,n_2)=(1,2) \implies \langle\alpha|\beta\rangle>0 \implies \theta=\frac{\pi}{4}$

$(n_1,n_2)=(-1,-2) \implies \langle\alpha|\beta\rangle<0 \implies \theta=\frac{3\pi}{4}$

W obu przypadkach $\frac{n_2}{n_1}=2 \iff \langle\alpha|\alpha\rangle=2\langle\beta|\beta\rangle$.

(***) Analogicznie jak w przypadku (**). $\square$

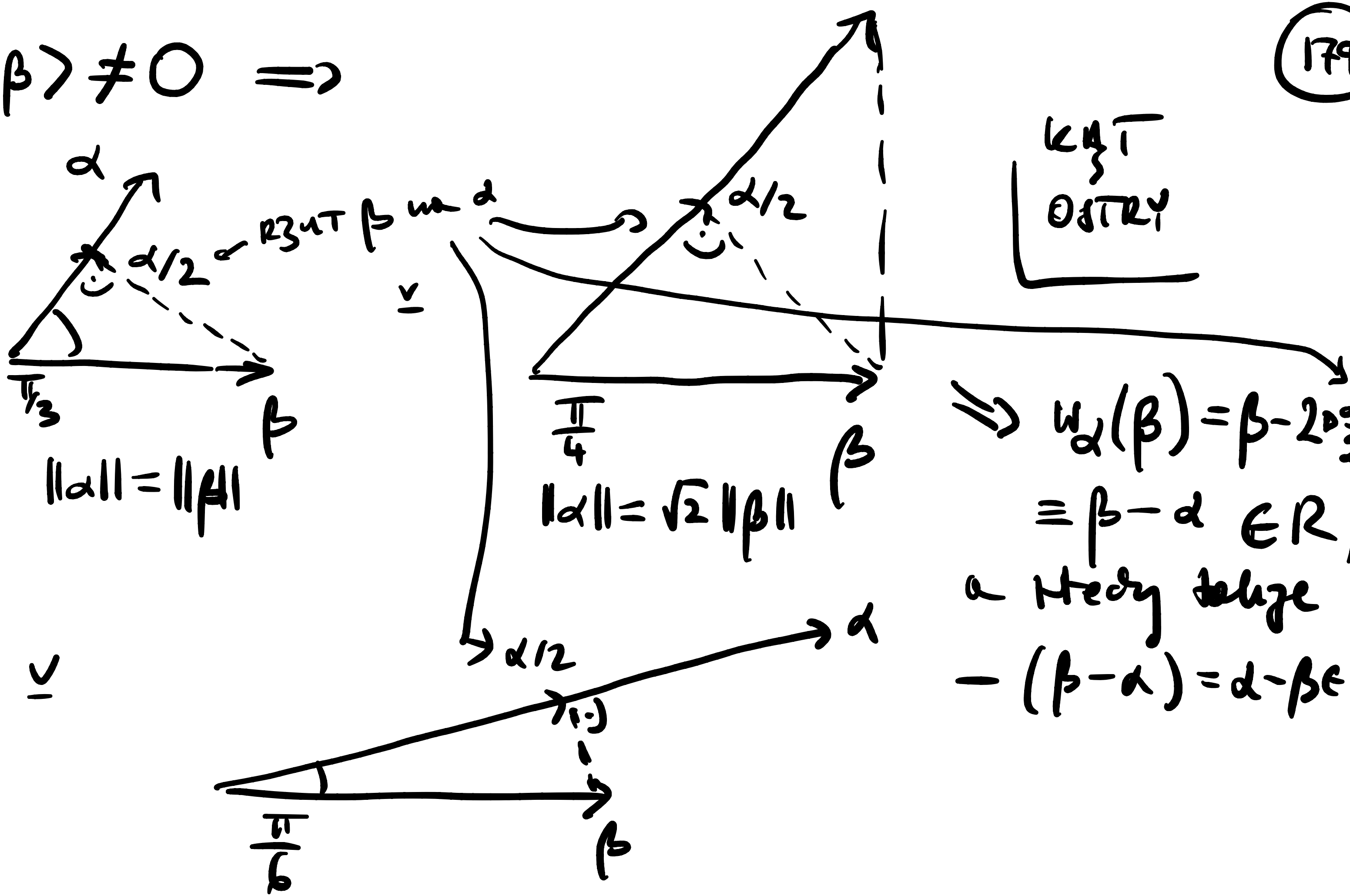
Corollarium: Niech $\alpha,\beta\in R$.

(i) $\sphericalangle(\alpha,\beta)\in\,]\frac{\pi}{2},\pi[$ (rozwarty) $\implies \alpha+\beta\in R$

(ii) $\sphericalangle(\alpha,\beta)\in\,]0,\frac{\pi}{2}[$ (ostry) $\implies \alpha-\beta,\ \beta-\alpha\in R$.

DC: Rozważamy po kolei możliwości (1)-(4) ze str. 29, zakładając $\langle\alpha|\alpha\rangle\geq\langle\beta|\beta\rangle$.

$\langle \alpha | \beta \rangle \neq 0 \implies$



KĄT
OSTRY

$\implies w_\alpha(\beta) = \beta - 2\cdot\frac{\alpha}{2}$

$= \beta - \alpha \in R,$

a stąd także

$-(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in R.$

Ilekroć $K(\alpha,\beta)$ rozważany, jest $K(-\alpha,\beta)$ jest ortog. (180)

i równy poprzedniemu wektorowi, przeto

$P^{\langle\alpha\rangle^{\perp}}_{\langle\alpha\rangle}(\beta) = -\frac{\alpha}{2}$, a stąd $w_\alpha(\beta) = \beta - 2\cdot\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \alpha+\beta \in R$.

□

↓ (POMINIĘTE!)

