

**W ZWIĄZKU Z WIĄZKAMI:
ROZWŁÓKNIENIA, TRYWIALIZACJE,
CIĘCIA, SNOPKI I REKONSTRUKCJE
(MAWF '25/26 2.I & 2.II [RRS])**

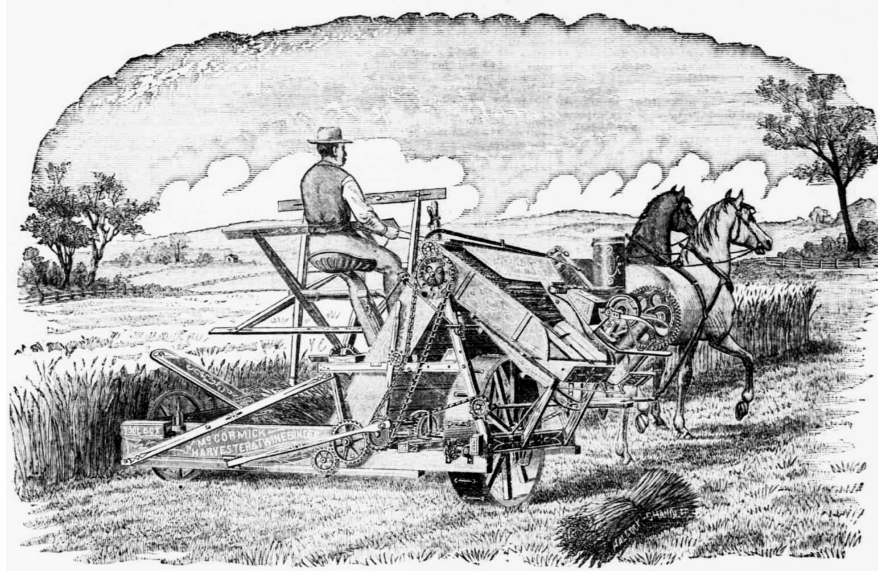


FIG. 1. Snopowiązałka McCormicka, będąca adaptacją wynalazku Johna F. Appleby z 1858 r., która zrewolucjonizowała proces żniwny w Ameryce Północnej w końcu XIX w., podnosząc wydajność jego wydajność (plakat reklamowy z 1884 r.).

SPIS TREŚCI

1. Struktury ogólne	1
2. Wiązki wektorowe	13
3. Geometryzacje podstawowych konstrukcji liniowych	18
3.1. Suma prosta wiązek wektorowych	18
3.2. Iloczyn tensorowy wiązek wektorowych	19
3.3. Wiązka homomorfizmów i wiązka dualna	19
3.4. Kompleksyfikacja rzeczywistej wiązki wektorowej	20
Literatura	20

1. STRUKTURY OGÓLNE

Mamy za sobą Długi Marsz przez kontynent struktur algebraicznych – od elementarnych struktur liniowych i kwadratowych, poprzez rozmaite przydatne i porządkujące wydawnie nasze myślenie struktury uniwersalne, aż po szczegółową konstrukcję i kompletną klasyfikację algebr Clifforda oraz nietrywialnych reprezentacji nieprzywiedlnych zidentyfikowanych w algebr onych łonie naturalnych emulacji automorfizmów przestrzeni kwadratowych (czyli izometrii) – mitycznych spinorów $[w$

tym momencie wykładowca wykonuje anatomofizjo-to!-patologiczny gest ręką od głowy do... tytu, ilustrujący alternatywną „definicję” spinora spotykaną na kursach prawa jazdy. Zbrojni algebrą i intuicją, wracamy na macierzysty kontynent struktur fizykalnych, podbijany piędź po piędzi i uciśniony przez ponure totalitaryzmy Nie-do-rygoru i Licz,man!stwa. Jesteśmy gotowi na lądowanie na czasoprzestrzennych plażach Normandii porośniętych gęstwą wiązek spinorowych uginających się pod działaniem wiązek Clifforda wyrosłych na żyznej niwie stycznej. Nie znamy ich topologii, lecz nie znamy też lęku. Jutro będą nasze! Topologia, snopy, stogi, wiązki, kompleksy, obstrukcje, lęk... Rygor. Orkę czas zacząć.

