

ANALIZA IIIR

PRACOWANIE SFERY

2026/27



ZAD. ROZWAŻMY 2-SFERĘ ZANURZONĄ W $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{S}^2 := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \delta(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \},$$

A NA NIEJ — ODWZOROWANIE:

$$F: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) = \xi \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\mu(\xi)}} (x^2 - y^2, 2xy, z),$$

GDZIE $\mu(\xi) = (x^2 + y^2)^2 + z^2$.

1) POKAŻEMY NAJPIERW, ŻE $F(\mathbb{S}^2) \subset \mathbb{S}^2$, A NAWET WIĘCEJ:

ROZSZERZENIE F NA $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ DANE WZOREM (TAM SAMYM)

$$\widetilde{F}: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\mu(\xi)}} (x^2 - y^2, 2xy, z) =: (\widetilde{F}^1(\xi), \widetilde{F}^2(\xi), \widetilde{F}^3(\xi))$$

SPELNIA $\widetilde{F}(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}) \subset \mathbb{S}^2$.

①

LICZYMY WPROST:

$$\delta_{ab} \tilde{F}^a(\xi) \tilde{F}^b(\xi) = \frac{1}{\mu(\xi)} \left[(x^2 - y^2)^2 + 4x^2 y^2 + z^2 \right] = \frac{1}{\mu(\xi)} \left[(x^2 + y^2)^2 + z^2 \right] = 1 \quad \checkmark$$

$a, b \in \{1, 2, 3\}$

2) GŁADKOŚĆ $\tilde{F}$:

1° $z \neq 0 \Rightarrow$ NIEZALEŻNE WSPÓŁRZĘDNE W DZIEDZINIE TO (x, y)

$$\text{I STOTNIE,} \quad z(x, y) = \varepsilon \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad \varepsilon = 1 \quad \text{DLA } z > 0$$

(ZMIENNA ZALEŻNE) -1 DLA $z < 0$

ALB WTEDY TEŻ $\tilde{F}^3(x, y, z(x, y)) = \frac{1}{\mu(x, y, z(x, y))} z(x, y) \neq 0$, WŁC I NA OTWARTEJ $\tilde{F}(x, y, z(x, y))$

NIEZALEŻNYMI WSPÓŁRZĘDNYMI SA (a, b) I $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$F(x, y, z(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^2 + 1 - x^2 - y^2}} \rightarrow (x^2 - y^2, 2xy, \varepsilon \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

Funkcja gładka w reprezentacji współrzędnej $(x, y) \mapsto (a(x, y), b(x, y))$

(istotnie, jest to $(x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\mu(x, y, z(x, y))}} (x^2 - y^2, 2xy)$).

2° OTOCZENIE PŁYNNIA POKRYWA UKŁAD WSP. SFERYCZNYCH:
w dziedzinie $\begin{matrix} 3 \\ r=1 \end{matrix}$

$$x = \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \cos \theta$$

$$\theta \in \left] \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon \right[, \quad \varphi \in [0, 2\pi[$$

$$F(\xi(\theta, \varphi)) = \frac{1}{\sqrt{\sin^4 \theta + \cos^2 \theta}} \rightarrow (\sin^2 \theta \cos 2\varphi, \sin^2 \theta \sin 2\varphi, \cos \theta)$$

W zależności od obszaru mamy w przestrzeni dwuwymiarowej współrzędne

(x, z) lub (y, z) , czyli rozważamy

$$(\theta, \varphi) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\sin^4 \theta + \omega^2 \theta}} (\sin^2 \theta \cos 2\varphi, \cos \theta) - \text{JAWNE GŁADNE}$$

(TAM, GDZIS (x, z))

$$(\theta, \varphi) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\sin^4 \theta + \omega^2 \theta}} (\sin^2 \theta \sin 2\varphi, \cos \theta) - \text{JAWNE GŁADNE}$$

(TAM, GDZIS (y, z))

3) $\underline{T}_\xi F : \underline{T}_\xi \mathbb{S}^2 \rightarrow \underline{T}_{F(\xi)} \mathbb{S}^2 = ???$

