

BLIŻSZA CIĄTU KOSZULA

(MAWF '25/26 2. XIII [28])

2025 / 26



TYTUŁEM KONKRETYZACJI ROZWAŻAŃ NAD GEOMETRIĄ STYCZNOŚCIOWĄ
WIĄZKI PRZYJRZYMY SIĘ BUŻEJ POWIĄZANIOM NA WIĄZKACH
WEKTOROWYCH WZGODNIONYM Z STRUKTURĄ LINIOWĄ NA ICH
WŁÓKNACH. FIZYKALNEGO USPRAWIEDLIWIENIA TAKIEGO WYBORU
PRZEDMIOTU ANALIZY DOSTARCZA PROSTA KONSTATAcja:
OTO ZARÓWNO WIĄZKA STYCZNA NAD UMBROPRZESTRZENIĄ
(WYPOSAŻONA DODATKOWO W STRUKTURĘ METRYCZNĄ), JAK I WIĄZKI
SPINOROWE MODELUJĄCE (PO T.J.W. SUPERYZACJI WŁÓKNA)
POLA FERMIONOWE (TUDŻIEJ WIĄZKI CLIFFORDA NA NICH
REALIZOWANE) SĄ TAKIMI WŁAŚNIE WIĄZKANAMI WEKTOROWYMI,
A TEORIA POLA I TEORIA WZGLĘDNOŚCI DOMAGAJĄ SIĘ RÓŻNICZKOWANIA
ICH CIĘĆ...

ZACZYNIEMY OD OBSERWACJI: PODWIAZKA PIONOWA $VW \subset TW$
 WIĄZKI STYCZNOJ MJD WIĄZKI WEKTOROWA $(W, B, \mathbb{R}^{*N}, \pi_W)$ JEST
 ZACHOWYWANA PRZEZ STYCZNOŚCIOWE PODNIĘSIENIA $TU_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$
 MORFIZMOW U_λ IMPLEMENTUJĄCYCH DZIAŁANIE CIĘCIA BAZOWEGO $\mathbb{R}$
 NA (WŁÓKNACH) W . ISTOTNIE, DLA DOWOLNEJ $v \in W, V \in V_v W \equiv \ker T_v \pi_W$
 I $\lambda \in \mathbb{R}$ ZACHODZI $T_{U_\lambda(v)} \pi_W (T_v U_\lambda(V)) = T_v (\pi_W \circ U_\lambda)(V) = T_v \pi_W(V) = 0$.
 TO PODCIEŚLA NIETRZYWIALNOŚĆ WARUNKU UZGODNIENIA POWIĄZANIA
 JE STRUKTURĄ LINIOWĄ W PONIŻSZEJ

Def. 1. POWIĄZANIE EHRENMANNA $TV \simeq VW \oplus HW$ NA WIĄZCE
 WEKTOROWEJ $(W, B, \mathbb{R}^{*N}, \pi_W)$ NAZWIEMY LINIOWYM, ILEKROĆ
 $\forall v \in W, \lambda \in \mathbb{R} : T_v U_\lambda(H_v W) = H_{U_\lambda(v)} W$.

PROSTĄ KONSERWOWAŁĄ POWYŻSZEJ DEFINICJI JEST

Sw. 1. W DOWOLNYM PUNKCIE CIĘCIA JEDNOLITEJ WIĄZKI WEKTOROWEJ PRZESTRZENI POZIOMA LINIOWEGO POWIĄZANIA EKRISTMANNA JEST SIŁOWA DO TEJ CIĘCIA, tj. $\forall x \in B: H_{Q_V(x)} \mathbb{V} = T_{Q_V(x)}(\mathbb{O}_V(B))$.

D: WPROST NA MOCY DEFINICJI:

$$H_{Q_V(x)} \mathbb{V} \equiv H_{\mathbb{L}_0(Q_V(x))} \mathbb{V} = T_{Q_V(x)} \mathbb{L}_0(H_{Q_V(x)} \mathbb{V}),$$

A OPERATOR $T_{Q_V(x)} \mathbb{L}_0$ ANIHILUJE WEKTORY PIONOWE. $\square$

ZANIM PRZEJDIEMY DO ALTERNATYWNYCH A RÓWNOWĄŻNYCH OPISÓW POWIĄZANIA NA WIĄZCE WEKTOROWEJ, ZATRZYMANI SIĘ NA CHWILĘ PRZY NADER PRZYDATNYM IZOMORFIZMIE, STANOWIĄCYM PUNKT WYŚCIGA DO TEJ DALESZEJ DYSKUSJI.

MAMY OTÓŻ - W DOWOLNYM PUNKCIE $v \in V_x, x \in B$ -

$$\text{Ver} \tau_v: V_x \xrightarrow{\cong} V_v V, w \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (v + t \triangleright w),$$

GDZIE PO PRAWEJ STRONIE WIDZIMY KLASĘ RÓWNOWAŻNOŚCI ŚCIEŻEK PRZEZ v .

BIJEKCJA TA JEST JAWNIE $\mathbb{R}$ -LINIOWA - W SZCZEGÓLNOŚCI

$$\begin{aligned} \text{Ver} \tau_v(r \triangleright w) &\equiv \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (v + t \triangleright (r \triangleright w)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (v + tr \triangleright w) = r \triangleright \left. \frac{d}{d\xi} \right|_{\xi=0} (v + \xi \triangleright w) \\ &\equiv r \triangleright \text{Ver} \tau_v(w). \end{aligned}$$

ZDEFINIOWANY POWYŻEJ IZOMORFIZM SPŁATA ZE SOBĄ DZIAŁANIE CIĄTA BAZOWEGO $\mathbb{R}$ NA V Z OGRANICZENIEM JEGO STYCZNOŚCIOWEGO PODCIĘCZENIA DO $V/V \subset TV \dots$
ISTOTNIE, ZAKODZI - DLA DOWOLNYCH $\lambda \in \mathbb{R}$ I $v, w \in V_x$ -

$$\begin{aligned} \text{Ver} \tau_{L_\lambda(v)} \circ L_\lambda \circ \text{Ver} \tau_v^{-1} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (v + t \triangleright w) \right) &\equiv \text{Ver} \tau_{L_\lambda(v)} \circ L_\lambda(w) \\ &\equiv \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (L_\lambda(v) + t \triangleright L_\lambda(w)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L_\lambda(v + t \triangleright w) = T_v L_\lambda \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (v + t \triangleright w) \right), \quad (4) \end{aligned}$$

zgli $\mathcal{T}_v \ll_{\lambda} \downarrow_{v,v} = \text{Verl}_{\mathcal{L}_\lambda(v)} \circ \ll_{\lambda} \circ \text{Verl}_v^{-1}.$

MOŻEMY JUŻ TERAZ WYSTAWIĆ

Def. 2. FORMA POWIĄZANIA LINIOWEGO NA WIĄZCE WEKTOROWEJ $(V, B, \mathbb{R}^n, \pi_V)$

TO MORFIZM WIĄZEK WEKTOROWYCH $(\mathcal{A}, \pi_V) :$

$$\begin{array}{ccc} TV & \xrightarrow{\mathcal{A}} & V \\ \pi_{TV} \downarrow & & \downarrow \pi_V \\ V & \xrightarrow{\pi_V} & B \end{array}$$

O WŁASNOŚCIACH (FL1) $\forall x \in B, v \in V_x : \mathcal{A} \circ \text{Verl}_v = \text{id}_{V_x}$

(FL2) $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \mathcal{A} \circ T \ll_{\lambda} = \ll_{\lambda} \circ \mathcal{A}.$

O RÓWNOWAŻNOŚCI OBU DEFINICJI PRZESADZA

Tw. 1. LINIOWE POWIĄZANIE EHRESMANNA WYŻNAGAJĄ FORMĘ POWIĄZANIA LINIOWEGO, I VICE VERSA.

D: TWIERDZENIE TO, A ZATEM TAKŻE JEGO DOWÓD, JEST ELEMENTARNĄ NAŚLADĄ NA TEMAT Tw. 12.2. MAJĄC MORFIZM (A, π_W) , DEFINIujemy PODWIĄZKĘ $H_W := \ker A \subset T_W$

SKORO ŻĄŁ W ŚWIELE ROZUMOWANIA Z Ca. 4. DOWOLNY WEKTOR PIONOWY $w \in V_v W$ MOŻEMY PRZEDSTAWIĆ W POSTACI $w = V_v \tau_v(\omega)$ DLA PEWNEGO $\omega \in V_{\pi_W(v)}$. PRZETO ILEKROĆ TAKŻE $w \in H_v W$, TO WÓWczas $\omega \equiv A \circ V_v \tau_v(\omega) = A(w) = 0_{W_{\pi_W(v)}}$, A ZATEM TAKŻE $w = V_v \tau_v(0_{W_{\pi_W(v)}}) = 0_{T_v W}$, CZYLI $V_v W \cap H_v W = \{0_{T_v W}\}$, A NADTO

$$\ker(T\pi_W|_{H_v W}) \equiv \ker T\pi_W|_{T_v W} \cap H_v W \equiv V_v W \cap H_v W = \{0_{T_v W}\},$$