W dalszej części kursu podejmiemy (udaną) próbę sformalizowania nader naturalnej potrzeby fizykalnej, jaką przynosi teoriopolowy paradygmat opisu zjawisk: Pożądamy otóż konstrukcji „gładko indeksowanej” przez czasoprzestrzeń rodziny przestrzeni wewnętrznych (z punktu widzenia tejże czasoprzestrzeni) stopni swobody – w interesującym nas bezpośrednio przypadku: algebraicznych, spinorowych, przy czym owa, wymagająca aksjomatyzacji, „gładkość” nie jest tu ledwie fetyszem, lecz ma stanowić punkt wyjścia do naturalnego – tj. uzgodnionego ze strukturą automorfizmów uzyskanej tak geometrii nad-czasoprzestrzennej – różniczkowania (w kierunkach czasoprzestrzennych) zanurzonych w tejże geometrii gładkich rozkładów tychże wewnętrznych stopni swobody, zwanych w żargonie fizycznym „polami”, zgodnie z maksymą „Różniczkowanie to życie=dynamika!”

Intuicji matematycznej dostarcza kanoniczna konstrukcja „rozmaitości ruchów lokalnych” na danej rozmaitości różniczkowalnej¹

Stwierdzenie 1. Rozważmy relację równoważności na zbiorze **ścieżek** gładkich w rozmaitości gładkiej $(M, \mathcal{A})$ wymiaru $n \in \mathbb{N}^*$ przechodzących przez jej punkt x ,

$$\gamma :]-\varepsilon_\gamma, \varepsilon_\gamma[\longrightarrow M, \quad \varepsilon_\gamma > 0, \quad \gamma(0) = x,$$

określaną przez warunek (współ)styczności w x ,

$$\tilde{\gamma} \sim_x \gamma \iff \begin{cases} \tilde{\gamma}(0) = x = \gamma(0) \\ D(\kappa \circ \tilde{\gamma})(0) = D(\kappa \circ \gamma)(0) \end{cases},$$

wypowiedziany w terminach *dowolnej* mapy $\kappa : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^{x_n}$ z atlasu $\mathcal{A}$ określonej na otoczeniu otwartym $\mathcal{O} \ni x$. Zbiór P_x klas abstrakcji ścieżek względem powyższej relacji jest nośnikiem naturalnej struktury przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowej.

Dowód: Zaczniemy od spostrzeżenia porządkującego: Relacja współstyczności nie zależy od wyboru lokalnej mapy – istotnie, jeśli $\psi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{x_n}$ jest lokalną mapą na otoczeniu otwartym $\mathcal{U} \ni x$, to dla ścieżek γ i $\tilde{\gamma}$ z treści stwierdzenia zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned} D(\psi \circ \tilde{\gamma})(0) &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \tilde{\gamma}(0)) \circ D(\varphi \circ \tilde{\gamma})(0) = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ D(\varphi \circ \tilde{\gamma})(0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \gamma(0)) \circ D(\varphi \circ \gamma)(0) \equiv D(\psi \circ \gamma)(0). \end{aligned}$$

Oznaczywszy następnie $v_\gamma := D(\kappa \circ \gamma)(0) \in \mathbb{R}^{x_n}$ dla skrótu, określamy na P_x operację binarną

$$P_x \times P_x \longrightarrow P_x$$

$$: ([\gamma_1]_{\sim_x}, [\gamma_2]_{\sim_x}) \longmapsto [-\varepsilon, \varepsilon[\exists t \mapsto \kappa^{-1}(\kappa(x) + t \triangleright (v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2})) \in \mathcal{O}]_{\sim_x} =: [\gamma_1]_{\sim_x} + [\gamma_2]_{\sim_x}$$

z elementem neutralnym danym w postaci klasy $[\gamma_x]_{\sim_x}$ ścieżki stałej

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow M : t \longmapsto x,$$

a następnie działanie ciała $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \times P_x \longrightarrow P_x : (\lambda, [\gamma]_{\sim_x}) \longmapsto [-\varepsilon, \varepsilon[\exists t \mapsto \kappa^{-1}(\kappa(x) + t \cdot \lambda \triangleright v_\gamma) \in \mathcal{O}]_{\sim_x},$$

¹Precyzyjne i szczegółowe wprowadzenie do teorii rozmaitości różniczkowalnych w nieodzownym zakresie, tudzież rozwinięcie przywoływanej tu intuicji, można znaleźć w notatkach do wykładu Autora pt. „Geometria różniczkowa” (patrz: materiały pomocnicze do wykładu niniejszego).

przy czym w obu przypadkach $\varepsilon > 0$ jest dobrane tak, ażeby ścieżka będąca wynikiem działania leżała w całości w $\mathcal{O}$.