NATJERW $\underline{T}_\xi \mathbb{S}^2 = \text{Ker } \underline{T}_\xi S = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 = \underline{T}_\xi S \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (2x, 2y, 2z) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \xi^T$
WZGLĘDEM
STANDARDOWEGO
WECZYNU SKALARNEGO

TE WEKTORY SĄCONE DO $\mathbb{R}^3$ W PUNKTACH $\xi \in \mathbb{S}^2$, WŁC WIERUNIA
W $\mathbb{R}^3$, W KÓRYCH S NIE ZMIENIA WARTOŚCI, A PONIEWAŻ $S|_{\mathbb{S}^2} = 0$,
WŁC TEŻ W TYCH WIERUNKACH ZACHOWUJE $S = 0 \Rightarrow$ POZOSTAJEM NA $\mathbb{S}^2$. ④

OBSERWACJA: $\delta_{ab} \tilde{F}^a(x, y, z) \tilde{F}^b(x, y, z) = 1 \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$
 (nie tylko dla $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$),

więc możemy różniczkować we wszystkich kierunkach (a nie tylko wzdłuż $\mathbb{S}^2$): $(\partial_c 1 = 0, \forall c \in \{1, 2, 3\})$

$$0 = 2 \delta_{ab} \partial_c \tilde{F}^a(x, y, z) \tilde{F}^b(x, y, z)$$

$$\downarrow \quad \leftarrow v$$

$$\forall (v^1, v^2, v^3) \in \overset{v}{\underset{(x, y, z)}{T}} \mathbb{R}^3 :$$

$$\left(\overset{v}{\underset{(x, y, z)}{T}} \tilde{F}(v) \mid \tilde{F}(x, y, z) \right)$$

$$= \delta_{ab} \partial_c \tilde{F}^a(x, y, z) v^c \tilde{F}^b(x, y, z) = \sum_{c \in \{1, 2, 3\}} v^c 0 = 0 \quad (5)$$

$\overset{v}{\underset{(x, y, z)}{T}} \tilde{F}(v) \in \mathbb{S}^2$
 (oczywiście
 —wszyscy
 $\tilde{F}(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$
 $\mathbb{S}^2$!)

DLA WYZNACZENIA $T_{\xi}F$ WYSTARCZY OBLICZYĆ $T_{\xi}\tilde{F}|_{T_{\xi}S^2 \subset T_{\xi}\mathbb{R}^3}$.

NAPPIERW ZATEM LICZYMY - W BAZIE STANDARDOWEJ $e = (e_1, e_2, e_3)$

$$[T_{\xi}\tilde{F}]_e = \begin{pmatrix} \partial_1 \tilde{F}^1 & \partial_2 \tilde{F}^1 & \partial_3 \tilde{F}^1 \\ \partial_1 \tilde{F}^2 & \partial_2 \tilde{F}^2 & \partial_3 \tilde{F}^2 \\ \partial_1 \tilde{F}^3 & \partial_2 \tilde{F}^3 & \partial_3 \tilde{F}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\text{ALE } \partial_a \tilde{F}^b \equiv \partial_a \left(\frac{1}{\sqrt{\mu(\cdot)}} F^b(\cdot) \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\mu(\cdot)} \partial_a \mu(\cdot) \tilde{F}^b(\cdot) + \frac{1}{\sqrt{\mu(\cdot)}} \partial_a F^b(\cdot)$$

$F^1(\xi) = x^2 - y^2, F^2(\xi) = 2xy, F^3(\xi) = z$

$$\downarrow$$

$$[T_{\xi}\tilde{F}]_e = -\frac{1}{2\mu(\xi)} \begin{pmatrix} \tilde{F}^1 \\ \tilde{F}^2 \\ \tilde{F}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (\partial_1 \mu, \partial_2 \mu, \partial_3 \mu)(\xi) + \frac{1}{\sqrt{\mu(\xi)}} \begin{pmatrix} \partial_1 F^1 & \partial_2 F^1 & \partial_3 F^1 \\ \partial_1 F^2 & \partial_2 F^2 & \partial_3 F^2 \\ \partial_1 F^3 & \partial_2 F^3 & \partial_3 F^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(6)

$$\left[\begin{smallmatrix} T \\ \xi \end{smallmatrix} \widetilde{F} \right]_e^e = -\frac{1}{\mu(\xi)^{3/2}} \begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ 2xy \\ z \end{pmatrix} \left((x^2+y^2) \cdot 2x, (x^2+y^2) \cdot 2y, z \right) + \frac{1}{\mu(\xi)^{1/2}} \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 2y & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