W naszych studiach systemów pierwiastkowych pod postacią algebr Liego natrafiliśmy na obiekty „dualne", tj. kopierwiastki. Te wpisuję w nasze obecne rozważania

Stw. 30 Niechaj (E,R) będzie systemem pierwiastkowym. Wówczas $(E,R^\vee)$, gdzie $R^\vee = \{\alpha^\vee = \frac{2}{\langle\alpha|\alpha\rangle}\triangleright\alpha \mid \alpha\in R\}$

także jest systemem pierwiastkowym, przy czym $W(E,R^\vee) = W(E,R)$ i $(R^\vee)^\vee = R$. System ten określamy mianem **DUALNEGO SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO**, a jego elementy nazywamy **KOPIERWIASTKAMI**.

D: obliczamy $\langle\alpha^\vee|\alpha^\vee\rangle = 4\,\frac{\langle\alpha|\alpha\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle^2} = \frac{4}{\langle\alpha|\alpha\rangle}$,

Zatem $(\alpha^\vee)^\vee \equiv \frac{2}{\langle\alpha^\vee|\alpha^\vee\rangle} \triangleright \alpha^\vee = \frac{\langle\alpha|\alpha\rangle}{2} \cdot \frac{2}{\langle\alpha|\alpha\rangle} \triangleright \alpha = \alpha$.

Ponadto $A_{\alpha^\vee,\beta^\vee} \equiv 2\,\frac{\langle\alpha^\vee|\beta^\vee\rangle}{\langle\alpha^\vee|\alpha^\vee\rangle} = \frac{\langle\alpha|\alpha\rangle}{2} \cdot \left\langle \frac{2}{\langle\alpha|\alpha\rangle} \triangleright \alpha \,\middle|\, \frac{2}{\langle\beta|\beta\rangle} \triangleright \beta \right\rangle$

$$= \frac{2\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle} \equiv A_{\beta|\alpha} \in \mathbb{Z}.$$

transpozycja w macierzy Cartana

Wobec $\alpha^\vee \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}$ mamy też $w_{\alpha^\vee} \equiv w_\alpha$, a przy tym

$$w_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) \equiv w_\alpha\left(\frac{2}{\langle\beta|\beta\rangle} \triangleright \beta\right) = \frac{2}{\langle\beta|\beta\rangle} \triangleright w_\alpha(\beta)$$

$$= \frac{2}{\langle w_\alpha(\beta)|w_\alpha(\beta)\rangle} \triangleright w_\alpha(\beta) \equiv w_\alpha(\beta)^\vee,$$

$w_\alpha \in O(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$

co ma sens, bo R jest zachowywana przez $W(E,R)$.

W takim razie $\forall w \in W(E,R^\vee) \equiv W(E,R)$:

$$w(R^\vee) \subset R^\vee .$$

Przy tym $\langle \alpha^\vee \mid \alpha^\vee \in R^\vee \rangle \equiv \langle \alpha \mid \alpha \in R \rangle = E$.

Wreszcie, jedyne krotności $\alpha^\vee$ to te, które pochodzą od krotności α, czyli

$$(\pm\alpha)^\vee = \pm\alpha^\vee . \qquad \square$$

N.B. $\forall \alpha, \beta \in R : \|\alpha\| = \|\beta\| \Rightarrow R^\vee \cong R$.

Izomorfizm taki może mieć miejsce
nawet gdy warunek jednakiej długości
pierwiastków nie jest spełniony (morfizmy nie muszą być izometriami)

Pojęcie porządkujące może — wyznaczanie wprowadza

Def. 23. Niechaj (E,R) będzie systemem pierwiastkowym. BAZA SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO to podzbiór $\Delta\subset R$ o własnościach:

(BSP1) Δ jest bazą E

rozkład jest jednoznaczny (BSP2) $R = \langle\Delta\rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}^{\setminus\{0\}} \cup \langle\Delta\rangle_{\mathbb{Z}_{\leq 0}}^{\setminus\{0\}}$

Pierwiastki $\alpha \in \underbrace{\langle\Delta\rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}\setminus\{0\}}_{\overset{\parallel}{R_+}}$ określamy mianem DODATNICH.

Pierwiastki $\alpha \in \underbrace{\langle\Delta\rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}\setminus\{0\}}_{\overset{\parallel}{R_-}}$ określamy mianem UJEMNYCH.

Elementy Δ nazywamy DODATNIMI PIERWIASTKAMI PROSTYMI.

W dalszej części wykładu zbadamy geometrię bazy...
owej E i R w relacji do Δ ...

Str. 31. $\forall \alpha, \beta \in \Delta : \left(\alpha \neq \beta \Rightarrow \langle \alpha | \beta \rangle \leq 0 \right).$

(czyli $\measuredangle(\alpha, \beta) \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$).

D: A.a. Niech $\langle \alpha | \beta \rangle > 0$, a wtedy $\measuredangle(\alpha, \beta) \in]0, \frac{\pi}{2}[$, więc na mocy Corollarium $\alpha - \beta$ i $\beta - \alpha \in R$. Jednoznaczny rozkład $\alpha - \beta$ w bazie Δ byłby jednak niezgodny z (BSP2). ↯ □

Następnie dowodzimy

Pomocniczo rozważymy...

Stw. 32. $\exists\, \Pi \subset E$, $\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} \Pi = 1 : \Pi \cap R = \emptyset$.

(86)

D: Niechaj $\alpha \in R$ i niech $\Pi_\alpha := \langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \equiv \mathrm{Ker}\langle \alpha | \cdot \rangle$

$(\dim_{\mathbb{R}} \Pi_\alpha = \dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\langle \alpha | \cdot \rangle \equiv \dim_{\mathbb{R}} E - 1)$.

$|R| < \infty \implies \exists\, h \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \Pi_\alpha$ (intuicja: $\langle e_1 \rangle_{\mathbb{R}} \cup \langle e_2 \rangle_{\mathbb{R}} \neq \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}}$ dla e_1, e_2 LNZ).