Bez trudu sprawdzamy upewniamy się o niezależności otrzymanej tym sposobem definicji struktury $\mathbb{R}$ -liniowej na zbiorze ścieżek od wyboru mapy, a to za sprawą tożsamości

$$\begin{aligned} & \psi^{-1}(\psi(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright D(\psi \circ \gamma_1)(0) + \lambda_2 \triangleright D(\psi \circ \gamma_1)(0))) \upharpoonright_{t=0} = \psi^{-1} \circ \psi(x) = x \\ \equiv & \quad \kappa^{-1}(\kappa(x) + t \triangleright D(\psi \circ \kappa^{-1})(\kappa(x))(\lambda_1 \triangleright D(\kappa \circ \gamma_1)(0) + \lambda_2 \triangleright D(\kappa \circ \gamma_1)(0))) \upharpoonright_{t=0} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \psi(\psi^{-1}(\psi(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright D(\psi \circ \gamma_1)(0) + \lambda_2 \triangleright D(\psi \circ \gamma_1)(0)))) \\ = & \quad \lambda_1 \triangleright D(\psi \circ \gamma_1)(0) + \lambda_2 \triangleright D(\psi \circ \gamma_1)(0) \equiv D(\psi \circ \kappa^{-1})(\kappa(x))(\lambda_1 \triangleright D(\kappa \circ \gamma_1)(0) + \lambda_2 \triangleright D(\kappa \circ \gamma_1)(0)) \\ = & \quad \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \kappa(\kappa^{-1}(\kappa(x) + t \triangleright D(\psi \circ \kappa^{-1})(\kappa(x))(\lambda_1 \triangleright D(\kappa \circ \gamma_1)(0) + \lambda_2 \triangleright D(\kappa \circ \gamma_1)(0)))) . \end{aligned}$$

□

Możemy już teraz przedstawić metodę rekonstrukcji struktury globalnej rozmiatości ścieżek (czyli właśnie „ruchów lokalnych”), która doprowadzi nas do opisu przestrzeni totalnej wiązki (włóknistej) stycznej TM nad M .

Definicja 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. **Rozmiatość styczna** albo **wiązka styczna nad rozmiatością** gładką M wymiaru $n \in \mathbb{N}^*$ o atlasie $\widehat{\mathcal{A}}$ złożonym z map lokalnych $\kappa_i : \mathcal{O}_i \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^{xn}$, $i \in I$ to czwórka $(TM, M, \mathbb{R}^{xn}, \pi_{TM})$ o składowych:

- zbiór

$$TM := \bigsqcup_{x \in M} P_x$$

- o strukturze rozmiatości opisanej poniżej;
- zbiór $\mathbb{R}^{xn}$ o kanonicznej strukturze rozmiatości gładkiej;
- odwzorowanie

$$\pi_{TM} : TM \longrightarrow M : ([\gamma]_{\sim_x}, x) \longmapsto x .$$

Przy tym odwzorowania

$$T\kappa_i : T\mathcal{O}_i := \pi_{TM}^{-1}(\mathcal{O}_i) \equiv \bigsqcup_{x \in \mathcal{O}_i} P_x \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{xn} : ([\gamma]_{\sim_x}, x) \longmapsto (\kappa_i(x), D(\kappa_i \circ \gamma)(0))$$

indukują na TM mocną topologię cofnięciową z topologii produktowej (podprzestrzeni) na zbiorach $\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{xn} \subset \mathbb{R}^{x2n}$, tj. taką, w której podzbiór $\mathcal{V} \subset TM$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$\forall_{i \in I} : T\kappa_i(\mathcal{V} \cap T\mathcal{O}_i) \in \mathcal{T}(\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{xn}) .$$