W NASTĘPNY KOLEJNOŚCI WYSTĄPIĄ NATURALNE BAZY $\overline{\xi} S^2$:

1° $z \neq 0 \Rightarrow \mathcal{O}(2x, 2y, 2z) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ MA ROZWIĄZANIE $C = -\frac{x}{z}a - \frac{y}{z}b$, CZLI

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -\frac{x}{z}a - \frac{y}{z}b \end{pmatrix} = \underbrace{a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{z} \end{pmatrix}}_{\text{JEDZ DOWOLNE}} + \underbrace{b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{z} \end{pmatrix}}_{\text{JEDZ DOWOLNE}} = \widetilde{a} \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} + \widetilde{b} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}$$

BAZA $\overline{\xi} S^2$
 $z \neq 0$

LICZYMY:

$$\overline{\xi} \widetilde{F} \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu(\xi)^{3/2}} \begin{pmatrix} xz [2\mu(\xi) - (x^2-y^2)(2(x^2+y^2)-1)] \\ 2yz [\mu(\xi) - x^2(2(x^2+y^2)-1)] \\ -x [\mu(\xi) + z^2(2(x^2+y^2)-1)] \end{pmatrix}$$

NB:

$$\begin{aligned} & \mu(\xi) + z^2(2(x^2+y^2)-1) \\ &= (1-z^2)^2 + z^2 + z^2(1-2z^2) \\ &= 1-z^4 \end{aligned}$$

(7)

ANALOGUE

$$T_{\xi} \tilde{F} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu(\xi)^{3/2}} \begin{pmatrix} -yz [2\mu(\xi) + (x^2 - y^2)(2(x^2 + y^2) - 1)] \\ 2xz [\mu(\xi) - y^2(2(x^2 + y^2) - 1)] \\ -y [\mu(\xi) + x^2(2(x^2 + y^2) - 1)] \end{pmatrix}$$

NAMU ZAFER

$$T_{\xi} \tilde{F} \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu(\xi)^{3/2}} \begin{pmatrix} xz [2\mu(\xi) - (x^2 - y^2)(2(x^2 + y^2) - 1)] \\ 2yz [\mu(\xi) - x^2(2(x^2 + y^2) - 1)] \\ x(z^4 - 1) \end{pmatrix}$$

$$T_{\xi} \tilde{F} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu(\xi)^{3/2}} \begin{pmatrix} -yz [2\mu(\xi) + (x^2 - y^2)(2(x^2 + y^2) - 1)] \\ 2xz [\mu(\xi) - y^2(2(x^2 + y^2) - 1)] \\ y(z^4 - 1) \end{pmatrix}$$

MAMY SZCZEGÓŁNY PRZYPADEK: $(x, y) = (0, 0)$, A WIEDY $T_{\xi} F \equiv 0$,

POJĄTNIEM ZAS

$$1.1^{\circ} (x \neq 0 \Rightarrow x(z^4 - 1) \neq 0) \wedge y = 0 \wedge z \neq 0$$

$$T_{\xi} F \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{oznacza wektor nie zerowy}$$

$$\wedge T_{\xi} \tilde{F} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ \mu(\xi) \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{LINIOWO NIEZALNE!}$$

$$1.2^{\circ} (y \neq 0 \Rightarrow y(z^4 - 1) \neq 0) \wedge x = 0 \wedge z \neq 0 \leftarrow \text{LINIOWO NIEZALNE!}$$

$$T_{\xi} \tilde{F} \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ \mu(\xi) \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge T_{\xi} \tilde{F} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{!w!}$$

(9)