Niechaj teraz $\Pi_h = \langle h \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$, a wtedy $\alpha \in \Pi_h$ oznacza $h \in \Pi_\alpha$, co nie może zachodzić dla $\alpha \in R$. Π_h jest regularną hiperpłaszczyzną. $\square$

Możemy użyć poniższego w

Def. 24. Niech (E,R) będzie systemem pierwiastków i niech $\Pi \subset E$ jak w str. 32, a ponadto $R = R^{\Pi}_{+} \sqcup R^{\Pi}_{-}$, gdzie $R^{\Pi}_{\pm}$ jest zawarty w spójnej składowej $E^{\Pi}_{\pm}$ zbioru $E \setminus \Pi = E^{\Pi}_{+} \sqcup E^{\Pi}_{-}$. Pierwiastek $\alpha \in R^{\Pi}_{\pm}$ nazywamy ROZKŁADALNYM, jeżeli $\exists\, \beta, \gamma \in R^{\Pi}_{\pm} : \beta + \gamma = \alpha$. W przeciwnym razie mówimy, że α jest NIEROZKŁADALNY.

Mamy uleczone . . .

Tw. 11. Niechaj (E,R) będzie SP, a $\Pi \subset E$ jak w str. 32, R_+^Π zaś – jak w Def. 24. Wówczas zbiór nierozkładalnych elementów R_+^Π jest bazą R. I odwrotnie, dla dowolnej bazy $\Delta \subset R$ istnieje $\Pi_\Delta \subset E$: Δ jest podzbiorem nierozkładalnych elementów $R_+^{\Pi_\Delta}$ $\leftarrow$ („rowyjś” Π_Δ).

D: $|\Rightarrow|$ Niechaj $\Delta_\Pi \subset R_+^\Pi$ będzie zbiorem elementów nierozkładalnych. Wybierzmy $h_{x_0} \perp \Pi$, mamy

$$E_+^\Pi = \{v \in E \mid \langle h | v \rangle > 0\}.$$

Po pierwsze zauważmy, że (czyli: Δ_Π generuje R^Π_+ nad $\mathbb{N}$)

$$* \ \forall \alpha \in R^\Pi_+ \ \exists \{n_\delta\}_{\delta \in \Delta_\Pi} \subset \mathbb{N} : \ \alpha = \sum_{\delta \in \Delta_\Pi} n_\delta \cdot \delta .$$

Załóżmy przeciwnie i wybierzmy pośród elementów R^Π_+ – oznaczmy je $N\Delta_\Pi$ –, dla których nie istnieją takie rozkłady, takie $\alpha \in R^\Pi_+$, które ma minimalny rzut $\langle h | \alpha \rangle$. ($\exists$, bo $|R| < \infty$)

Oczywiście $\alpha \notin \Delta_\Pi$ (bo elementy Δ_Π mają takie (trywialne) rozkłady), przeto α jest rozkładalny, $\exists \beta_1, \beta_2 \in R^\Pi_+ : \alpha = \beta_1 + \beta_2$. Przy tym gdyby oba pierwiastki β_1 i β_2 były kombinacjami elementów Δ_Π ze współczynnikami z $\mathbb{N}$, tę samą własność miałby α.

W takim jednak razie jeden z nich, np. β_1, należy do $N\Delta_\Pi$. Ale

$$\underset{\overset{\vee}{0}}{\langle h|\alpha\rangle} = \underset{\overset{\vee}{0}}{\langle h|\beta_1\rangle} + \underset{\overset{\vee}{0}}{\langle h|\beta_2\rangle}$$

$$\Downarrow$$

$$\langle h|\beta_1\rangle < \langle h|\alpha\rangle$$ ↯

(uwaga α ma minimalny rząd na h!)

** Jeśli teraz $\alpha, \beta \in \Delta_\Pi$ i $\alpha \neq \beta$, to $\langle \alpha|\beta\rangle \leq 0$ (co nie jest oczywiste na obecnym etapie, bo nie pokazaliśmy, że Δ_Π jest bazą). Istotnie, gdyby było $\langle \alpha|\beta\rangle > 0$, to $\alpha-\beta$, $-(\alpha-\beta) \in R$, ale dokładnie! jeden z nich należy do R^{Π}_{+}. (191)

$\alpha-\beta\in R^{\Pi}_{+} \Rightarrow \alpha=(\alpha-\beta)+\beta$ — rozkładalny ↯

$\underline{\beta-\alpha\in R^{\Pi}_{+} \Rightarrow} \beta=(\beta-\alpha)+\alpha$ — — | — ↯

Ponadto zbiór Δ_{Π} jest LNZ. ***

Istotnie, niech $\sum_{\alpha\in\Delta_{\Pi}}\lambda_{\alpha}\triangleright\alpha=0$ przy czym zakładamy że $\exists\,\lambda_{\alpha}\neq 0$

$(\underset{\Delta^{1}_{\Pi}}{\Delta^{1}_{\Pi}}\cap\underset{\Delta^{2}_{\Pi}}{\Delta^{2}_{\Pi}}=\emptyset) \longrightarrow$ $\equiv \sum_{\alpha_1\in\Delta^{1}_{\Pi}}|\underset{\overset{\vee}{0}:\ \text{zał.}}{\lambda_{\alpha_1}}|\triangleright\alpha_1-\sum_{\alpha_2\in\Delta^{2}_{\Pi}}|\underset{\overset{\vee}{0}}{\lambda_{\alpha_2}}|\triangleright\alpha_2$

czyli $\underset{v}{\overset{\parallel}{\sum_{\alpha_1\in\Delta^{1}_{\Pi}}|\lambda_{\alpha_1}|\triangleright\alpha_1}}=\sum_{\alpha_2\in\Delta^{2}_{\Pi}}|\lambda_{\alpha_2}|\triangleright\alpha_2$, a wtedy

$$\langle v|v\rangle \equiv \Big\langle \sum_{\alpha_1\in\Delta^1_\Pi} |\lambda_{\alpha_1}|\triangleright\alpha_1 \,\Big|\, \sum_{\alpha_2\in\Delta^2_\Pi} |\lambda_{\alpha_2}|\triangleright\alpha_2 \Big\rangle$$

$$= \sum_{\alpha_1\in\Delta^1_\Pi}\ \sum_{\alpha_2\in\Delta^2_\Pi} |\lambda_{\alpha_1}|\cdot|\lambda_{\alpha_2}|\cdot\langle\alpha_1|\alpha_2\rangle \underset{**}{\leq} 0,$$ zatem