W tej topologii odwzorowania $T\kappa_i$ są tautologicznie homeomorficzne, stanowią przeto mapy lokalne, zwane **mapami naturalnymi**, dla których transformacje współrzędniowe to

$$\begin{aligned} Tt_{ij} := T\kappa_i \circ (T\kappa_j)^{-1} & : \quad \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{xn} \xrightarrow{\cong} \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{xn} \\ & : \quad (\kappa_j(x), D(\kappa_j \circ \gamma)(0)) \longmapsto (\kappa_i(x), D(\kappa_i \circ \gamma)(0)) \\ & \equiv (t_{ij}(\kappa_j(x)), D(t_{ij} \circ \kappa_j \circ \gamma)(0)) \\ & = (t_{ij}(\kappa_j(x)), Dt_{ij}(\kappa_j(x))(D(\kappa_j \circ \gamma)(0))) . \end{aligned}$$

Zależność punktu w obrazie od argumentu z dziedziny jest gładka w składowej bazowej (z założenia),

$$t_{ij} \in \text{Diff}(\kappa_j(\mathcal{O}_{ij}), \kappa_i(\mathcal{O}_{ij})) ,$$

i gładka w składowej z włókna w argumentcie bazowym,

$$Dt_{ij} \in C^\infty(\kappa_j(\mathcal{O}_{ij}), \mathbb{R}^{n^2}),$$

a nadto liniowa, więc także gładka w argumentcie z włókna $D(\kappa_j \circ \gamma)(0)$, czyli ostatecznie gładka w ogólności, i jako taka zadaje na TM strukturę rozmiotłości gładkiej. Zarazem odwzorowania $T\kappa_i$ pełnią też rolę lokalnych strukturalnych modelowań tejże rozmiotłości na produkcie kartezjańskim elementu topologii bazy M z globalnym modelem przeciwobrazu punktu w tejże wzdłuż π_{TM} , czyli trywializacji, tautologicznie gładkich względem zdefiniowanej tu (przy ich użyciu) struktury różniczkowej. Wreszcie też rzut na bazę jest gładką surjektywną submersją jako – lokalnie – superpozycja odwzorowań tego samego typu,

$$\pi_{TM} \upharpoonright_{T\mathcal{O}_i} = \kappa_i^{-1} \circ \text{pr}_1 \circ T\kappa_i.$$

Stosownej abstrakcji powyższej konstrukcji kanonicznej dostarcza nam

Definicja 2. Wiązka włóknista klasy C^∞ to czwórka

$$(E, B, F, \pi_E)$$

złożona z rozmiotłości gładkich:

- E , zwanej **przestrzenią totalną (wiązki)**;
- B , zwanej **bazą (wiązki)**;
- F , zwanej **włóknem typowym (wiązki)**;

oraz odwzorowania surjektywnego klasy C^∞

$$\pi_E : E \longrightarrow B,$$

zwanego **rzutem na bazę (wiązki)**, dla których istnieje pokrycie otwarte $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B wraz ze stowarzyszoną z nim rodziną dyfeomorfizmów klasy C^∞

$$\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F,$$

zwanych **trywializacjami lokalnymi (wiązki)**, domykających diagramy przemienne

$$\begin{array}{ccc} \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\tau_i} & \mathcal{O}_i \times F \\ \pi_E \searrow & & \swarrow \text{pr}_1 \\ & \mathcal{O}_i & \end{array}.$$

Pokrycie o powyższej własności określamy mianem **trywializującego**. Odwzorowania