$3^o \ x, y \neq 0 \ (1 \neq 0) \quad \text{wdwczAS}$

$$T_{\xi} \tilde{F} \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{z}{z^2-1} [2\mu(\xi) - (x^2-y^2)(2(x^2+y^2)-1)] \\ * \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{\xi} \tilde{F} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{z}{z^2-1} [2\mu(\xi) + (x^2-y^2)(2(x^2+y^2)-1)] \\ * \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{rk } T_{\xi} F \geq 1 \quad ; \quad = 1 \Rightarrow \text{wznowione powtórzy pierwiok}$

skutkiem wektorów-obrazów są równe (bo to własność
mają ostatnie składowe), czyli

$$-2\mu(\xi) - (x^2-y^2)(2(x^2+y^2)-1) = 2\mu(\xi) - (x^2-y^2)(2(x^2+y^2)-1) \quad (10)$$

$\Leftrightarrow 4\mu(\xi) = 0 \quad \nmid$

WNIOSEK: TRAJE DLA $x, y \neq 0 \neq z$ jest $\text{rk } T_z F = 2$

Pozostaje rozważyć

$$4^\circ z \in \{\pm 1\}, x = 0 = y \quad \text{ORAZ} \quad 5^\circ z = 0$$

AD 4° WADZIEMY $x = 0 = y$ W DOTYKNIĘCIOWYCH FORMUŁACH:

$$T_z \tilde{F} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T_z \tilde{F} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rk } T_{(0,0,\pm 1)} F = 0 \quad \text{PUNKT KRYTYCZNY}$$

$$\text{AD } 5^\circ \quad T_{(x,y,0)} \mathbb{S}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \quad \mu(x,y,0) = 1 \quad \text{OBUCZAMY}$$

$$T_{(x,y,0)} \tilde{F} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[- \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \\ z \end{pmatrix} (2x, 2y, 0) + \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 2y & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(11)

$$T_{(x,y,0)} \widetilde{F} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4xy \\ 2(y^2 - x^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

PRZY $z=0$ JEST $1 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2$,

ZATEM $\begin{cases} 4xy = 0 \\ 2(y^2 - x^2) = 0 \end{cases}$ NIE MA ROZWIĄZAŃ!

WNIOSEK: Tu także $\nabla T_{(x,y,0)} F = 2$.

PODSUMOWANIE: F JEST IMMERSTĄ I SUBMERSTĄ WSZĘDZIE
POZA BIEGUNAMI $z \in \{\pm 1\}$. TAM WYSTĄSIŁY
PUNKTY KRZYWIZNE.

_____ x _____

$$4) \underline{F(S^2) = S^2 \times \mathbb{R}}$$

OBSERWACJA: $F(-x, -y, z) = F(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in S^2 \Rightarrow F$ NIE JEST
 DYEOMORFIZMEM
 CZY WYSTĘPUJE WŁASZCZE ZWYKRODNIECIE? (NIE JEST INIEKCYJĄ).

ODPOWIEDŹ UMYE ŚREDNIM POZIOMIC $F^{-1}(\{a, b, c\})$

$$F^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\xi)}} z \quad \begin{matrix} \nwarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow (a, b, c) \in S^2. \\ \nearrow \end{matrix}$$

$\nearrow \mu(\xi) = f(z), \text{ bo } x^2 + y^2 = 1 - z^2$

OBSERWACJA: F PRZEPROWADZA RÓWNOLEŻNICE ($z = \text{const}$) NA RÓWNOLEŻNICE,
 ZATEM NATURALNIE JEST UPORZĄDKOWAĆ ANALIZĘ RÓWNOLEŻNIKOWĄ. ($c = \text{const}$)

1° $F^{-1}(\{a, b, 0\})$ (PRZECIWOBRAZ PUNKTU NA RÓWNIK) $\mu(\xi) = 1$

$$\xrightarrow{\vartheta(x, y, z)} \frac{1}{\sqrt{\mu(\xi)}} (x^2 - y^2, 2xy, z) = (a, b, 0) \Rightarrow z = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}, \text{ ALE TEŽ } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ + z^2 \\ \parallel \\ 0 \end{cases}, \text{ JATEM } \begin{cases} x^2 = \frac{1+a}{2} \\ y^2 = \frac{1-a}{2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

$$\text{ZAMUŽMY: } \begin{matrix} a^2 + b^2 \\ + c^2 \\ \parallel \\ 0 \end{matrix} = 1 \Rightarrow 1+a, 1-a \geq 0$$