Tj. $T\pi_W|_{H_v W}$ jest monomorfizmem, a ponieważ

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} H_v W &\equiv \dim_{\mathbb{R}} \ker A|_{T_v W} = \dim_{\mathbb{R}} T_v W - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} A|_{T_v W} \\ &\equiv \dim_{\mathbb{R}} T_{\pi_W(v)} B + \dim_{\mathbb{R}} T_v W_{\pi_W(v)} - \dim_{\mathbb{R}} W_v = \dim_{\mathbb{R}} T_{\pi_W(v)} B, \end{aligned}$$

zatem $T\pi_W|_{H_v W}$ jest w istocie izomorfizmem, więc też

$$TW = VW \oplus HW.$$

Rezy tym dla dowolnych $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in W$ oraz $w \in H_v W$ zachodzi

$$A(T_v U_\lambda(w)) = U_\lambda(A(w)) = U_\lambda(0_{W_v}) = 0_{W_v}, \text{ czyli } T_v U_\lambda(H_v W) \subseteq H_{U_\lambda(v)} W,$$

a skoro powyższa relacja przechodzi - w świetle wcześniejszych ustaleń - w relację...

$$\begin{aligned}
 T_{\mathbb{L}_\lambda(\sigma)} \pi_W (T_\sigma \mathbb{L}_\lambda (H_\sigma W)) &\subseteq T_{\mathbb{L}_\lambda(\sigma)} \pi_W (H_{\mathbb{L}_\lambda(\sigma)} W) = T_{\pi_W(\mathbb{L}_\lambda(\sigma))} B = T_{\pi_W(\sigma)} B \\
 &\stackrel{||}{=} T_\sigma (\pi_W \circ \mathbb{L}_\lambda) (H_\sigma W) = T_\sigma \pi_W (H_\sigma W) = T_{\pi_W(\sigma)} B, \text{ to koniecznie} \\
 T_\sigma \mathbb{L}_\lambda (H_\sigma W) &= H_{\mathbb{L}_\lambda(\sigma)} W. \quad \square
 \end{aligned}$$

NA ZAKOŃCZENIE DYSKUSJI STRUKTUR STYCZNOŚCIOWYCH NA WIĄZCE
 WEKTOROWEJ W UJĘCIU GLOBALNYM OMÓWIAMY POCINADZĄCY OD KOSZULA
 ICH OPIS SWOISTY, W SZCZEGÓLNOŚCI UNZGŁĘDNIĄJĄCY OPISANE WCZEŚNIEJ
 UŁOŻANIENIA — PATRZ: **§4.4...**

Def. 3. POWIĄZANIE KOSZULA (ZWANE TAKŻE POCHODNĄ KOSZULA)

NA WIĄZCE WEKTOROWEJ $(V, B, \mathbb{R}^{<N}, \pi_V)$ TO ODWZOROWANIE

$$\nabla^K: \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(T^*B \otimes V), \sigma \mapsto \nabla^K \sigma$$

O NASTĘPUJĄCYCH WŁASNOŚCIACH:

(PK1) ADDYTYWNOŚĆ W ARGUMENTACH $\Gamma(V)$, $\left(\begin{array}{c} \Gamma(TB) \rightarrow \Gamma(V) \\ v \mapsto \nabla_v^K \sigma \end{array} \right)$

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(V): \nabla^K(\sigma_1 + \sigma_2) = \nabla^K \sigma_1 + \nabla^K \sigma_2; \quad ((\sigma_1 + \sigma_2)(x) := \sigma_1(x) + \sigma_2(x))$$

(PK2) $C^\infty(B, \mathbb{R})$ -LINIOWAŚĆ (POPRAZĘ WARTOŚCI) W ARGUMENTACH $\Gamma(TB)$,

$$\forall f_1, f_2 \in C^\infty(B, \mathbb{R}), v_1, v_2 \in \Gamma(TB), \sigma \in \Gamma(V): \nabla_{f_1 \triangleright v_1 + f_2 \triangleright v_2}^K \sigma = f_1 \triangleright \nabla_{v_1}^K \sigma + f_2 \triangleright \nabla_{v_2}^K \sigma;$$

(PK3) REGUŁA LEIBNITZA W ARGUMENTACH $\Gamma(V)$, $\stackrel{\text{L}}{=} \mathbb{L}_{f_1} \quad \stackrel{\text{L}}{=} \mathbb{L}_{f_2}$

$$\forall f \in C^\infty(B, \mathbb{R}), \sigma \in \Gamma(V), v \in \Gamma(TB): \nabla_v^K (f \triangleright \sigma) \stackrel{\text{L}}{=} f \triangleright \nabla_v^K \sigma + v(f) \triangleright \sigma.$$

⑨

ZAPIS WŁASNOŚCI (PK3) MOŻNA UWOLNIĆ OD ARGUMENTU $\gamma \in \Gamma(TB)$ PISZĄC

$$\boxed{\nabla^k(f \triangleright \sigma) = f \triangleright \nabla^k \sigma + df \otimes_{C^\infty(B, \mathbb{R})} \sigma.}$$

MAMY KRZĘPIĄCE

Tw. 2. NA KAŻDEJ WIĄZCE WEKTOROWEJ ISTNIEJE POCHODNA KOSZULA.

D: ROZWAŻMY TRYWIALIZACJE LOKALNE $\tau_i: \pi_W^{-1}(\theta_i) \xrightarrow{\cong} \theta_i \times \mathbb{R}^n$ WIĄZKI WEKTOROWEJ $(V, B, \mathbb{R}^n, \pi_W)$ NAD POLIEM $\{\theta_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{I}(B)$. DLA DOWOLNEGO CIĘCIA $\sigma \in \Gamma(V)$, O LOKALNEJ PREZENTACJI

$$\sigma|_{\theta_i}: \theta_i \rightarrow \pi_W^{-1}(\theta_i), x \mapsto \tau_i^{-1}(x, \sigma^a(x) \triangleright e_a)$$

ZAPISANEJ PRZY UŻYCIU DOWOLNEJ BAZY $\{e_a\}_{a \in \overline{1, n}}$ PRZEBIŁŻENI $\mathbb{R}^n$ I FUNKCJI $\sigma^a \in C^\infty(\theta_i, \mathbb{R})$, ORAZ POLA WEKTOROWEGO $V \in \Gamma(TB)$ DEFINIOWANY

$$\nabla_V^{(i)} \sigma(x) := \tau_i^{-1}(x, V(\sigma^a)(x) \triangleright e_a), \quad x \in \Theta_i.$$

$$\stackrel{!}{=} V(x)(\sigma^a)$$

BEZ TRUDU PRZEKONAMY SIĘ, ŻE AUTOMATY (PK1)–(PK3) SĄ
SPŁNIONE (LOKALNIE, NAD Θ_i) PRZEZ $\nabla^{(i)}$.

W NASTĘPNEJ KOLEJNOŚCI UPewnIAMY SIĘ, ŻE KAŻDA WYPUKŁA KOMBINACJA
FUNKCYJNALNA POCODNYCH KOSZULA JEST POCODNY KOSZULA, Tj.

$\forall \varrho_1, \varrho_2 \in C^\infty(B, \mathbb{R}), \nabla^{K_1}, \nabla^{K_2}$ SPŁNIĄCE (PK1)–(PK3):

$(\varrho_1 + \varrho_2 = 1 \Rightarrow \varrho_1 \triangleright \nabla^{K_1} + \varrho_2 \triangleright \nabla^{K_2}$ SPŁNIA (PK1)–(PK3)).

JEDYNA „NIETRYWIALNA” TOŻSAMOŚĆ TO TUTAJ

$$\varrho_1 \triangleright (V(f) \triangleright \sigma) + \varrho_2 \triangleright (V(f) \triangleright \sigma) = (\varrho_1 + \varrho_2) \triangleright V(f) \triangleright \sigma = V(f) \triangleright \sigma.$$

POTĄCZYWSZY OBA POWYŻEJ FAZDY I WYBRAWIZY ROZKŁAD JEDNOŚCI $\{e_i\}_{i \in I}$ STOWARZYŻONY Z ROZKŁESEM $\{e_i\}_{i \in I}$, DOSTAJEMY JAWNE JENSONOWĄ DEFINICJĘ $\nabla_V^K \sigma := \sum_{i \in I} e_i \triangleright (\nabla_V^{(i)} \sigma|_{\sigma_i})$. $\square$

NAMY TEŻ FUNDAMENTALNE

Tw. 3. LINIOWE POWIĄZANIE EHRESMANN NA WIĄZCE WEKTOROWEJ OKREŚLA NA NIĘŻ POWIĄZANIE KOSZULA, I VICE VERSA.