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \text{Aut}(F) \subseteq \text{Diff}^\infty(F, F)$$

określone, dla wszystkich par indeksów $(i, j) \in I^{\times 2}$, dla których $\mathcal{O}_{ij} \equiv \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \neq \emptyset$, przez superpozycje dyfeomorfizmów

$$\tau_{ij} := \tau_i \circ \tau_j^{-1} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij} \times F} : \mathcal{O}_{ij} \times F \hookrightarrow \mathcal{O}_{ij} \times F : (x, f) \mapsto (x, g_{ij}(x)(f)),$$

gdzie odwzorowanie $\mathcal{O}_{ij} \times F \longrightarrow F : (x, f) \mapsto g_{ij}(x)(f)$ jest z założenia klasy C^∞ , są nazywane **odwzorowaniami przejścia (wiązki)**, a grupa automorfizmów $\text{Aut}(F)$ włókna typowego (której ewentualne zawieranie się właściwe w grupie $\text{Diff}(F, F)$ dyfeomorfizmów włókna typowego wyraża zgodność z dodatkową na nim strukturą, jak np. struktura liniowa lub struktura grupy) zyskuje miano **grupy strukturalnej (wiązki)**. Wiązkę będziemy nieraz reprezentować przy użyciu diagramu

$$\begin{array}{c} F \rightsquigarrow E \\ \downarrow \pi_E \\ B \end{array},$$

sygnalizując za pośrednictwem falującej strzałki osobny status ontologiczny włókna typowego (tj. generyczny brak kanonicznego jego włożenia w przestrzeń totalną).

Przeciwwobraz punktu $x \in B$ względem rzutu kanonicznego,

$$\pi_E^{-1}(\{x\}) \equiv E_x$$

nazywamy **włóknem wiązki E nad x** .

Podwiązka wiązki włóknistej (E, B, F, π_E) to wiązka włóknista $(\underline{E}, \underline{B}, \underline{F}, \pi_{\underline{E}})$ o składowych włożonych w odnośne składowe E , tj. $\underline{E} \hookrightarrow E$, $\underline{B} \hookrightarrow B$ i $\underline{F} \hookrightarrow F$, oraz trywializacjach lokalnych respektujących te włożenia.

Morfizm wiązek włóknistych między dwiema wiązkami włóknistymi $(E_\alpha, B_\alpha, F_\alpha, \pi_{E_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ to para (Φ, f) odwzorowań klasy C^∞ , które czynią przemiennym poniższy diagram

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\Phi} & E_2 \\ \pi_{E_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{E_2} \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

i są lokalnie modelowane na $C^\infty(F_1, F_2)$ – wzgl. ilekroć oba włókna typowe należą do wspólnej podkategorii $\mathcal{C}$ kategorii gładkiej **Man**, wówczas modelem jest podklasa $\mathcal{C}(F_1, F_2) \subset C^\infty(F_1, F_2)$ – wedle następującego schematu: Niechaj $\mathcal{O}_{B_\alpha} = \{\mathcal{O}_{i^\alpha}^{(\alpha)}\}_{i^\alpha \in I^\alpha}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą pokryciami trywializującymi baz B_α , z odnośnymi trywializacjami lokalnymi $\tau_{i^\alpha}^{(\alpha)} : \pi_{E_\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_{i^\alpha}^{(\alpha)}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{i^\alpha}^{(\alpha)} \times F_\alpha$. Odwzorowanie f określa rozdrobnienie $\mathcal{O}_{B_1}^f = \{\mathcal{O}_{(j^2, i^1)}^f\}_{(j^2, i^1) \in I^2 \times I^1}$ pokrycia $\mathcal{O}_{B_1}$ o elementach $\mathcal{O}_{(j^2, i^1)}^f := f^{-1}(\mathcal{O}_{j^2}^{(2)}) \cap \mathcal{O}_{i^1}^{(1)}$. Zachodzi wówczas

$$\Phi : E_1 \supset \pi_{E_1}^{-1}(\mathcal{O}_{(j^2, i^1)}^f) \longrightarrow E_2 : \tau_{i^1}^{(1)-1}(x, \phi) \longmapsto \tau_{j^2}^{(2)-1}(f(x), h_{(j^2, i^1)}(x)(\phi))$$

dla pewnej rodziny odwzorowań

$$h_{(j^2, i^1)} : \mathcal{O}_{(j^2, i^1)}^f \longrightarrow C^\infty(F_1, F_2),$$

dla których odwzorowania $\mathcal{O}_{(j^2, i^1)}^f \times F_1 \longrightarrow F_2 : (x, \phi) \longmapsto h_{(j^2, i^1)}(x)(\phi)$ są gładkie.