$v=0$, tj. $\sum_{\alpha_1\in\Delta^1_\Pi} |\lambda_{\alpha_1}|\triangleright\alpha_1 = 0 = \sum_{\alpha_2\in\Delta^2_\Pi} |\lambda_{\alpha_2}|\triangleright\alpha_2$,

wtedy jednak $0 = \Big\langle h \,\Big|\, \sum_{\alpha_1\in\Delta^1_\Pi} |\lambda_{\alpha_1}|\triangleright\alpha_1 \Big\rangle$

$= \sum_{\alpha_1\in\Delta^1_\Pi} |\lambda_{\alpha_1}|\cdot \underset{\overset{\vee}{0}}{\langle h|\alpha_1\rangle}$ (bo $\alpha_i\in R^\Pi_+$) daje

więc $|\lambda_{\alpha_1}|=0$ ↯ (wszystkie $\lambda_{\alpha_i}\neq 0$) ; analogicznie $|\lambda_{\alpha_2}|=0$. ↯

Skoro jednak $R^{\Pi}_{+} \subset \langle \Delta_{\Pi} \rangle_{\mathbb{N}}$, to także

$\alpha \mapsto -\alpha$ zachowuje R i zmienia znak rzutu $\langle \alpha | h \rangle \mapsto -\langle \alpha | h \rangle$

$R^{\Pi}_{-} \equiv -R^{\Pi}_{+} \subset \langle \Delta_{\Pi} \rangle_{-\mathbb{N}}$, a ponieważ

$E = \langle R \rangle_{\mathbb{R}}$, przeto $E = \langle \Delta_{\Pi} \rangle_{\mathbb{R}}$, co pokazuje, że Δ_{Π} jest bazą E. ■

$\boxed{\Leftarrow}$ Niechaj teraz $\Delta = \{\alpha_i\}_{i \in \overline{1,r}}$ będzie bazą R, czyli też bazą E. Ustalmy (dowolnie) liczby $\lambda_i > 0$, $i \in \overline{1,r}$ i odpowiadający im (jednozn.) element $\gamma \in E$: $\forall_{i \in \overline{1,r}} : \langle \gamma | \alpha_i \rangle = \lambda_i$.

Komentarz: Niech $\{\alpha_i\}_{i\in\overline{1,r}}$ baza V, $\{\lambda_i\}_{i\in\overline{1,r}} \subset \mathbb{K}$ (dow.)

Szukamy $\varphi \in V^*$: $\forall i \in \overline{1,r} : \varphi(\alpha_i) = \lambda_i$.

Jest $\varphi = \lambda_i \triangleright a^i$, gdzie $a^i(\alpha_j) = \delta^i{}_j$.

Niezwyrodnienie $\langle\cdot|\cdot\rangle$ pozwala przypisać φ jedyny wektor γ : $\varphi \equiv \langle\gamma|\cdot\rangle$.

Mając γ, stwierdzamy, że na $R_+ \equiv R \cap \langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}} \ni \alpha$ jest $\langle \gamma | \alpha \rangle > 0$, czyli $R_+ \subset E_+^{\Pi_\gamma}$, gdzie $\Pi_\gamma = \langle \gamma \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \subset E$.
(str. 187)

Niechaj teraz $\alpha \in \Delta^{c R_+}$ i założymy, że α rozkładalny na co najmniej dwa elementy R_+ (oczywiście ze współczynnikami z $\mathbb{N}^\times$). Oba elementy nie mogą być z $\langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}}$, bo $\langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}} \cap R = \{\pm \alpha\}$, zatem $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ i $\underset{(np.)}{\beta_1 \neq \alpha}$, czyli w rozkładzie bazowego! α występuje $\neq \alpha$ pierwiastek $\tilde{\alpha} \in \Delta$ (z $\neq 0$ współczynnikiem) — wszak β_1 rozkładalny w bazie Δ. verte

To jednak oznacza, że Δ nie jest LNZ. ↯

Każdy zatem $\alpha \in \Delta$ jest nierozkładalny.

W takim razie na mocy udowodnionej części $\boxed{\Rightarrow}$ twierdzenia $\Delta \subset \Delta_{\Pi_\gamma}$. Ale Δ_{Π_γ} jest bazą E, zatem $|\Delta_{\Pi_\gamma}| = \dim_{\mathbb{R}} E \equiv |\Delta|$, czyli $\Delta \equiv \Delta_{\Pi_\gamma}$. □

Gdyby było: $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ i składowa $\sim \alpha_i$ w β_1

znosiłaby się ze składową $\sim \alpha_i$ w β_2

(tym razem: α nie ma takiej składowej) ,

to jeden z β_1, β_2 byłby z R_- !
$= R \cap \langle \Delta \rangle_{-\mathbb{N}}$

Założyliśmy tymczasem, że oba $\in R_+$.

Zachodzi też

Str. 33. Niech Δ będzie bazą R. Wówczas $\{\alpha^\vee\}_{\alpha\in\Delta}$ jest bazą $R^\vee$.

D: Zaczniemy od

Lemat: Niech Δ będzie bazą R, a $R_+ \equiv R \cap \langle\Delta\rangle_{\mathbb{N}}$ - zbiorem pierwiastków dodatnich.

$$\forall_{\alpha\in\Delta} : \alpha \notin \langle R_+ \setminus \{\alpha\} \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}} .$$

DL: A.a. Ograniczymy dla wygody $\alpha_1 = \alpha$ i $\Delta\setminus\{\alpha\} = \{\alpha_j\}_{j\in\overline{2,r}}$

Przyjmijmy, że $\alpha_1 = \sum_{\beta\in R_+\setminus\{\alpha\}} \lambda_\beta \cdot \beta$, $\lambda_\beta \in \mathbb{R}$.