D: $\Rightarrow$ W ŚWIECIE Tw. 1. NYSTARCZY POOKAŻAĆ, ŻE FORMA POWIĄZANIA LINIOWEGO $\mathcal{A} : TV \rightarrow V$ ZADAJE POCZODNĄ KOSZULĄ. ZDEFINUJMY ODWZOROWANIE $\Gamma(V) \ni \sigma \mapsto \mathcal{A} \circ T\sigma =: \nabla^{\mathcal{A}} \sigma$. BEŻ TRUDE SPRAWDZAMY, ŻE SPEŁNIA ONO AKSJOMATY (PK1)–(PK3), PRZY CZYM JEDYNYM, (12)

WTOREGO SPRAWDZENIE WYMAGA ODROBINY UWAGNOŚCI, JEST (PK3). ŻTO
OBLICZAMY

$$\begin{aligned}\nabla_v^*(f \triangleright \sigma) &\equiv A \circ T(f \triangleright \sigma)(v) = A \circ T_\sigma \mathbb{L}_f \circ T\sigma(v) + A \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \sigma + t \triangleright V(f) \triangleright \sigma) \right) \\ &\equiv \mathbb{L}_f \circ A \circ T\sigma(v) + A \circ \text{Ver} \mathbb{L}_{f \circ \sigma} (V(f) \triangleright \sigma) \\ &= f \triangleright \nabla_v^* \sigma + V(f) \triangleright \sigma \equiv (f \triangleright \nabla_v^* \sigma + df \otimes \sigma)(v). \quad \square\end{aligned}$$

⇐ NIEKAJ ∇^k BĘDZIE POCHODNĄ KOSZULA. ZREKONSTRUJEMY

NATPIERW WIERNĄ KOPIĘ $T_x B$ W $T_v W$, $v \in W_x$ LOKALNIE. W TYM
CELU DEFINIujemy ODWZOROWANIE

$$\text{Hor}_v: T_{\pi_W(v)} B \rightarrow T_v W, \quad \xi \mapsto T_{\pi_W(v)} \sigma(\xi) - \text{Ver} \mathbb{L}_v (\nabla_\xi^k \sigma)(\pi_W(v))$$

UŻYWAJĄC DOWOLNYCH: $\sigma \in \Gamma_{\text{loc}}(W): \sigma(\pi_W(v)) = v$ (PATRZ: TW.1-2.1.) (13)

ORAZ $\xi \in \Gamma_{loc}(TB) : \mathcal{X}(\pi_W(v)) = \xi$.

POWYŻSZA DEFINICJA, KORZYSTAJĄCA Z OBIEKTÓW GŁADKICH: σ I $\mathcal{X}$,
ZAGWARANTUJE NAM GŁADKOŚĆ PODNIESIENIA Pól WEKTOROWYCH Z BAZY
WIAZKI DO JEJ PROJEKTUMU TOTALNEJ. POZOSTAŁE SĄDYMIE UPRAWNIĆ SIĘ,
ŻE OWO PODNIESIENIE MA POŻĄDANE WŁAŚNOŚCI I W DANYM PUNKCIE
NIE ZALEŻY OD WYBORÓW DODATKOWYCH: σ I $\mathcal{X}$ INACZEJ JAK
TYLKO POPRZĘŻ WARTOŚCI W PUNKCIE $\pi_W(v) =: \underline{x}$.

ZACZYNAJĄC OD TEGO PIERWOTNEGO ASPEKTU

1° Hor_v JEST PRAWNIE $\mathbb{R}$ -LINIOWE. $\stackrel{\circ}{=}$

2° $T_v \pi_W (\text{Hor}_v(\xi)) = T_{\underline{x}} (\pi_W \circ \sigma)(\xi) - (T_v \pi_W \circ \text{Ver } \mathcal{L}_\sigma) (\nabla_{\mathcal{X}}^k \sigma)(x)$
 $= T_{\underline{x}} \text{id}_{\text{Dom}(\sigma)}(\xi) = \xi$, CZYLI Hor_v JEST INTEKTYWNE, (14)

A zatem wystarczy na obraz. Przy tym tego przekształcenia z $V_U W$ jest postaci $\text{Hor}_U(\xi) \in \text{Ker } T_U \pi_{UW}$, czyli spełnia $0_{T_x B} \equiv T_U \pi_{UW}(\text{Hor}_U(\xi)) = \xi$, więc też $\text{Hor}_U(\xi) = 0_{T_U W}$ z uwagi 1°. Jest zatem $\text{Hor}_U(T_x B) \cap V_U W = \{0_{T_U W}\}$, co na mocy bilansu wymiarów daje $\text{Hor}_U(T_x B) \oplus V_U W = T_U W$.

Następnie dowodzimy zależności Hor_U od σ poprzez $\sigma(x) = v$ (zależność od $\mathcal{X}$ poprzez $\mathcal{X}(x) = \xi$ jest oczywista - patrz (PK2)).

1° Najpierw sprowadzamy nasze rozważania do dziedzin trywializacji lokalnej.

Rozważmy $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_{\text{loc}}(W)$: $\exists \underset{x}{\underset{U}{\Theta_x}} \in \mathcal{I}(B)$: $(\sigma_2 - \sigma_1)|_{\Theta_x} = 0 \wedge \xi(x) = v = \sigma_1(x)$.

DOBRAWISZY FUNKCJĘ TYPU UŁUKU (PATRZ: Niezb. różn. st. 15.) $\mathcal{I}_x$
 o własnościach $\text{supp}(\mathcal{I}_x) \subset \mathcal{O}_x$ i $\exists \mathcal{U}_x \subset \mathcal{O}_x : \mathcal{I}|_{\mathcal{U}_x} = 1$,
 STWIERDZAMY $\mathcal{I}_x \triangleright (\sigma_2 - \sigma_1) \equiv 0$, A ZATEM TAKŻE

$$\nabla_{\mathcal{X}}^k (\mathcal{I}_x \triangleright (\sigma_2 - \sigma_1))(x) \equiv \nabla_{\mathcal{X}}^k (O(\cdot))(x) \equiv \nabla_{\mathcal{X}}^k (\mathbb{L}_0 \circ O(\cdot))(x)$$

$$\stackrel{\substack{\text{R-LINIOWOŚĆ} \\ \text{3 DRUGIEJ STRONY}}}{=} \mathbb{L}_0 (\nabla_{\mathcal{X}}^k (O(\cdot))(x)) \equiv 0_{\mathbb{V}_x}$$

$$\stackrel{1}{=} (\mathcal{I}_x \triangleright \nabla_{\mathcal{X}}^k (\sigma_2 - \sigma_1))(x) + (\mathcal{X}(\mathcal{I}_x) \triangleright (\sigma_2 - \sigma_1))(x)$$

$$\stackrel{1}{=} \mathcal{I}_x(x) \triangleright \nabla_{\mathcal{X}}^k (\sigma_2 - \sigma_1)(x) + \mathcal{X}(\mathcal{I}_x)(x) \triangleright (\sigma_2 - \sigma_1)(x) \stackrel{0}{=} \nabla_{\mathcal{X}}^k (\sigma_2 - \sigma_1)(x).$$

JAKO ŻE JEST TEŻ $\mathcal{I}_x(\sigma_2 - \sigma_1) \equiv 0$, PRZETO OSTATYCZNIE

$$\text{Hor}_V^{(\sigma_2)}(\xi) = \text{Hor}_V^{(\sigma_1)}(\xi). \quad (16)$$

DALSZE ROZUMOWANIE PROWADZIMY W OBRAZIE LOCALNEJ TRZYWIAŁIZACJI
NA OTOCZENIU σ_i $\exists x$.

2° NIECHAJ $y \in \sigma_x \cap \sigma_i$, A WÓWZAS $(\tau_i \circ \sigma)(y) = (y, \sigma_i^*(y) \triangleright e_a)$
 $\equiv (y, \sigma_i(y))$,

CZYLI - Z RAJONU IR-LINIOWAŚCI τ_i -

$$\sigma(y) = \llcorner_{\sigma_i^*(y)} (\tau_i^{-1}(y, e_a)) \underset{=: \varepsilon_a^{(i)}(y)}{=} \quad \otimes$$

WOBEC TEGO ZACHODZI

$$T_x \sigma(\xi) \equiv T_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1} (T_x (\tau_i \circ \sigma)(\xi)) = T_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1} (\xi, T_x \sigma_i(\xi))$$

$$= T_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1} (\xi, 0_{T_{\tau_i(v)} \mathbb{R}^{*N}}) + T_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1} (0_{T_x B}, T_x \sigma_i(\xi))$$

$\underset{=: (x, w)}{=}$

TO WEKTOR JESTYNY DO WEDLEGA
TYPOWEGO, WIDZIE JEST
PRZESTRZENI WEKTOROWA!

$$= T_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1} (\xi, 0_{T_{\tau_i(v)} \mathbb{R}^{*N}}) + T_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x, w + t \triangleright T_x \sigma_i(\xi)) \right) \quad \begin{matrix} T_{\tau_i(v)} \mathbb{R}^{*N} \simeq \mathbb{R}^N \\ \text{(POR.: 12.4.)} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
&= T_{\zeta(u)} \tau_i^{-1}(\xi, 0_{T_{\tau_i(\xi)} \mathbb{R}^{xN}}) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tau_i^{-1}(x, u + t \triangleright T_x \sigma_i(\xi)) \leftarrow \mathbb{R}\text{-LINIOWE!} \\
&= T_{\zeta(u)} \tau_i^{-1}(\xi, 0_{T_{\tau_i(\xi)} \mathbb{R}^{xN}}) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\tau_i^{-1}(x, u) + t \triangleright \tau_i^{-1}(x, T_x \sigma_i(\xi)) \right) \\
&= T_{\zeta(u)} \tau_i^{-1}(\xi, 0_{T_{\tau_i(\xi)} \mathbb{R}^{xN}}) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(u + t \triangleright \tau_i^{-1}(x, T_x \sigma_i(\xi)) \right) \\
&\equiv T_{\zeta(u)} \tau_i^{-1}(\xi, 0_{T_{\tau_i(\xi)} \mathbb{R}^{xN}}) + \text{Vec}_{\sigma}(\tau_i^{-1}(x, T_x \sigma_i(\xi))) \\
&= T_{\zeta(u)} \tau_i^{-1}(\xi, 0_{T_{\tau_i(\xi)} \mathbb{R}^{xN}}) + (\text{Vec}_{\sigma} \circ L_{T_x \sigma_i^a(\xi)})(\varepsilon_a^{(i)}(x))
\end{aligned}$$

OSTRZEGNIĘCIE WŁIŚC

$$\begin{aligned}
\text{Hor}_V(\xi) &= T_{\zeta(u)} \tau_i^{-1}(\xi, 0_{T_{\tau_i(\xi)} \mathbb{R}^{xN}}) + (\text{Vec}_{\sigma} \circ L_{T_x \sigma_i^a(\xi)})(\varepsilon_a^{(i)}(x)) - \text{Vec}_{\sigma}(\nabla_{\mathcal{E}}^k(\sigma_i^a \triangleright \varepsilon_a^{(i)})(x)) \\
&\stackrel{(PK3)}{\uparrow} = T_{\zeta(u)} \tau_i^{-1}(\xi, 0_{T_{\tau_i(\xi)} \mathbb{R}^{xN}}) - (\text{Vec}_{\sigma} \circ L_{\sigma_i^a(x)})(\nabla_{\mathcal{E}}^k \varepsilon_a^{(i)})(x)
\end{aligned}$$

TUTAJ TLEWICATA SWOISTWOŚĆ
 σ - POPRZĘŻ WARTOŚĆ W x !