NOBDE TEŽO DOŠTATEM

$$\begin{cases} x = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{1+a}{2}}, \varepsilon_1 \in \{\pm 1\} \\ y = \varepsilon_2 \sqrt{\frac{1-a}{2}}, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\} \\ 2xy = b \end{cases}$$

$$\text{ČYLI } 2\varepsilon_1\varepsilon_2 \sqrt{\frac{1-a^2}{4}} = 2xy = b, \text{ ALE } 1-a^2 = b^2 + \underset{\parallel}{c^2} = b^2,$$

(14)

PRZETO

$$b = 2\varepsilon_1\varepsilon_2 \sqrt{\frac{b^2}{4}} = \varepsilon_1\varepsilon_2 |b|$$

$$1.1^\circ \quad \underline{b=0} \Rightarrow \begin{cases} x = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{1+a}{2}} \\ y = \varepsilon_2 \sqrt{\frac{1-a}{2}} \\ z=0 \end{cases}$$

$\Downarrow$
 $a \in \{\pm 1\}$

← TYLKO JEDNA
Z PŁCŁ UCZB $\neq 0$
 $\Rightarrow$ PODWÓJNE ZWYPODNIENIE
(TYLKO)

$$1.2^\circ \quad \underline{b \neq 0} \Rightarrow \varepsilon_1\varepsilon_2 = \text{sign}(b) \quad , \quad \text{DOSTĄPEM}$$

$$\begin{cases} x = \varepsilon \sqrt{\frac{1+a}{2}} \\ y = \varepsilon \text{sign}(b) \sqrt{\frac{1-a}{2}} \\ z=0 \end{cases}$$

Podwójne zwyrodnienie
(podwójne natężenie
równika przez równik) (15)

$$2^o \quad \underline{c \neq 0} \quad \frac{1}{\sqrt{\mu(\xi)}} (x^2 - y^2, 2xy, z) = (a, b, c)$$

$$z^2 = c^2 \mu(\xi) = c^2 [(1-z^2)^2 + z^2]$$

$$\Downarrow$$

$$c^2 z^4 - (c^2 + 1) z^2 + c^2 = 0$$

LICZYMY WYRÓBNIK

R-NIA DWUKWADRATOWEGO : $\Delta = (c^2 + 1)^2 - 4c^2 \cdot c^2$

$$= -3c^4 + 2c^2 + 1$$

$$= (3c^2 + 1)(1 - c^2) \geq 0$$

$$\Uparrow$$

$$0 \leq a^2 + b^2 = 1 - c^2$$

WOŁEC POWYŻSZEJ

$$z_{\pm}^2 = \frac{c^2 + 1 \pm \sqrt{\Delta}}{2c^2}$$

$\nwarrow$ DWA MOŻLIWE (A PRIORI) ROZWIĄZANIA

ALÉ $z_{\pm}^2 \leq 1$, BO $x^2 + y^2 + z_{\pm}^2 = 1$, ZATEM

$$\frac{c^2 + 1 \pm \sqrt{\Delta}}{2c^2} \leq 1 \Leftrightarrow c^2 + 1 \pm \sqrt{\Delta} \leq 2c^2 \Leftrightarrow \pm \sqrt{\Delta} \leq c^2 - 1 \quad (\leq 0)$$

WNIOSEK: $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ JEDYNE DOPUSZCZALNE ROZWIĄZANIE TO
(WIĘC DLA $\Delta = 0$)

$$z_{-}^2 = \frac{c^2 + 1 - \sqrt{\Delta}}{2c^2}$$

DUŻY WISCIÉ

$$\frac{c^2 + 1 - \sqrt{\Delta}}{2c^2} \geq 0 \Leftrightarrow c^2 + 1 \geq \sqrt{(3c^2 + 1)(1 - c^2)}$$

$$\Leftrightarrow (c^2 + 1)^2 \geq (3c^2 + 1)(1 - c^2) = -3c^4 + 2c^2 + 1 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow c^4 + 2c^2 + 1 \Leftrightarrow 4c^2 \geq 0 \quad \checkmark$$