Morfizmy pokrywające identyczność na bazie, czyli spełniające warunek $f = \text{id}_B$, nazywamy **wertykalnymi**. Ich prezentacja lokalna w obrazie trywializacji lokalnych $\tau_i^{(\alpha)}$ nad pokryciem współtrywializującym $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ dla obu wiązek to

$$\Phi : E_1 \supset \pi_{E_1}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow E_2 : \tau_i^{(1)-1}(x, \phi) \longmapsto \tau_i^{(2)-1}(x, h_i(x)(\phi))$$

dla rodziny odwzorowań

$$h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow C^\infty(F_1, F_2),$$

dla których odwzorowania $\mathcal{O}_i \times F_1 \longrightarrow F_2 : (x, \phi) \longmapsto h_i(x)(\phi)$ są gładkie.

Wertykalny izomorfizm wiązek włóknistych nosi miano **równoważności wiązek włóknistych**.

Opisaną powyżej **kategorię wiązek włóknistych nad bazą B** będziemy oznaczać symbolem

$$\text{Bun}(B).$$

Przykłady 1. (1) **Wiązka trywialna** to czwórka

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & B \times F \\ & & \downarrow \text{pr}_1 \\ & & B \end{array}$$

a więc np. 2-torus $\mathbb{T}^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, walec $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$.

(2) **Wstęga Möbiusa** jako wiązka nietrywialna nad $\mathbb{S}^1$ o włóknie typowym $\mathbb{R}$.

- (3) **Wiązka Hopfa** $(\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1, \pi_H)$, przy czym rzut na bazę π_H we współrzędnych $(z_1, z_2) \equiv ((x_0, x_1), (x_2, x_3))$ na $\mathbb{C}^{\times 2} \equiv \mathbb{R}^{\times 4} \supset \{ (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{\times 4} \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \} \equiv \mathbb{S}^3$ przyjmuje postać $\pi_H(z_1, z_2) = (2z_1\bar{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^{\times 3}$.
- (4) Niechaj (E, B_2, F, π_E) będzie wiązką włóknistą o lokalnych trywializacjach $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F$ stowarzyszonych z pokryciem trywializującym $\mathcal{O}_{B_2} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B_2 , a $f : B_1 \rightarrow B_2$ – odwzorowaniem klasy C^∞ . Wówczas czwórka

$$(f^*E \equiv B_1 \times_{B_2} E, B_1, F, \text{pr}_1),$$

jest wiązką, zwaną **wiązką cofniętą (wzdłuż f)**, o

- przestrzeni totalnej w postaci produktu włóknistego²

$$\begin{array}{ccc} B_1 \times_{B_2} E & \xrightarrow{\text{pr}_2} & E \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \pi_E \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array},$$

który wyposażamy w topologię podprzestrzeni indukowaną z topologii produktowej na $B_1 \times E \supset B_1 \times_{B_2} E$;

- rzucie na bazę $\pi_{f^*E} \equiv \text{pr}_1 \upharpoonright_{B_1 \times_{B_2} E} : B_1 \times_{B_2} E \rightarrow B_1$ danym jako (odpowiednio ograniczony, a jawnie surjektywny) rzut kanoniczny na pierwszą składową;
- włóknie typowym tożsamym z włóknem typowym E i włóknem nad punktem bazy $x \in B_1$ danym w postaci $\{x\} \times \pi_E^{-1}(\{f(x)\}) \equiv E_{f(x)}$;
- trywializacjach lokalnych

$$\tau_i^{f^*} := (\text{id}_{f^{-1}(\mathcal{O}_i)} \times (\text{pr}_2 \circ \tau_i)) \upharpoonright_{\text{pr}_1^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i))} : \text{pr}_1^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i)) \xrightarrow{\cong} f^{-1}(\mathcal{O}_i) \times F$$

stowarzyszonych z pokryciem trywializującym $f^*\mathcal{O}_{B_2} \equiv \{f^{-1}(\mathcal{O}_i)\}_{i \in I}$ (jego otwartość jest konsekwencją ciągłości f).