Cor. 1. NA KAŻDEJ WIĄZCE WEKTOROWEJ ISTNIJE POWIĄZANIE LINIOWE.

D: Tw. 2. $\wedge$ Tw. 3. $\square$

ZWIĘCZENIEM DYSKUSJI POWIĄZANIA W OBRAZIE GLOBALNYM JEST ANALIZA ZACHOWANIA PÓDKODNEJ KOSZULA WZGLĘDEM MORFIZMÓW WIĄZEK WEKTOROWYCH. PROWADZIMY TĄ NA GRUNCIE OBSERWACJI DOTYKAJĄCEJ PROSTEJ RELACJI POMIĘDZY PÓDKODNĄ KOSZULĄ I PÓDKODNĄ KOWARIANTNĄ:

$$\nabla_{\mathcal{E}}^k \sigma(x) = \text{Ver} \mathcal{I}_{\sigma(x)}^{-1} (\nabla_{\mathcal{E}}^{(k)} \sigma(x)) \iff \textcircled{n} \Big|_{T_v W} = \text{Ver} \mathcal{I}_v \circ \mathcal{A} \Big|_{T_v W}$$

ORAZ PÓDKODNĄ ANALIZĄ ZACHOWANIA ISOMORFIZMÓW $\text{Ver} \mathcal{I}$, WZGLĘDEM RZĘDOWYCH MORFIZMÓW WIĄZEK WEKTOROWYCH: NIECHĄŻ ZATEM $\overline{\Phi}: \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ I NIECH $v_i, w_i \in \mathbb{V}_{1,x}$. OZNACZMY ODPOWIEDNIE ISOMORFIZMY DLA $\mathbb{V}_a$ JAKO $\text{Ver} \mathcal{I}^{(a)}$.

OBLICZAMY

$$\begin{aligned} \text{Ver}_{\Phi(\sigma)}^{(1)}(\Phi(w)) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\Phi(\sigma) + t\Phi(w)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi(\sigma + t\omega) \\ &= T_\sigma \Phi \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\sigma + t\omega) \right) = T_\sigma \Phi \circ \text{Ver}_\sigma^{(1)}(w) \quad , \text{CNI} \end{aligned}$$

$$\underline{\text{Ver}_{\Phi(\sigma)}^{(2)} \circ \Phi = T_\sigma \Phi \circ \text{Ver}_\sigma^{(1)}}$$

STĄD JUŻ WPROST WNIKA

Skł. 2. NIECH $(V_a, B_a, \mathbb{R}^{x_{N_a}}, \pi_{W_a}), a \in \{1, 2\}$ BĘDĄ WIĄZKAMI WEKTOROWYMI
O PODOBNYM KOSZULU $\nabla^{K_a} \equiv \text{Ver}_a^{(1)-1} \circ \nabla^{\otimes_a}$ NIECH $V_1 \xrightarrow{\Phi} V_2$ BĘDZIE
MORFIZMEM WIĄZKI WEKTOROWYCH
O SKŁADOWEJ BIAJOWEJ $f \in \text{Diff}(B_1, B_2)$.

$$\begin{array}{ccc} \pi_{W_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{W_2} \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

$$\forall \sigma \in \Gamma(W_1), \forall v \in \Gamma(TB_1) : \Phi(\nabla_v^{K_1} \sigma) = \nabla_{f_* v}^{K_2} (\Phi \circ \sigma \circ f^{-1}).$$

D: LICZNY WPROST:

$$\begin{aligned}\Phi(\nabla_V^{k,1}\sigma) &= (\Phi \circ \text{Ver} \mathcal{L}^{(1,1)}) \circ \nabla_V^{(2)} \sigma = \text{Ver} \mathcal{L}_{\mathcal{L}^{(1)}}^{(2,1)} \circ T\Phi \circ \mathbb{Q}_1 \circ T\sigma(V) = \text{Ver} \mathcal{L}_{\mathcal{L}^{(1)}}^{(2,1)} \circ \mathbb{Q}_2 \circ T\Phi \circ T\sigma(V) \\ &= (\text{Ver} \mathcal{L}_{\mathcal{L}^{(1)}}^{(2,1)} \circ (\mathbb{Q}_2 \circ T(\Phi \circ \sigma \circ f^{-1}))) (Tf(V)). \quad \square\end{aligned}$$

ABSTRAKCYJNE DEFINICJE I KONSTRUKCJE GLOBALNE – POWIAZANIA, JEGO URZĘWNIENY I ODNOŚNEJ POŁKODNOŻY KOWARIANTNEJ/KOSULA-POZWALAJĄ PRZECZYNYNIE I ZWIĘŻLE, A PRZY TYM GŁĘBOKO SKONCEPTUALIZOWAĆ REPREZENTOWANE PRZEJ NIS BYTY GEOMETRYCJNE I ZBADAĆ ICH – TAKŻE ABSTRAKCYJNE, GLOBALNE – WŁAŚNOŚCI. RZADKO NATOMIAST WPROST POZWALAJĄ ODPOWIEDZIEĆ NA PYTANIA NATURY ILOŚCOWEJ – JAK TO O WARTOŚĆ, CZY NAWET TYLKO NIEZEROWAĆ KRZYWIZNY POWIAZANIA – PRZED KTÓRYMI STAWIA NAS FIZYKA, A NADTO – „MASKUJĄ”

OBIEKTY O PIERWSZORZĘDNYM ZNACZENIU FIZYKALNYM — JAK
CHŁÓBY POLA GECKOWANIA (CZYLI NIEKANONICZNE SKŁADOWE FORMY
POWIĄZANIA W OBRAZIE TRYWIAUZACJI LOCALNEJ). TE UKRYTE WĄTKI
ODNAJDZIEMY W OPISIE LOCALNYM, KTÓRYM ZAJMIEMY SIĘ NA JAKONOGNIE.

ZACZNIEMY OD SAMEJ PODMUDNEJ KOSZULA: OTD FORMULA ~~17~~ JE § 17.
W PODĄCZENIU Z REZULTAT LEIBNIZA (PK3) PRZECŁDZA O TYM,
JE PEŁNA INFORMACJA LOCALNA O TEJ PODMUDNEJ JEST ZAPISANA
W OBIEKTACH, O KTÓRYCH MOWI

Def. 4. NIECHAJ $\{O_i\}_{i \in I}$ BĘDZIE POWIĄCZEM TRYWIAUZUJĄCYM
DUA WIĄZKI WEKTOROWEJ $(W, B, \mathbb{R}^N, \pi_W)$ I JARAŻEM — POWIĄCZEM
WSPÓŁRZĘDNIOWYM DUA JEJ BĄZY B. NIECH TEŻ $\{\varepsilon_a^{(i)}\}_{a \in I, i \in \bar{N}}$ BĘDZIE

BAZĄ $C^0(\theta_i, \mathbb{R})$ -MODUŁU $\Gamma(W|_{\theta_i})$, WYZNACZANĄ PRZEZ TRYWIALIZACJĘ

$\tau_i: \pi_W^{-1}(\theta_i) \xrightarrow{\cong} \theta_i \times \mathbb{R}^N$ WEDŁE WZORU $\varepsilon_a^{(i)} = \tau^{-1}(\cdot, e_a)$, I NIECH

$\kappa_i = (x_i^\mu)_{\mu \in \overline{1, D}}: \theta_i \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^{x D}$, $D = \dim B$ BĘDZIE LOKALNĄ MAPĄ.

WÓWczas SYMBOLS CHRISTOFFELA POWIĄZANIA KOSZULA ∇^k NA W

NAD θ_i WZGL. BAZ $\{\partial_\mu^{(i)}\}_{\mu \in \overline{1, D}}$ W $\Gamma(TB|_{\theta_i})$ I $\{\varepsilon_a^{(i)}\}_{a \in \overline{1, N}}$ W $\Gamma(W|_{\theta_i})$
TO RODZINA ODWZOROWAŃ GŁADKICH ${}^{(i)}\Gamma_{\mu a}^b: \theta_i \rightarrow \mathbb{R}$ ZADANYCH WZORAMI

$$\boxed{\nabla_{\partial_\mu^{(i)}}^k \varepsilon_a^{(i)} =: {}^{(i)}\Gamma_{\mu a}^b \circ \varepsilon_b^{(i)}}.$$

NALEŻY PODKREŚLIĆ, ŻE WSKAŹNIKI NIESIONE PRZEZ ${}^{(i)}\Gamma_{\mu a}^b$ - TEN Z BAZY: μ I TEN Z WŁÓKNA:
 a I b - MAJĄ ZASADNICZO ODMIENNY STATUS (TJ. KODYŃĄ ZASADNICZO ODMIENNE
WŁASNOŚCI TRANSFORMACYJNE), O GYM MOWI...