Skoro $R_+ \subset \langle\Delta\rangle_{\mathbb{N}}$, to dostajemy relację

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \triangleright \alpha_i \quad , \quad \mu_i \geq 0$$

Wobec liniowej niezależności $\{\alpha_i\}_{i\in\overline{1,r}}$ musi być $\mu_i = \delta_{i1}$, ale każdy $\beta \in \langle\Delta\rangle_{\underset{\geq 0}{\mathbb{N}}}$, w rozkładzie

zatem to implikuje $\forall \beta$ w rozkładzie : $\beta \in \langle\alpha_1\rangle_{\mathbb{R}}$, czyli $\forall \beta$ w rozkładzie : $\beta = \alpha_1$ (innych $\mathbb{R}$-krotności nie ma w R_+). ↯ (wszak $\beta \in R_+ \setminus \{\alpha_1\}$) ☒

Wracamy do dowodu twierdzenia...

Ustalmy $\Pi_\Delta \subset R$, $\operatorname{codim}_{\mathbb{R}} \Pi_\Delta = 1$ w relacji z Δ jako w Tw.-|| (str. 188)), oznaczając przy tym pole E_+

podzbiór E zawierający Δ, tj. R_+ są pierwiastkami dodatnimi wzgl. Δ.

Wtedy także $\{\alpha^\vee\}_{\alpha \in R_+} \subset E_+$ i $\{\beta^\vee\}_{\beta \in R_-} \subset E_-$.

Na mocy Tw. 11 : $\exists\, \Delta^\vee$ bazy $R^\vee$: $\overset{\text{to pierwiastki dodatnie wzgl. } \Delta^\vee}{R^\vee_+} \equiv \{\alpha^\vee\}_{\alpha \in R_+}$

Jeśli teraz $\alpha \in R_+ \setminus \Delta$, to $\alpha \in \bigoplus_{i=1}^{r} \langle \alpha_i \rangle_{\mathbb{N}}$, przy czym przynajmniej dwa współczynniki w jego rozkładzie w bazie $\neq 0$. Wówczas $\alpha^\vee \in \bigoplus_{i=1}^{r} \langle \alpha_i^\vee \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ i przynajmniej dwa współczynniki w jego rozkładzie są $\neq 0$. Ale

199

$\forall i \in \overline{1,r}: \; \alpha_i^\vee \in R_+^\vee \;\wedge\; \alpha_i^\vee \neq \alpha^\vee$ gdyż w p.p.

nie jest jednym z $\alpha_i^\vee$, a dał się rozpisać na nich (+)

byłoby $\underbrace{(\alpha^\vee)^\vee}_{\equiv \alpha} = (\alpha_i^\vee)^\vee \equiv \alpha_i$ (str. 181). Możemy

zatem przywołać tego Lematu,

nie jest bazą $\Delta^\vee$

by stwierdzić, że $\alpha^\vee \notin \Delta^\vee$. W takim

razie $\Delta^\vee \subset \{\alpha_i^\vee\}_{i \in \overline{1,r}}$, a ponieważ $\Delta^\vee$

jest bazą E, przeto $|\Delta^\vee| = |\Delta| = r$,

czyli $\Delta^\vee = \{\alpha_i^\vee\}_{i \in \overline{1,r}}$. $\square$

Dotychczasowe rozważania doprowadzają nas do

Def. 25. Niechaj (E,R) będzie systemem pierwiastkowym i niech $\Pi_\alpha = \mathrm{Ker}\,\langle\alpha|\cdot\rangle$, $\alpha\in R$. **(OTWARTA) KOMNATA WEYLA** systemu pierwiastkowego (E,R) to spójna składowa $E\setminus\bigcup_{\alpha\in R}\Pi_\alpha$. **(OTWARTA) FUNDAMENTALNA KOMNATA WEYLA** s.p. (E,R) wzgl. bazy $\Delta=\{\alpha_i\}_{i\in\overline{1,r}}$ to zbiór

$$\mathcal{C}(E,R;\Delta)=\left\{ v\in E \mid \forall_{i\in\overline{1,r}} : \langle\alpha_i|v\rangle>0\right\}.$$

Pokażemy, że $\mathfrak{C}$ jest komorą Weyla...

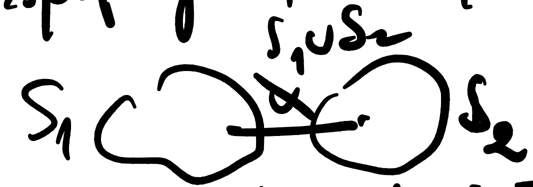
201

NB: $\forall\, v_1, v_2 \in \mathfrak{C}(E,R;\Delta)\ \forall\, t \in [0,1]$:

$$v := t \triangleright v_1 + (1-t) \triangleright v_2 \in \mathfrak{C}(E,R;\Delta)$$

W rzeczy samej $t, 1-t \geq 0$ i przynajmniej jedna z liczb $t, 1-t$ jest > 0, co jednak oznacza, że $\forall\, i \in \overline{1,r} : \langle \alpha_i | v \rangle > 0$, czyli $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ jest zbiorem wypukłym, więc też spójnym, a ponadto istnieje 1-forma φ na E :

verte 1°



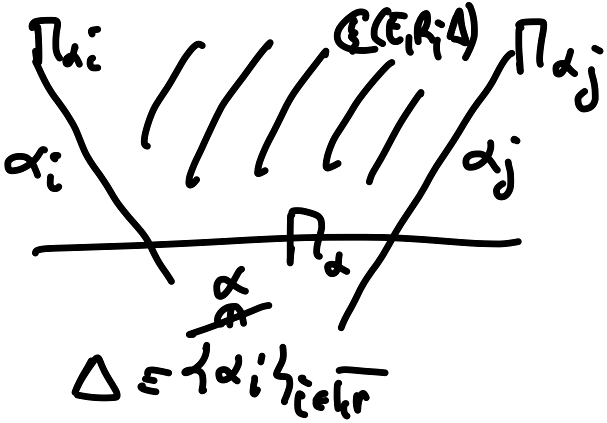
$\varphi(\alpha_i) = 1,\ i \in \overline{1,r}$, zatem istnieje wektor v : $\langle \alpha_i | v \rangle = 1,\ i \in \overline{1,r}$, czyli $\mathfrak{C}(E,R;\Delta) \neq \emptyset$. Wreszcie też

$\partial\mathfrak{C}(E,R;\Delta) = \{ v \in E \mid \exists\, i \in \overline{1,r} : \langle \alpha_i | v \rangle = 0 \}$, zatem $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ jest komorą Weyla

verte 2° verte 3°

1° Chcemy $\forall i \in \overline{1,r} : \varphi(e_i) = 1$. Bierzemy $\{\varphi^i\}^{i \in \overline{1,r}} : \varphi^i(e_j) = \delta^i_j$ i kładziemy $\varphi := \sum_{i=1}^{r} \varphi^i$.