Trywializacje są w oczywisty sposób dobrze określone, oto bowiem mamy tożsamość

$$\text{pr}_1 \upharpoonright_{B_1 \times_{B_2} E}^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i)) = \text{pr}_2 \upharpoonright_{B_1 \times_{B_2} E}^{-1}(\pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i)) \equiv \text{pr}_2^{-1}(\tau_i^{-1}(\mathcal{O}_i \times F)),$$

wynikającą z przemienności powyższego diagramu. Ponadto gładkość odwzorowań strukturalnych: π_{f^*E} i $\tau_i^{f^*}$ jest konsekwencją submersywności π_E . Oznaczywszy rzeczzone włożenie (klasy C^∞) jako $\iota_{f^*} : B_1 \times_{B_2} E \hookrightarrow B_1 \times E$, możemy zapisać oba odwzorowania jako superpozycje odwzorowań gładkich:

$$\pi_{f^*E} \equiv \text{pr}_1 \circ \iota_{f^*}, \quad \tau_i^{f^*} \equiv (\text{id}_{f^{-1}(\mathcal{O}_i)} \times (\text{pr}_2 \circ \tau_i)) \circ \iota_{f^*} \upharpoonright_{\text{pr}_1^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i))}.$$

Bez trudu wyznaczamy odwzorowania przejścia wiązki cofniętej,

$$g_{ij}^{f^*} \equiv g_{ij} \circ f \upharpoonright_{f^{-1}(\mathcal{O}_{ij})} : f^{-1}(\mathcal{O}_{ij}) \rightarrow \text{Aut}(F).$$

- (5) Niechaj (E_A, B, F_A, π_{E_A}) , $A \in \{1, 2\}$ będą wiązkami włóknistymi o trywializacjach lokalnych $\tau_{Ai} : \pi_{E_A}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F_A$ i odnośnych odwzorowaniach przejścia $g_{Aij} : \mathcal{O}_{ij} \times F_A \hookrightarrow \mathcal{O}_{ij} \times F_A$: $(x, f_A) \mapsto (x, g_{Aij}(x)(f_A))$ stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B . Wówczas czwórka

$$(\pi_{E_1}^* E_2 \equiv \pi_{E_2}^* E_1 \equiv E_1 \times_B E_2, B, F_1 \times F_2, \pi_{E_1} \circ \text{pr}_1 \equiv \pi_{E_2} \circ \text{pr}_2)$$

jest wiązką *nad wspólną bazą obu wiązek*³, określaną mianem **produktu włóknistego wiązek włóknistych**, o

²Struktura do samodzielnego opracowania na podstawie [Sus23].

³To eksponuje zasadniczą różnicę między tą wiązką a rozważaną poprzednio wiązką cofniętą.

- przestrzeni totalnej w postaci produktu włóknistego

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times_B E_2 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & E_2 \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \pi_{E_2} \\ E_1 & \xrightarrow{\pi_{E_1}} & B \end{array} ,$$

będącego podrozmaitością włożoną w $E_1 \times E_2$ [struktura do samodzielnego opracowania na podstawie dostarczonych materiałów];

- rzucie na bazę $\pi_{E_1} \circ \text{pr}_1 \equiv \pi_{E_2} \circ \text{pr}_2 : E_1 \times_B E_2 \rightarrow B$ danym jako rzut kanoniczny obliczony na dowolnej składowej kartezjańskiej;
- włóknie typowym tożsamym z produktem kartezjańskim włókien typowych obu składowych, $E_1 \times E_2$, i włóknie nad punktem bazy $x \in B$ danym w postaci $E_{1x} \times E_{2x}$;
- trywializacjach lokalnych

$$\tau_i^{12} : (\pi_{E_1} \circ \text{pr}_1)^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F_1 \times F_2 : (e_1, e_2) \mapsto (\tau_i^1(e_1), \text{pr}_2 \circ \tau_i^2(e_2)).$$

Trywializacje lokalne są w oczywisty sposób gładkie (klasy C^∞), podobnie jak ich odwrotności

$$\begin{aligned} \tau_i^{12-1} : \mathcal{O}_i \times F_1 \times F_2 &\xrightarrow{\cong} (\pi_{E_1} \circ \text{pr}_1)^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ &: (x, f_1, f_2) \mapsto (\tau_i^{1-1}(x, f_1), \tau_i^{2-1}(x, f_2)). \end{aligned}$$