Slw. 3. WŁASNOŚCI TRANSFORMACYJNE SYMBOLI CHRISTOFFELA WZGLĘDEM

ZMIANY WSPÓŁZĘDNYCH: $x_i^\mu \mapsto \varphi^a(x) =: y_i^a$ ORAZ ZMIANY BAZY

PRZESTRZENI CIĘĆ LOKALNYCH: $\varepsilon_a^{(i)}(\cdot) \mapsto {}^{(i)}A_r^a(\cdot) \circ e_a^{(i)}(\cdot) =: f_r^{(i)}(\cdot)$

OPISUJE FORMUŁA:

$$\left[\frac{\partial \varphi^a}{\partial x_i^\mu} \right]^{(i)} \Gamma_{\alpha r}^s = {}^{(i)}A_b^{-1 s} \left({}^{(i)}\Gamma_{\mu a}^b {}^{(i)}A_r^a + \frac{\partial {}^{(i)}A_r^b}{\partial x_i^\mu} \right).$$

W WÓDREZ ${}^{(i)}\Gamma_{\mu a}^b$ SA POPRZEDNIO WPROWADZONYMI SYMBOLAMI CHRISTOFFELA WZGLĘDEM BAZ $\{\partial_\mu^{(i)}\}_{\mu \in \overline{1,D}}$ I $\{\varepsilon_a^{(i)}\}_{a \in \overline{1,N}}$, NATOMIAST ${}^{(i)}\Gamma_{\alpha r}^s$ SA ICH ODPOWIEDNIKAMI WZGLĘDEM BAZ $\{\partial_\alpha^{(i)}\}_{\alpha \in \overline{1,D}}$ I $\{f_r^{(i)}\}_{r \in \overline{1,N}}$.

D: LICZYMY WPROST Z DEFINICJI I NA PODSTAWIE ALGORYTMÓW (PK1)-(PK3):

$${}^{(i)}\Gamma_{\mu a}^b \triangleright \varepsilon_b^{(i)} = {}^{(i)}\Gamma_{\mu a}^b \cdot {}^{(i)}A^{-1s}_b \triangleright f_s^{(i)}$$

$$\stackrel{(1)}{=} \nabla_{\partial_\mu^{(i)}}^k \varepsilon_a^{(i)} = \nabla_{\frac{\partial \varphi^d}{\partial x_i^{\mu}} \partial_\alpha^{(i)}}^k ({}^{(i)}A^{-1r}_a \triangleright f_r^{(i)}) \stackrel{(p12)}{=} \frac{\partial \varphi^d}{\partial x_i^{\mu}} \triangleright \nabla_{\partial_\alpha^{(i)}}^k ({}^{(i)}A^{-1r}_a \triangleright f_r^{(i)})$$

$$\stackrel{(p13)}{=} \frac{\partial \varphi^d}{\partial x_i^{\mu}} \triangleright \left(\partial_\alpha^{(i)} {}^{(i)}A^{-1r}_a \triangleright f_r^{(i)} + {}^{(i)}A^{-1r}_a \triangleright \nabla_{\partial_\alpha^{(i)}}^k f_r^{(i)} \right) = \partial_\mu^{(i)} {}^{(i)}A^{-1r}_a \triangleright f_r^{(i)} + \frac{\partial \varphi^d}{\partial x_i^{\mu}} {}^{(i)}\Gamma_{\alpha r}^s {}^{(i)}A^{-1r}_a \triangleright f_s^{(i)}$$

$$= -{}^{(i)}A^{-1r}_b \partial_\mu^{(i)} {}^{(i)}A^b_s {}^{(i)}A^{-1s}_a \triangleright f_r^{(i)} + \frac{\partial \varphi^d}{\partial x_i^{\mu}} {}^{(i)}\Gamma_{\alpha r}^s {}^{(i)}A^{-1r}_a \triangleright f_s^{(i)}$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi^d}{\partial x_i^{\mu}} {}^{(i)}\Gamma_{\alpha r}^s - {}^{(i)}A^{-1s}_b \partial_\mu^{(i)} {}^{(i)}A^b_r \right) \cdot {}^{(i)}A^{-1r}_a \triangleright f_s^{(i)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \varphi^d}{\partial x_i^{\mu}} {}^{(i)}\Gamma_{\alpha r}^s - {}^{(i)}A^{-1s}_b \frac{\partial {}^{(i)}A^b_r}{\partial x_i^{\mu}} = {}^{(i)}A^{-1s}_b {}^{(i)}\Gamma_{\mu a}^b {}^{(i)}A^a_r$$

CO JEST WŁAŚNIE POSTULOWANA FORMUŁA. $\square$

STWIERDZAMY JAKIEM, ŻE INDEKS BAZOWY μ JEST JEDYNYM INDEKSEM TENSOROWYM (KOWARIANTNYM), DWA POZOSTAŁE MAJĄ NATURĘ...

APINIENIA, CO PODURZŁA

Coz. 2. TRANSFORMACJA SYMBOLI CHRISTOFFELA WZGLĘDEM ZMIANY BAZY

PRZESTRZENI CIĘĆ LOKALNYM: $\varepsilon_a^{(i)}(\cdot) \mapsto {}^{(i)}A_r^a(\cdot) \circ e_a^{(i)}(\cdot) =: f_r^{(i)}(\cdot)$ MA CHARAKTER

APINIENIA (i) $\Gamma_{\alpha\tau}^s = {}^{(i)}A_b^{-1} \Gamma_{\mu\alpha}^b {}^{(i)}A_r^a + {}^{(i)}A_b^{-1} \frac{\partial {}^{(i)}A_r^b}{\partial x_i^a}$

(ii) $\Gamma_{\alpha\tau}^s$ (TENSOROWY (3 NIEZWYKŁOWOŚĆ))

$\Gamma_{\mu\alpha}^b$ PRZYCZYNEW TENSOROWY (TYPU (1,1))

$\frac{\partial {}^{(i)}A_r^b}{\partial x_i^a}$ PRZYCZYNEW NIEZWYKŁOWY

DOTYCZĄC UŻYWANY ZAPIS JEST W OCZYSTY SPOŚÓB PRZELĄŻONY (WSKAŹNIKOWO), CO OBNIŻA JEGO CZYTELNOŚĆ. MOŻNA TEMU ZARADZIĆ WPROWADZAJĄC ZAPIS MACIERZOWY...

KORZYSTAJĄC Z WPROWADZONEJ UPRZĘDMO BAZY $\{e_a\}_{a \in \overline{1, N}}$ w $\mathbb{R}^{xN}$
 ORAZ BAZY WYŁĘDEK NIEJ DUALNEJ $\{\varphi^a\}_{a \in \overline{1, N}}$ w $\mathbb{R}^{xN*} \cong \mathbb{R}^{* \times N}$,
 DEFINIujemy

$$\varphi^a(e_b) = \delta^a_b$$

$${}^{(1)}\Gamma^b_{\mu a} \varphi^a \otimes e_b$$

(*) MACIERZE FORM CHRISTOFFELA ${}^{(1)}\Gamma := {}^{(1)}\Gamma^b_{\mu a} dx^\mu_i \otimes (\varphi^a \otimes e_b) \equiv {}^{(1)}\Gamma_\mu dx^\mu_i$

0 WŁASNOŚCI ${}^{(1)}\Gamma^b_{\mu a}(x) \triangleright \varepsilon^{(i)}_b(x) = \tau_i^{-1}(x, {}^{(1)}\Gamma^b_{\mu a}(x) \triangleright e_b) \equiv \tau_i^{-1}(x, {}^{(1)}\Gamma_\mu(x)(e_a))$;

(**) MACIERZE 1-KOŁKOW PRZĘJŚCIA $g_{ij} := g_{ijab} \varphi^a \otimes e_b$, 0 WŁASNOŚCI

- ZAPISANEY DLA DOWOLNEGO $x \in \mathcal{O}_{ij}$ -

$$\varepsilon^{(i)}_a(x) \equiv \tau_j^{-1}(x, e_a) = \tau_i^{-1}(x, g_{ij}(x)(e_a)) = \mathbb{L}_{g_{ijab}(x)}(\tau_i^{-1}(x, e_b)) \equiv \mathbb{L}_{g_{ijab}(x)}(\varepsilon^{(i)}_b(x))$$

DZIĘKI POWYŻSZYM MOŻEMY WYSTOWIĆ W SPOSOB ZWIĘZŁY...