2° Jedynie, nie może być



,

bo wtedy opuszczenie Σ przez Π_α nie wiązałoby się ze złamaniem żadnego z warunków $\langle \alpha_i | v \rangle > 0$, $i \in \overline{1,r}$!

3° Niech $v \in \mathfrak{C} \cap \Pi_\alpha$, $\alpha \in R$, czyli $\langle v|\alpha\rangle = 0$, ale $\underset{(i)}{\alpha \in \langle\Delta\rangle_{\mathbb{N}}} \veebar \underset{(ii)}{\alpha \in \langle\Delta\rangle_{-\mathbb{N}}}$

$(i) \Rightarrow \; 0 = \langle v|\alpha\rangle = \sum_i |n^i| \cdot \langle v|\alpha_i\rangle^{>0} \overset{!}{\Longrightarrow} \forall i : n_i = 0$ ↯

$(ii) \Rightarrow \; 0 = \langle v|\alpha\rangle = -\sum_i |n^i| \cdot \langle v|\alpha_i\rangle^{>0} \overset{!}{\Longrightarrow} \forall i : n_i = 0$ ↯

OBSERWACJE :

1) $\forall v \in \mathcal{C}(E,R;\Delta)\ \forall \alpha \in R_+ : \langle \alpha | v \rangle > 0$
$(\Leftarrow \alpha \in \langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}})$

2) $\forall \chi \in W(E,R) : \chi(R) = R \ \wedge\ \chi \in O(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$

$\Rightarrow \chi\left(\{\Pi_\alpha\}_{\alpha \in R}\right) = \{\Pi_\alpha\}_{\alpha \in R}$

bo $\chi(\Pi_\alpha) = \{\chi(v) \mid \langle v | \alpha \rangle = 0\} \equiv \{\chi(v) \mid \langle \chi(v) | \chi(\alpha) \rangle = 0\} \equiv \Pi_{\chi(\alpha) \in R}$ i χ odwracalne!

$\Rightarrow \forall C$ - $\overset{\text{otwarta}}{\text{komora}}$ Weyla : $\chi(\bar{C})$ - $\overset{\text{otwarta}}{\text{komora}}$ Weyla

Okazuje się, że związek pomiędzy bazami i (fundamentalnymi) komorami Weyla jest 1:1...

Str. 34. $\forall C$ - $\underset{(E,R)}{\overset{\text{otwarta}}{\text{komnata}}}$ Weyla $\exists!\,\Delta_C$ - baza R:

$$C \equiv \mathfrak{C}(E,R;\Delta_C) \wedge R_+^{(\Delta_C)} \equiv \{\alpha\in R \mid \forall v\in\mathfrak{C}(E,R;\Delta_C) : \langle\alpha|v\rangle>0\}$$

Istnieje zatem jedno-jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy bazami R i otwartymi komnatami Weyla.

D: Niechaj $v\in C$ i rozważmy $\Pi_v = \langle v\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$.

Wprost z definicji C: v nie jest $\perp$ do żadnego pierwiastka, zatem $\Pi_v \subset E\setminus R$ (nie zawiera pierwiastków).

v ∈ DOPEŁNIENIE $\bigcup_{\text{dla}} \Pi_\alpha$ ← tu $\perp\alpha$

bo $\Pi_v \ni \alpha \iff v\in\Pi_\alpha$!

Na mocy Tw. 11 (1. część) istnieje baza $\Delta_C = \{\alpha_i\}_{i\in\overline{1,r}}$ w części $E\setminus\Pi_v$ zawierającej v.

Jako że $\operatorname{sign}\langle\alpha_i, \cdot\rangle\big|_C = \mathrm{const}$ (w p.p. przecięlibyśmy któryś z $\Pi_{\alpha_i} \in \{\Pi_\alpha\}_{\alpha\in R}$), przeto – wobec wyboru $v\in C$ tak, iż – położenie Δ_C – $\forall w\in C\ \forall i\in\overline{1,r} : \langle\alpha_i|w\rangle > 0$, czyli też $\forall w\in C\ \forall\alpha\in R_+^{\Pi_v} : \langle w|\alpha\rangle > 0$, bo $R_+^{\Pi_v} \subset \langle\Delta_C\rangle_{\mathbb{N}}$, a ponieważ $R_\pm^{\Pi_v} \subset \langle\Delta_C\rangle_{\pm\mathbb{N}}$, więc $R_+^{\Pi_v}$ składa się z tych i tylko tych (czyli ponadto wszystkie i tylko te) pierwiastków, które mają dodatni iloczyn skalarny z elementami C.

Oczywiście $C \equiv \mathfrak{C}(E, R; \Delta_C)$. Pozostaje upewnić się co do jedyności Δ_C.

Niechaj Δ_c' będzie dowolną bazą o fundamentalnej komorze Weyla $C \equiv \mathcal{C}(E,R;\Delta_c')$. Wówczas $\forall \alpha \in \Delta_c' \ \forall v \in C : \langle \alpha | v \rangle > 0$, czyli $\Delta_c' \subset R_+^{\pi v}$, tj. w tej samej części co Δ_c. W konsekwencji $R_+^{(\Delta_c')} \equiv R_+^{(\Delta_c)} \Longrightarrow$ mają te same nierozkładalne

verte!

pierwiastki dodatnie, tj. $\Delta_c' \equiv \Delta_c$. $\square$

Bez trudu dowodzimy zatem

Str. 35. $\forall \alpha \in R \ \exists \ \Delta$-baza E : $\alpha \in \Delta$.