JEST ZATEM $z = \varepsilon \sqrt{\frac{c^2 + 1 - \sqrt{\Delta}}{2c^2}} =: \varepsilon f(c)$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$

Zachodzi: $\frac{z}{\sqrt{\mu(z)}} = c (\neq 0) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\mu(z)}} = \frac{c}{z} = \varepsilon \frac{c}{f(c)}$

otrzymany zatem układ równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \varepsilon \frac{f(c)}{c} a \\ 2xy = \varepsilon \frac{f(c)}{c} b \\ x^2 + y^2 = 1 - z^2 = 1 - f(c)^2 \end{cases} \quad \text{oraz}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \left[1 - f(c)^2 + \varepsilon \frac{af(c)}{c} \right] \\ y^2 = \frac{1}{2} \left[1 - f(c)^2 - \varepsilon \frac{af(c)}{c} \right] \end{cases} \quad \wedge \quad 2xy = \varepsilon \frac{bf(c)}{c}$$

SPRAWDZAMY NATJPIERW, $\{0$

$$1 - f(c)^2 \pm \varepsilon \frac{af(c)}{c} \geq 0 \quad (1 - f(c)^2 = x^2 + y^2 \geq 0)$$

$\Updownarrow$

$$|1 - f(c)^2| \geq \left| \frac{af(c)}{c} \right|$$

$\Updownarrow$

$$(1 - f(c)^2)^2 \geq \frac{a^2 f(c)^2}{c^2}$$

$\Updownarrow$

$$c^2 \left(\frac{c^2 - 1 + \sqrt{\Delta}}{2c^2} \right)^2 = c^2 (1 - f(c)^2)^2 \geq a^2 f(c)^2 = a^2 \frac{c^2 + 1 - \sqrt{\Delta}}{2c^2}$$
$$\underline{\underline{\leq \frac{(c^2 - 1 + \sqrt{\Delta})^2}{4c^2}}}$$

$$\Leftrightarrow (c^2 - 1 + \sqrt{A})^2 \geq 2a^2 (c^2 + 1 - \sqrt{A})$$

$$\subseteq (c^2 - 1)^2 + A + 2(c^2 - 1)\sqrt{A} = c^4 - 2c^2 + 1 - 3c^4 + 2c^2 + 1 + 2(c^2 - 1)\sqrt{A}$$

$$= 2(1 - c^4) - 2(1 - c^2)\sqrt{A} = 2(1 - c^2)(1 + c^2 - \sqrt{A})$$

$$\Leftrightarrow 2(c^2 + 1 - \sqrt{A})(1 - c^2 - a^2) \geq 0$$

✓

(PATRZ: (*) NA STR. 17)

$$\subseteq 2b^2(c^2 + 1 - \sqrt{A})$$

WOBEŁ TEGO DOSTATEMY ROZWIĄZANIE

$$\begin{cases} x = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{1}{2} (1 - f(c))^2 + \varepsilon \frac{af(c)}{c}} \\ y = \varepsilon_2 \sqrt{\frac{1}{2} (1 - f(c))^2 - \varepsilon \frac{af(c)}{c}} \\ z = \varepsilon f(c) \end{cases}$$

PRZY "WŁĄZACH" $2xy = \varepsilon \frac{bf(c)}{c}$

"WIEŻY" POZWALA NAM ZREDUKOWAĆ POZORNĄ DEGENERACJĘ RZĘDU 2×2 DO TEJ
 $\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2$
 ZAUWAŻONY NA STR. 13 (RZĘDU 2)