(27)

Slw. 4. AFINIĆNE PRAWO ZŁYCIA MACIERZY FORM CHRISTOFFELA:

$\forall x \in O_i$: ${}^{(i)}\Gamma(x) = \text{Ad}_{g_{ij}(x)}({}^{(i)}\Gamma(x)) - dg_{ij}(x) \cdot g_{ij}(x)^{-1}.$

D: LICZYMY WPROST - DLA $x^\mu \equiv x^\mu_i \equiv x^\mu_j$ (WSPÓLNE WSPÓŁRZĘDNE!) -

$$\mathbb{L}_{({}^{(i)}\Gamma_{\mu a}^d(x))}(\varepsilon_d^{(j)}(x)) \equiv \nabla_{\partial_\mu}^k \varepsilon_a^{(j)}(x) \stackrel{**}{=} \nabla_{\partial_\mu}^k (\mathbb{L}_{g_{ijac}}(\varepsilon_c^{(i)}))(x)$$

$$\stackrel{(PK3)}{=} \mathbb{L}_{\partial_\mu g_{ijac}(x)}(\varepsilon_c^{(i)}(x)) + \mathbb{L}_{g_{ijac}(x)} \circ \mathbb{L}_{\Gamma_{\mu c}^b}(x)(\varepsilon_b^{(i)}(x))$$

$$= \mathbb{L}_{\partial_\mu g_{ijac}(x) g_{jicd}(x)}(\varepsilon_d^{(j)}(x)) + \mathbb{L}_{g_{ijac}(x) \Gamma_{\mu c}^b(x) g_{jibd}(x)}(\varepsilon_d^{(j)}(x)),$$

CZYLI $g_{ijac} \Gamma_c^b g_{jibd}^{-1} + dg_{ijac} \cdot g_{jicd}^{-1} = {}^{(i)}\Gamma_a^d$. JAK WYNIK MA SIĘ

DO DOWODZONEJ TEZY? SPRAWDZAMY! (28)

EWALUujemy obie strony dowodzonej równości na e_a , zmieniając po drodze $i \leftrightarrow j$ i wykorzystując kochliwność g_{ij} :

$$\begin{aligned} (i) \quad \Gamma_a^d \triangleright e_d &\equiv {}^{(i)}\Gamma(e_a) = \text{Ad}_{g_{ji}}({}^{(i)}\Gamma)(e_a) - dg_{ji} \cdot g_{ji}^{-1}(e_a) \\ &= g_{ji}^{-1} \cdot {}^{(i)}\Gamma \cdot g_{ji}(e_a) + g_{ji}^{-1} dg_{ji}(e_a) \\ &= g_{jiab} {}^{(i)}\Gamma_b^c g_{ji}^{-1}{}^c{}_d \triangleright e_d + dg_{jiab} g_{ji}^{-1}{}^c{}_d \triangleright e_d, \end{aligned}$$

co odzwierciedla postulowaną relację. $\square$

W analogiczny sposób możemy zanalizować zachowanie symbolu CHRISTOFFELA pod działaniem morfizmów wiązek wektorowych, które dla uproszczenia będziemy rozwiązać wyłącznie w wersji wertykalnej (tj. nad id_B)...

Slw. 5. AFINIŻNE PRAWO TRANSFORMACYJNE MACIERZY FORM CHRISTOFFELA:

NIECHAJ $V_1 \xrightarrow{\Phi} V_2$ BĘDZIE MORFIZMEM (WERTYKALNYM) WIĄZKI

$\downarrow$ $\downarrow$ WEKTOROWYCH Z POŁĄŻANIEM (O ODWŁASNYCH
 $B = B$ MACIERZACH FORM CHRISTOFFELA ${}^{(i)}\Gamma^\alpha, \alpha \in \{1, 2\}$),

O DANYCH LOKALNYCH $\tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1-1}(x, e_a) =: (x, h_i(x)(e_a)), i \in \overline{1}$,
 $h_i: \Theta_i \rightarrow \text{Mat}(N_1 \times N_2; \mathbb{R})$ NAD POŁĄCZNIEM (WSPÓŁ)TRYWIALIZUJĄCYM BAZY
 $\{\partial_i\}_{i \in \overline{1}}$ (NAD KTÓRYM MAMY ODWŁASNE TRYWIALIZACJE $\{\tau^\alpha\}_{i \in \overline{1}, \alpha \in \{1, 2\}}$).
 ZAPISZMY $h_i \equiv h_{i\alpha r} \varphi^\alpha \otimes e_r$, GDZIE $h_{i\alpha r}: \Theta_i \rightarrow \mathbb{R}$, $\{\varphi^\alpha\}_{\alpha \in \overline{1, 2}}$ JEST
 BAZĄ DUALNĄ DO PEWNEJ BAZY WŁOŚNA TYPOWEGO $\mathbb{R}^{N_1}$ WIĄZKI V_1 ,
 $\{e_r\}_{r \in \overline{1, N_2}}$ JEST PEWNĄ BAZĄ WŁOŚNA TYPOWEGO $\mathbb{R}^{N_2}$ WIĄZKI V_2 .
 WÓWZAS $\forall x \in \Theta_i: {}^{(i)}\Gamma^2(x) \circ h_i(x) = h_i(x) {}^{(i)}\Gamma^1(x) - dh_i(x)$. (30)

D: LICZYMY, ANALOGICZNIE JAK W DOWODZIE Skł. 4., W NOTACJI $\varepsilon_a^{(i)} = \tau_i^{1-1}(\cdot, e_a)$ i $f_r^{(i)} = \tau_i^{2-1}(\cdot, f_r)$, GDZIE $\{e_a\}_{a \in \overline{1, N_1}}$ J/W, A $\{f_r\}_{r \in \overline{1, N_2}}$ JEST DOWOLNĄ BAZĄ WŁÓKNA TYPOWEGO $\mathbb{R}^{xN_2}$ WIĄZKI W_2 ,

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_\mu^{(i)}}^{k,2} (\Phi \circ \varepsilon_a^{(i)})(x) &= \llbracket_{\partial_\mu^{(i)} h_{ias}(x)}^{(2)} (f_s^{(i)}(x)) + \llbracket_{h_{iar}(x)}^{(2)} \circ \llbracket_{\mu r^{(2)} s(x)}^{(2)} (f_s^{(i)}(x)) \\ \stackrel{\text{Skł. 2.}}{\llbracket} (\Phi \circ \nabla_{\partial_\mu^{(i)}}^{k,1})(\varepsilon_a^{(i)})(x) &= \Phi(\llbracket_{\mu a^{(i)} \Gamma_{\mu a}^{1b}(x)}^{(i)}(\varepsilon_b^{(i)}(x))) = (\llbracket_{\mu a^{(i)} \Gamma_{\mu a}^{1b}(x)}^{(i)} \circ \Phi)(\varepsilon_b^{(i)}(x)) \\ &= \llbracket_{\mu a^{(i)} \Gamma_{\mu a}^{1b}(x) h_{ib_s}(x)}^{(i)}(f_s^{(i)}(x)), \text{ ZATEM} \end{aligned}$$

$${}^{(i)}\Gamma_{\mu a}^{1b}(x) h_{ib_s}(x) = \partial_\mu^{(i)} h_{ias}(x) + h_{iar}(x) {}^{(i)}\Gamma_{\mu r}^{2s}(x).$$

ROZUMIĄC JAK W PRZECIEJ CZĘŚCI DOWODU Skł. 4., ODTWARZAMY TEŻ DOWODZONEGO STWIERDZENIA. $\square$

NA MARGINESIE NASZYCH BIEŻĄCYCH ROZWAŻAŃ MOŻEMY WYPISAĆ FORMUŁĘ NA POCHODNĄ KOSZULA W OBRAZIE TRYWIALIZACJI LOKALNEJ DLA $\sigma = \mathbb{L}_{\sigma_i^a}(\varepsilon_a^{(i)})$ (PATRZ: ~~§~~ NA Str. 17.):

ORAZ $V \in \Gamma(TB)$, $V|_{\partial \cdot} = V^\mu \partial_\mu^{(i)}$:

$$\nabla_V^k \sigma = \mathbb{L}_{V^\mu} \circ \nabla_{\partial_\mu^{(i)}}^k (\mathbb{L}_{\sigma_i^a}(\varepsilon_a^{(i)})) = \mathbb{L}_{V^\mu} \circ (\mathbb{L}_{\partial_\mu^{(i)} \sigma_i^b} + \mathbb{L}_{\sigma_i^a (i) \Gamma_{\mu a}^b}) (\varepsilon_b^{(i)}),$$

CZYLI $\nabla_V^k \sigma$ _(lok.) $= V^\mu (\partial_\mu \sigma_i^a + (i) \Gamma_{\mu b}^a \sigma_i^b) \circ \varepsilon_a^{(i)}$.

NA ZAKOŃCZENIE NASZYCH DOCEKANÍ USTALIMY ZWIĄZEK POMIĘDZY KRZYWIZNĄ POWIĄZANIA (PATRZ: Def. 1.7.) A SYMBOLAMI CHRISTOFFELA. W PIERWSZYM KROKU USTALIM ZWIĄZEK MIĘDZY TYMI OSTATNIMI A FORMĄ POWIĄZANIA W OBRAZIE TRYWIALIZACJI LOKALNEJ.