Trochę później: Δ_C są nierozkładalne (tak je wyprowadzimy), ale Δ_C' jest typu E (z zał.), więc elementy Δ_C rozkładają się w tejże bazie Δ_C'. Gdyby te rozkłady NIE były trywialne (z jednym tylko $n^i \neq 0$, co właśnie daje $\Delta_C = \Delta_C'$), to oznaczałoby rozkładalność odnośnych elementów Δ_C (na sumy innych pierwiastków z dodatniej pół-przestrzeni). ↯

D: Zauważmy, że ściany $\partial\mathcal{C}(E,R;\Delta\equiv\{\alpha_i\}_{i\in\overline{1,r}})$ ⑵⓪⑥

są fragmentami hiperpłaszczyzn Π_{α_i}, $i\in\overline{1,r}$.
(PATRZ: ($201\frac{1}{2}$))

Wystarczy zatem pokazać, że $\forall\alpha\in R$:

Π_α ma przecięcie $\Pi_\alpha\cap\partial C$, $\operatorname{codim}_{\mathbb{R}}(\Pi_\alpha\cap\partial C)=1$

z brzegiem pewnej komory Weyla C.

Rozważmy zatem $\alpha\in R$ i odnośną Π_α.

Ta ostatnia jest przestrzenią $\mathbb{R}$-liniową

wymiaru $\dim_{\mathbb{R}}\Pi_\alpha=\dim_{\mathbb{R}}E-1$. Jej przecięcie z hiperpłaszczyznami Π_β, $\beta\in R\setminus\{\pm\alpha\}$

są podprzestrzeniami w Π_α wymiaru

$\leftarrow$ bo $\beta\notin\langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}$

co najwyżej $\dim_{\mathbb{R}}\Pi_\alpha - 1$, zatem ich

suma mnogościowa, $\bigcup_{\beta\in R\setminus\{\pm\alpha\}}(\Pi_\beta\cap\Pi_\alpha)$ $|R\setminus\{\pm\alpha\}|<\infty$!

jest właściwym podzbiorem Π_α,

$$\bigcup_{\beta\in R\setminus\{\pm\alpha\}}(\Pi_\beta\cap\Pi_\alpha) \subsetneq \Pi_\alpha \quad \left(\begin{matrix}\text{elementarna}\\ \text{algebra}\\ \text{liniowa}\end{matrix}\right),$$

$\downarrow$

patrz: str. 186

czyli $\exists\, v\in\Pi_\alpha\setminus\bigcup_{\beta\in R\setminus\{\pm\alpha\}}\Pi_\beta$.

Dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ zachodzi wektor $v_\varepsilon \equiv v + \varepsilon \triangleright \alpha \in C$ dla pewnej otwartej komory Weyla C (wszak $v_\varepsilon \in E \setminus \bigcup_{\beta \in R} \Pi_\beta$).

Połóżmy, że $\alpha \in \Delta_C$, gdzie $\underset{\{\alpha_i\}_{i \in \overline{1,r}}}{\underset{\shortparallel}{\Delta_C}}$ jest bazą, o której mówi Stw. 34.

Zważywszy $\langle \alpha | v_\varepsilon \rangle = \langle \alpha | \varepsilon \triangleright \alpha \rangle = \varepsilon \langle \alpha | \alpha \rangle > 0$, jest z pewnością $\alpha \in R_+^{\Delta_C}$. Zapiszmy przeto

bo $v_\varepsilon \in C$ (patrz: Stw. 34)

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} n^i \triangleright \alpha_i \,, \quad n^i \in \mathbb{N} \,,$$

a wtedy

$0 = \langle \alpha | v \rangle = \sum_{i=1}^{r} n^i \cdot \langle \alpha_i | v \rangle$, a ponieważ (209)

$v \in \partial C$, przeto $\langle \alpha_i | v \rangle \geq 0$, czyli

$\forall i \in \overline{1,r} : \left(n^i > 0 \Rightarrow \langle \alpha_i | v \rangle = 0 \right)$. Jednocześnie

bo $v \perp \beta \Leftrightarrow v \in \Pi_\beta$ (patrz: def. (207))

$\forall \beta \notin \{\pm\alpha\} : \hookrightarrow v \not\perp \beta$, przeto $\exists!\, i \in \overline{1,r} : \langle \alpha_i | v \rangle = 0$,

czyli też $\exists!\, i \in \overline{1,r} : n^i > 0$, co oznacza, że

Verte $\alpha = \alpha_i \in \Delta_C$. $\square$

Trochę czytelniej: Jeśli α nie jest w bazie,

to ma rozkład w tejże,

$$\alpha = \sum n^i \alpha_i \; ; \quad n^i \geq 0 \text{ i co najmniej dwa } n^i \neq 0 \neq n^j \; i \neq j$$

(nie jedyny!),

ale wtedy $\langle \alpha_i | v \rangle = 0 = \langle \alpha_j | v \rangle$,

tymczasem $\alpha_i, \alpha_j \notin \{\pm\alpha\}$, zatem $\alpha_i, \alpha_j \not\perp \beta$,

więc sprzeczność.

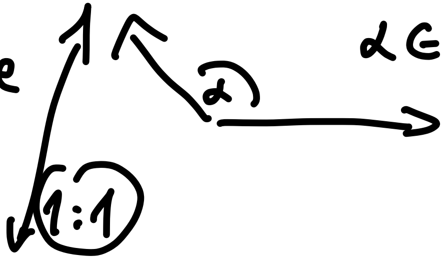
Rekapitulacja:

- SYSTEM Γ $\supset$ BAZA SYSTEMU Γ ← elementy NIEROZKŁADALNE

we ∂ $\Pi \cap R = \emptyset$

$\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} \Pi = 1$

- wektory bazowe

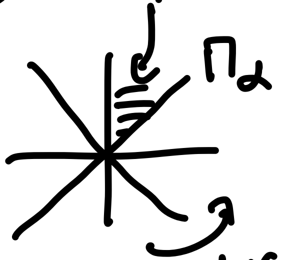


$\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$

- KOMNATY WEYLA $\supset$ FUNDAMENTALNA KOMNATA WEYLA

$\wr$

BAZA $\partial \mathcal{C} = \bigcup_i \tilde{\Pi}_{\alpha_i}$



$, \alpha \in R$

$W(E,R)$ działa na nich

- Γ : każdy może być bazowym!