NB: $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ NIE WPROWADZA DEGENERACJI, A JEDYNIŚ — ROZPOJNIENIS
 MIĘDZY RÓWNOLEŻNIKAMI NAD ($\varepsilon = +1$) I POD ($\varepsilon = -1$) RÓWNIKIEM,

$$\varepsilon \equiv \text{sign}(c). \quad (**)$$

TEST ZATEM

$$\varepsilon \frac{bf(c)}{c} = 2xy = 2\varepsilon_1\varepsilon_2 \sqrt{\frac{(1-f(c)^2 + \varepsilon \frac{af(c)}{c})(1-f(c)^2 - \varepsilon \frac{af(c)}{c})}{2 \cdot 2}}$$

$$= \varepsilon_1\varepsilon_2 \sqrt{(1-f(c)^2)^2 - \left(\frac{af(c)}{c}\right)^2} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{|c|} \sqrt{c^2(1-f(c)^2)^2 - a^2f(c)^2}$$

$$\begin{aligned}
 (\Leftrightarrow) \quad b f(c) &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{c^2 \left(\frac{c^2 - 1 + \sqrt{\Delta}}{2c^2} \right)^2 - a^2 \frac{c^2 + 1 - \sqrt{\Delta}}{2c^2}} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{\frac{(c^2 - 1 + \sqrt{\Delta})^2 - 2a^2(c^2 + 1 - \sqrt{\Delta})}{4c^2}} \\
 (***) \quad &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{\frac{(c^2 - 1)^2 + \Delta + 2(c^2 - 1)\sqrt{\Delta} - 2a^2(c^2 + 1) + 2a^2\sqrt{\Delta}}{4c^2}} \\
 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{\frac{(c^2 - 1)^2 + (3c^2 + 1)(1 - c^2) - 2a^2(c^2 + 1) + 2\sqrt{\Delta}(a^2 + c^2 - 1)}{4c^2}} \\
 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{\frac{(1 - c^2)(1 - c^2 + 3c^2 + 1) - 2a^2(c^2 + 1) - 2b^2\sqrt{\Delta}}{4c^2}} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{\frac{(1 - c^2 - a^2)(c^2 + 1) - b^2\sqrt{\Delta}}{2c^2}} \\
 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{b^2 \frac{c^2 + 1 - \sqrt{\Delta}}{2c^2}} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 |b| f(c)
 \end{aligned}$$

OSTATECZNIE JATEM (Wobec $f(c) \sim z \neq 0$) DOSTAJEMY RÓWNOŚĆ!

$$b = \varepsilon_1 \varepsilon_2 |b|$$

$$2.1^\circ b=0 \quad (c \neq 0)$$

$$\begin{cases} x = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{1}{2} (1 - f(c)^2 + \varepsilon \frac{af(c)}{c})} \\ y = \varepsilon_2 \sqrt{\frac{1}{2} (1 - f(c)^2 - \varepsilon \frac{af(c)}{c})} \\ z = \varepsilon f(c) \end{cases}$$

TYLKO JEDNA Z TYCH LICZB
JEST $\neq 0$, WIĘC MAMY 2 ROZWIĄZANIA

$$2xy \sim b = 0$$

PRZY TYM 0 ILE $|z| \neq 1$,
SĄ TO DOŁĄDNIWE 2
ROZWIĄZANIA, BO NIE DY
 $x^2 + y^2 \neq 0$

$$2.2^\circ b \neq 0 \Rightarrow \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \operatorname{sign}(b)$$

$$\begin{cases} x = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{1}{2} (1 - f(c)^2 + \frac{af(c)}{|c|})} \\ y = \varepsilon_1 \operatorname{sign}(b) \sqrt{\frac{1}{2} (1 - f(c)^2 - \frac{af(c)}{|c|})} \\ z = \operatorname{sign}(c) f(c) \end{cases}$$

$\varepsilon_1 \in \{\pm 1\}$ 2 ROZWIĄZANIA

Podsumowanie: Wszędzie poza biegunami $|z|=1$ F jest

2-krotnym submersyjnym i immersyjnym nawiązaniem

$$\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, \pm 1)\} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, \pm 1)\}.$$

Punkty $z = \pm 1$ porównując (1-krotnie, oczywiście) odnośnie

Punkty $c = \pm 1$. Są to punkty krytyczne - $\text{rk } T_{(0,0,\pm 1)} F = 0$.

← X →