Stw. 6. FORMA POWIĄZANIA (LINIOWEGO) $\odot$ NA WIĄZCE WEKTOROWEJ
 PRZYJMUJE W OBRAZIE TRYWIALIZACJI LOKALNEJ $\epsilon_i: \pi_w^{-1}(O_i) \xrightarrow{\cong} O_i \times \mathbb{R}^{*N}$
 (i w DOTYKOWYCH OZNACZENIACH) POSTAĆ

$$\underline{\odot_i}(x, v) := (\tau_i^{-1})^* \odot(x, v) \equiv (\tau_i \circ \odot \circ \tau_i^{-1})(x, v) = \text{id}_{\mathbb{R}^{*N}} + A_i^a(x, v) \otimes e_a,$$

GDZIE $A_i^a(x, v) \in T_x^* B$ I GDZIE DOWONALISMY STANDARDOWEGO

UTOŻSAMIENIA $T_v \mathbb{R}^{*N} \simeq \mathbb{R}^{*N} \ni e_a$. PRZY TYM 1-FORMY A_i^a
 ZALEŻĄ OD ARGUMENTU $v \in \mathbb{R}^{*N}$ (WE WŁOKNIE TYPOWYM) $\mathbb{R}$ -LINIOWO, T.J.

$$A_i^b(x, v^a \otimes e_a) = v^a \otimes A_i^b(x, e_a),$$

* NADTO ZACHODZI TOŻSAMOŚĆ (W ZAPISIE JAK WYŻSZNIEJ)

$$\partial_\mu^{(i)} \lrcorner A_i^b(x, e_a) = {}^{(i)}\Gamma_{\mu a}^b(x).$$

D: ZACZNIJMY OD USTALENIA OBRAZU STYCZNEGO PODNIESIENIA
 T_{λ} DZIAŁANIA SKALARÓW $\mathbb{R} \ni \lambda$ NA TV W OBRAZIE TRYWIALIZACJI
 LOCALNEJ WZGLĘDEM WZMIANKOWANEGO UTOJŚMIENIA $T_v \mathbb{R}^{xN} \simeq \mathbb{R}^{xN}$.
 OTD MAMY — PO PIERWSZE: $\mathbb{L}_{\lambda}(\tau_i^{-1}(x, v)) = \tau_i^{-1}(x, \lambda(v))$, GDZIE
 $\lambda(v) \equiv \lambda \triangleright v$ JEST STANDARDOWYM DZIAŁANIEM $\mathbb{R}$ NA $\mathbb{R}^{xN}$;
 — PO DRUGIE — DLA DOWOLNYCH $v, w \in \mathbb{R}^{xN}$:

$$T_v \mathbb{L}_{\lambda} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (v + t \triangleright w) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathbb{L}_{\lambda} (v + t \triangleright w) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\mathbb{L}_{\lambda}(v) + t \triangleright (\mathbb{L}_{\lambda}(w))),$$

ZATEM MAMY
 (DIAGRAM PRZEMIENNY)

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (v + t \triangleright w) & \xrightarrow{T_v \mathbb{L}_{\lambda}} & \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\mathbb{L}_{\lambda}(v) + t \triangleright \mathbb{L}_{\lambda}(w)) \\
 \updownarrow T_v \mathbb{R}^{xN} \simeq \mathbb{R}^{xN} & \Downarrow & \updownarrow T_{\mathbb{L}_{\lambda}(v)} \mathbb{R}^{xN} \simeq \mathbb{R}^{xN} \\
 v & \xrightarrow{\mathbb{L}_{\lambda}} & \mathbb{L}_{\lambda}(w)
 \end{array}$$

CZYLI $T_v l_\lambda$ JEST REALIZOWANE PRZEZ l_λ .

UWZGLĘDNIĄC POWYŻSZE, PRZEPISUJEMY WARUNEK R-LINIOWOŚCI

Ⓜ (CZYLI SPLATANIA PRZEZEŃ TL_λ Z $TL_\lambda|_{V(V)}$), DLA $(\xi, v) \in T_x B \oplus T_v R^{xN}$,

W POSTACI $\equiv id_{T_x B} \circ \pi_1 \oplus l_\lambda \circ \pi_2 : T_x B \oplus T_v R^{xN} \rightarrow T_x B \oplus T_{l_\lambda(v)} R^{xN}$

Ⓜ_i $(x, l_\lambda(v)) \circ (id_{T_x B}, l_\lambda)(\xi, w) \equiv (id_{R^{xN}} + A_i(x, l_\lambda(v)))(\xi, l_\lambda(w)) = l_\lambda(w) + \xi \lrcorner A_i(x, l_\lambda(v))$

SPLATANIE!

$\equiv (id_{T_x B}, l_\lambda) \circ \text{Ⓜ}_i(x, v)(\xi, w) \equiv (id_{T_x B}, l_\lambda)(id_{R^{xN}} + A_i(x, v))(\xi, w)$

$\equiv (id_{T_x B}, l_\lambda)(w + \xi \lrcorner A_i(x, v)) = l_\lambda(w) + \xi \lrcorner l_\lambda \circ A_i(x, v)$, SKŁD

WOPEC DOWOLNOŚCI x, v, ξ, w I λ WYCIĄGAMY POŻĄDANY WNIOSZEK

$$A_i(x, l_\lambda(v)) = l_\lambda \circ A_i(x, v). \quad \square$$

POZOSTAŁE TERAZ USTALIĆ RELACJĘ MIĘDZY A_i i $\Gamma \dots$

LICZYMY WPROST (PATRZ: **Str. 19.**):

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{(i)\Gamma_{\mu a}^b(x)}(\varepsilon_b^{(i)}(x)) &= \nabla_{\partial_\mu^{(i)}}^k \varepsilon_a^{(i)}(x) = \text{Ver} \tau_{\varepsilon_a^{(i)}(x)}^{-1} \circ \nabla_{\partial_\mu^{(i)}} \varepsilon_a^{(i)}(x) \equiv \text{Ver} \tau_{\varepsilon_a^{(i)}(x)}^{-1} \circ \textcircled{\cap} \circ T_x \varepsilon_a^{(i)}(\partial_\mu^{(i)}) \\ &\equiv \text{Ver} \tau_{\varepsilon_a^{(i)}(x)}^{-1} \circ T_{(x, e_a)} \tau_i^{-1} \circ \textcircled{\cap}_i(x, e_a) \circ T_{\varepsilon_a^{(i)}(x)} \tau_i \circ T_x \varepsilon_a^{(i)}(\partial_\mu^{(i)}) \\ &= \text{Ver} \tau_{\varepsilon_a^{(i)}(x)}^{-1} \circ T_{(x, e_a)} \tau_i^{-1} \circ \textcircled{\cap}_i(x, e_a) \circ T_x(\tau_i \circ \varepsilon_a^{(i)})(\partial_\mu^{(i)}) = * \end{aligned}$$

ALÉ $(\tau_i \circ \varepsilon_a^{(i)})(x) = (x, e_a) \stackrel{\text{const}}{=} \text{ZATEM } T_x(\tau_i \circ \varepsilon_a^{(i)}) = (\text{id}_{T_x B}, 0) \quad i$

$$\begin{aligned} * &= \text{Ver} \tau_{\varepsilon_a^{(i)}(x)}^{-1} \circ T_{(x, e_a)} \tau_i^{-1} \circ \textcircled{\cap}_i(x, e_a)(\partial_\mu^{(i)}, 0) \\ &= (\text{Ver} \tau_{\varepsilon_a^{(i)}(x)}^{-1} \circ T_{(x, e_a)} \tau_i^{-1})(0, (\partial_\mu^{(i)} \lrcorner A_i^b(x, e_a)) \circ e_b) = ** \end{aligned}$$

WARTO TU PRZYPOMNIEĆ INTERPRETACJĘ NAPISU $(\partial_\mu^{(i)} \lrcorner A_i^b(x, e_a)) \circ e_b$

ZAWARTĄ JUŻ W TREŚCI DOWODZONEGO STWIERDZENIA (PATRZ: UWAGA
O STANDARDOWYM WŁOŻANIENIU NA **§2.33.**) I ROZWINIĘTĄ NA SAMYM
POCZĄTKU TEGO DOWODU: W ISTOCIE (TJ. PRZED DOKONANIEM
WŁOŻANIENIA $T_e \mathbb{R}^{xN} \simeq \mathbb{R}^{xN}$) MAMY TU DO CZYNIEŃ Z KLASĄ
WSPÓŁSTYCHNOŚCI ŚCIEŻEK $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} (x, e_a + t \triangleright (\partial_\mu^{(r)} \lrcorner A_i^b(x, e_a)) \triangleright e_b)$,

ZATEM

$$\begin{aligned}
 ** &= \text{Ver} \tau_{\xi_a^{(r)}(x)}^{-1} \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \tau_i^{-1} (x, e_a + t \triangleright (\partial_\mu^{(r)} \lrcorner A_i^b(x, e_a)) \triangleright e_b) \right) \\
 &= \text{Ver} \tau_{\xi_a^{(r)}(x)}^{-1} \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left(\tau_i^{-1}(x, e_a) + t \triangleright \tau_i^{-1}(x, (\partial_\mu^{(r)} \lrcorner A_i^b(x, e_a)) \triangleright e_b) \right) \right) \\
 &\quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \searrow \\
 &\quad \quad \quad \xi_a^{(r)}(x) \quad \quad \quad \xi_a^{(r)}(x) \\
 &= \tau_i^{-1}(x, (\partial_\mu^{(r)} \lrcorner A_i^b(x, e_a)) \triangleright e_b) \equiv \llbracket_{\partial_\mu^{(r)} \lrcorner A_i^b(x, e_a)} (\xi_a^{(r)}(x)) ,
 \end{aligned}$$