W następnej kolejności zbadamy działanie $W(E,R)$ na zbiorze komnat Weyla (patrz: obserwacja 2) ze str. 202), co doprowadzi nas do diagramatycznej reprezentacji systemów pierwiastkowych...

Stw. 36. Niechaj (E,R) będzie systemem pierwiastkowym.

$$\forall \Delta\text{-baza } (E,R) : \; W(E,R) = \langle w_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle .$$

Działanie $W(E,R)$ na zbiorze otwartych komnat Weyla jest przechodnie.

D: Ustalmy bazę Δ i rozważmy podgrupę $W_\Delta \equiv \langle w_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle \subset W(E,R)$. Niech C będzie dowolną otwartą komorą Weyla. Wybierzmy $v \in \mathcal{E}(E,R;\Delta)$ i $w \in C$. Pokażemy, że $\exists\, \chi \in W_\Delta : \chi(w) \in \mathcal{E}(E,R;\Delta)$. W tym celu wybierzmy $\chi_* \in W_\Delta$ spełniające warunek

$$\|\chi_*(w) - v\|_E = \min_{\chi \in W_\Delta} \|\chi(w) - v\|_E$$

(jest dobrze określone, gdyż $|W_\Delta| \leq |W(E,R)| < \infty$).

Załóżmy, że $\chi_*(w) \notin \mathfrak{C}(E,R;\Delta)$, a wtedy

$\exists\, \alpha \in \Delta : \langle \alpha | \chi_*(w) \rangle < 0$, co jednak oznacza, iż

$(\bigcap \Pi_\alpha, \alpha \in \Delta$ ograniczają $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ (warunki $\langle v|\alpha\rangle > 0$)) wobec $\langle v|\alpha\rangle > 0$ –

$$\|\chi_*(w) - v\|_E^2 - \|w_\alpha \circ \chi_*(w) - v\|_E^2$$

$$= (\chi_*(w) - v | \chi_*(w) - v) - (w_\alpha \circ \chi_*(w) - v | w_\alpha \circ \chi_*(w) - v)$$

$$= \cancel{(w|w)} - 2(\chi_*(w)|v) + \cancel{(v|v)}$$

$$- \cancel{(w|w)} + 2(w_\alpha \circ \chi_*(w)|v) - \cancel{(v|v)}$$

$$= 2\left(\cancel{\chi_*(w)} - 2\frac{(\chi_*(w)|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha - \cancel{\chi_*(w)} \middle| v\right) = \overset{\overset{0}{\wedge}}{-4\frac{(\chi_*(w)|\alpha)\cdot(\alpha|v)}{(\alpha|\alpha)}},$$

czyli $\|w_\alpha \circ \chi_*(w) - v\| < \min_{\chi \in W_\Delta} \|\chi(w) - v\|$ ↯

(wszak $w_\alpha \circ \chi_* \in W_\Delta$).

Zatem $\chi_*(w) \in \mathfrak{C}(E,R;\Delta)$, co wobec dowolności w oznacza, że C można odwzorować w $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ używając W_Δ, a ponieważ $\chi_* \in W_\Delta$ zachowuje kąty, jest jasne, że χ_* przeprowadza całą komnatę C ze ścianami w ściany! w $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$, czyli $\chi_*(C) = \mathfrak{C}(E,R;\Delta)$.

W takim razie . . .

$\forall\, C_1, C_2$ - otwarte komory Weyla

$\exists\, \chi \in W_\Delta : \chi(C_1) = C_2$, co oznacza,

że W_Δ - tym bardziej więc W - działa

przechodnio na zbiorze komór.

Pozostaje przekonać się, że $W_\Delta = W$.

Rozważmy $\alpha \in R$. W świetle Str. 35 $\left(\begin{matrix}\forall \alpha \in R \\ \exists \text{ baza } \Delta \ni \alpha\end{matrix}\right)$

$\exists\, \Delta_{(\alpha)}$ - baza : $\alpha \in \Delta_{(\alpha)}$, więc też - $\mathfrak{C}(E, R; \Delta_{(\alpha)})$.

Ustalmy $\chi \in W_\Delta : \chi(\mathfrak{C}(E, R; \Delta_{(\alpha)})) = \mathfrak{C}(E, R; \Delta)$.

Potrzebujemy...

Lemat: $\forall \alpha \in R \ \forall \chi \in W(E,R):$

$$w_{\chi(\alpha)} = \chi \circ w_\alpha \circ \chi^{-1}.$$

Dł: $\forall v \in E:$

$$w_{\chi(\alpha)}(v) \equiv v - 2\,\frac{(v|\chi(\alpha))}{(\chi(\alpha)|\chi(\alpha))} \triangleright \chi(\alpha)$$

$$= \chi(\chi^{-1}(v)) - 2\,\frac{(\chi(\chi^{-1}(v))|\chi(\alpha))}{(\chi(\alpha)|\chi(\alpha))} \triangleright \chi(\alpha)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}\text{-liniowość} \\ \text{i izometryczność } \chi}}{=} \chi\left(\chi^{-1}(v) - 2\,\frac{(\chi^{-1}(v)|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha\right)$$

$$\equiv \chi\left(w_\alpha\left(\chi^{-1}(v)\right)\right). \quad \square$$

To kończy dowód, bo słowo $\chi(\alpha) \in \Delta$, co wynika z $\chi\left(\partial\mathcal{E}(E,R;\Delta_{(\alpha)})\right) = \partial\mathcal{E}(E,R;\Delta)$, to zarówno χ (z zał.), jak i $w_{\chi(\alpha)}$ należą do W_Δ, wtedy jednak — wobec powyższego —

$$w_\alpha = \chi^{-1} \circ w_{\chi(\alpha)} \circ \chi \in W_\Delta^{-1} \cdot W_\Delta \cdot W_\Delta \subset W_\Delta,$$

ale $\alpha \in R$ dowolne i $w_\alpha, \alpha \in R$ generują $W(E,R)$. □

Pójdziemy teraz w kier. dowodu swobody działania $W(E,R)$ na zbiorze komór...