CO PROWADZI TŁUŻ WPROST DO ODCIĄGOWANEJ IDENTYFIKACJI

$$\partial_{\mu}^{(i)} \lrcorner A_i^b(x, e_a) = {}^{(i)}\Gamma_{\mu a}^b(x). \quad \square$$

WYNIK NASZYCH DOTYKĄCĄCYCH DOCIĘKAŃ MOŻEMY PRZEDSTAWIĆ W POSTACI PRZYDATNEJ W DALSZEJ ANALIZIE:

$$\underbrace{\Theta_i(x, v^a \triangleright e_a)}_{T_x \mathbb{R}^{k \times n}} = \text{id}_{\mathbb{R}^{k \times n}} + {}^{(i)}\Gamma_{\mu a}^b(x) v^a dx^{\mu} \otimes e_b.$$

POWYŻSZE WYKORZYSTUJEMY W DOWODZIE

Stw. 51. KRZYWIZNA POWIĄZANIA LINIOWEGO NA WIĄZCE WEKTOROWEJ V (O FORMIE POWIĄZANIA $(\theta) \in \Gamma(T^*V \otimes VV)$) WYRAŻA SIĘ W OBRAZIE TRYWIALIZACJI LOKALNEJ $\tau_i: \pi_W^{-1}(\theta_i) \xrightarrow{\cong} \theta_i \times \mathbb{R}^{k \times n}$ NAD WSPÓŁRZĘDNOŚCIOWYM POLECIENIEM TRYWIALIZUJĄCYM $\{\theta_i\}_{i \in I}$ BĄDZ B (PATRZ: Def. 4.) (38)

POPRAZ SYMBOLE KRISTOFFELA, JAKO NASTĘPUJE (PATRZ: St. 33.):

$$\begin{aligned} & \mathbb{H}_i \circ \left[\text{id}_{T(\Theta_i \times \mathbb{R}^{*N})} - \mathbb{H}_i \circ \text{id}_{T(\Theta_i \times \mathbb{R}^{*N})} - \mathbb{H}_i \right]_{\Gamma(T(\Theta_i \times M))} \left((\xi_1, V_1), (\xi_2, V_2) \right) (x, v) \\ &= - \left(\partial_\mu^{(i)} \Gamma_{\nu a}^{(i)} - \partial_\nu^{(i)} \Gamma_{\mu a}^{(i)} + \Gamma_{\mu c}^{(i)} \Gamma_{\nu a}^{(i)} - \Gamma_{\nu c}^{(i)} \Gamma_{\mu a}^{(i)} \right) \xi_1^\mu \xi_2^\nu (x) v^a \triangleright e_b, \end{aligned}$$

Gdzie $(\xi_a \equiv \xi_a^\mu \partial_\mu^{(i)}, V_a) \in \Gamma(TB|_{\Theta_i}) \times \Gamma(T\mathbb{R}^{*N})$, $a \in \{1, 2\}$ TRAKTUJEMY JAKO ROZKŁAD DOWOLNEGO POLA WEKTOROWEGO NAD $\Theta_i \times \mathbb{R}^{*N}$

WZGLĘDEM $T(\Theta_i \times \mathbb{R}^{*N}) \simeq \pi_1^* T\Theta_i \oplus \pi_2^* T\mathbb{R}^{*N}$, A WYNIK LICZYMY W $(x, v = v^a \triangleright e_a) \in \Theta_i \times \mathbb{R}^{*N}$.

D: JAKO ŻE W RACHUNKU POJAWIA SIĘ WPROST KOMUTATOR Pól WEKTOROWYCH NA MODELU LOKALNYM WIĄZKI W , Tj. NA $\Theta_i \times \mathbb{R}^{*N}$, MUSIMY NAJPIERW PRZYWRÓCIĆ STATUS e_a W DEFINICJI $\mathbb{H}_i$ ZE St. 6. (39)

JAKO (WARTOŚCI) POLA WEKTOROWEGO NA $\mathbb{R}^{xN}$. WYCHODZĄC OD JAWNEJ
POSTACI UTOŻSAMIENIA ZE Str. 34.,

$$e_a \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\sigma + t \triangleright e_a),$$

OBLICZAMY POCUODNĄ (GLOBALNEJ) FUNKCJI WSPÓŁRZĘDNIKOWEJ φ^a
NA $\mathbb{R}^{xN}$ (PRZYJMUJĄCEJ WARTOŚCI $\varphi^a(v^b \triangleright e_b) := v^a$) WZDŁUŻ e_a :

$$e_a(v^b) \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi^b(v + t \triangleright e_a) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (v^b + t \delta_a^b) = \delta_a^b,$$

CO POZWALA ZAPISAC:

$$\underline{e_a} \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi^a} =: \partial_a$$

CO UCZYNIWŚY, LICZYMY WPROST (PORZUCAJĄC UTOŻSAMIENIE $T_v \mathbb{R}^{xN} \cong \mathbb{R}^{xN}$)

$$\textcircled{H}_i \circ [id_{T(\mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{xN})} - \textcircled{H}_i, id_{T(\mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{xN})} - \textcircled{H}_i]_{\Gamma(T(\mathcal{O}_i \times \mathcal{H}))}((\xi_1, V_1), (\xi_2, V_2))(x, v)$$

$$= (id_{T\mathbb{R}^{xN}} + {}^{(1)}\Gamma_{\mu a}^b \varphi^a dx^\mu \otimes \partial_b) \circ ([id_{T\mathcal{O}_i} - {}^{(1)}\Gamma_{vc}^d \varphi^c dx^\nu \otimes \partial_d, id_{T\mathcal{O}_i} - {}^{(1)}\Gamma_{\lambda e}^f \varphi^e dx^\lambda \otimes \partial_f]_{\Gamma})(-|-)$$

$$= (id_{T\mathbb{R}^{xN}} + {}^{(1)}\Gamma_{\mu a}^b \varphi^a dx^\mu \otimes \partial_b) ([\xi_1 - {}^{(1)}\Gamma_{vc}^d \varphi^c \xi_1^\nu \partial_d, \xi_2 - {}^{(1)}\Gamma_{\lambda e}^f \varphi^e \xi_2^\lambda \partial_f]_{\Gamma})(x, v)$$

$$= (id_{T\mathbb{R}^{xN}} + {}^{(1)}\Gamma_{\mu a}^b \varphi^a dx^\mu \otimes \partial_b) \left([\xi_1, \xi_2]_{\Gamma} - \xi_1 ({}^{(1)}\Gamma_{\lambda e}^f \xi_2^\lambda) \varphi^e \partial_f + \xi_2 ({}^{(1)}\Gamma_{vc}^d \xi_1^\nu) \varphi^c \partial_d + {}^{(1)}\Gamma_{vc}^d {}^{(1)}\Gamma_{\lambda e}^f \xi_1^\nu \xi_2^\lambda [\varphi^c \partial_d, \varphi^e \partial_f]_{\Gamma} \right) (x, v)$$

$$= ([\xi_1, \xi_2]_{\Gamma})^\mu {}^{(1)}\Gamma_{\mu a}^b \varphi^a \partial_b - \xi_1 ({}^{(1)}\Gamma_{\lambda e}^f \xi_2^\lambda) \varphi^e \partial_f + \xi_2 ({}^{(1)}\Gamma_{vc}^d \xi_1^\nu) \varphi^c \partial_d + {}^{(1)}\Gamma_{vc}^d {}^{(1)}\Gamma_{\lambda e}^f \xi_1^\nu \xi_2^\lambda [\varphi^c \partial_d, \varphi^e \partial_f]_{\Gamma} (x, v)$$

$$= (-\xi_1 ({}^{(1)}\Gamma_{\lambda e}^f) \xi_2^\lambda \varphi^e \partial_f + \xi_2 ({}^{(1)}\Gamma_{vc}^d) \xi_1^\nu \varphi^c \partial_d + ({}^{(1)}\Gamma_{vc}^d {}^{(1)}\Gamma_{\lambda d}^f \varphi^c \partial_f - {}^{(1)}\Gamma_{vc}^d {}^{(1)}\Gamma_{\lambda e}^c \varphi^e \partial_d) \xi_1^\nu \xi_2^\lambda) (x, v),$$

CO JEST WYNIKEM POSTULOWANYM. $\square$

Powyższe prowadzi do...

Cor. 3. KRZYWIZNA POWIĄZANIA JEST OPISYWANA PRZESZ TENSOR
KRZYWIZNY (RIEMANNA) O PREZENTACJI LOKALNEJ

$${}^{(1)}R_{\mu\nu a}^b dx^\mu \wedge dx^\nu \otimes \varphi^a \partial_b, \quad {}^{(1)}R_{\mu\nu a}^b := \partial_\mu {}^{(1)}\Gamma_{\nu a}^b - \partial_\nu {}^{(1)}\Gamma_{\mu a}^b + {}^{(1)}\Gamma_{\mu c}^b {}^{(1)}\Gamma_{\nu a}^c - {}^{(1)}\Gamma_{\nu c}^b {}^{(1)}\Gamma_{\mu a}^c.$$

D: WYKAZANIE TENSOROWEGO CHARAKTERU $R_{\mu\nu a}^b$ (GDYBY TEN WIAŻ BUDZIŁ
WĄTPLIWŚĆ PO UWĄŻNYM PRZECYTANIU Def. 1.2.7.) JEST PROSTYM, CHOĆ ZIMNYM
ĆWICZENIEM RACJUNKOWYM, KTÓRE PORÓBIAWIA WĄTRPIĄCYM. $\square$