Znajomość tych ostatnich pozwala nam ustalić odwzorowania przejścia:

$$\tau_i^{12} \circ \tau_j^{12-1} : \mathcal{O}_{ij} \times F_1 \times F_2 \supset : (x, f_1, f_2) \mapsto (x, g_{ij}^1(x)(f_1), g_{ij}^2(x)(f_2)).$$

Jak przekonuje chwila zastanowienia nad strukturą lokalną wiązki w obrazie trywializacji lokalnej, rzut na bazę jest surjektywną submersją. Prostą, acz nader istotną fizykalnie konsekwencję tego faktu wysławia

Twierdzenie 1. Niechaj M_A , $A \in \{1, 2\}$ będą rozmaitościami gładkimi i niech $f : M_1 \rightarrow M_2$ będzie odwzorowaniem submersywnym w punkcie $x \in M_1$. Istnieje wówczas otoczenie $\mathcal{O}_{f(x)} \subset M_2$ punktu $f(x)$, na którym jest określone odwzorowanie $\sigma : \mathcal{O}_{f(x)} \rightarrow M_1$ klasy C^∞ o własnościach

$$f \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{O}_{f(x)}} \quad \wedge \quad \sigma \circ f(x) = x,$$

zwane **ciąciem lokalnym** odwzorowania f przez x .

Dowód: Teza ma charakter lokalny, możemy zatem ograniczyć rozważania do pewnego otoczenia $\mathcal{O}_x \ni x$ będącego dziedziną lokalnej mapy $\kappa_1 : \mathcal{O}_x \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{n_1})$, $n_1 \equiv \dim M_1$, w której $\kappa_1(x) = 0$, a także – do pewnego otoczenia $\tilde{\mathcal{O}}_{f(x)} \ni f(x)$ będącego dziedziną lokalnej mapy $\kappa_2 : \tilde{\mathcal{O}}_{f(x)} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_2 \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{n_2})$, $n_2 \equiv \dim M_2$, w której $\kappa_2 \circ f(x) = 0$. Submersywność f w x oznacza, że odwzorowanie styczne

$$\text{T}_{\kappa(x)=0}(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}) : \text{T}_{\kappa_1(x)=0} \mathbb{R}^{n_1} \equiv \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \text{T}_{\kappa_2 \circ f(x)=0} \mathbb{R}^{n_2} \equiv \mathbb{R}^{n_2}$$

jest epimorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowych. Niechaj zatem $V_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ będzie (dowolną) podprzestrzenią izomorficznie odwzorowywaną w $\mathbb{R}^{n_2}$ przez (ograniczenie) $\text{T}_{\kappa(x)}(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1})$, a wtedy odwzorowanie styczne do odwzorowania klasy C^∞

$$F := \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}|_{\mathcal{U}_1 \cap V_1} : \mathcal{U}_1 \cap V_1 \rightarrow \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{n_2},$$

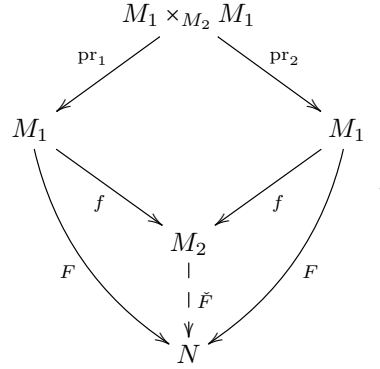
o jawnie niepustej dziedzinie (wszak V_1 jest podprzestrzenią w $\mathbb{R}^{n_1}$, a $\mathcal{U}_1$ jest otoczeniem wektora 0), jest odwracalne. Istotnie, wobec tożsamości $\text{T}_0 V_1 \equiv V_1$ dziedzina $\text{T}_0 F$ przyjmuje postać $\text{T}_0 \mathcal{U}_1 \cap \text{T}_0 V_1 \equiv \mathbb{R}^{n_1} \cap V_1 = V_1$, co oznacza, że $\text{T}_0 F$ jest izomorfizmem

$$\text{T}_0 F \equiv \text{T}_0(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1})|_{V_1}.$$

W odwołaniu do Twierdzenia o Lokalnej Odwracalności Odwzorowań wnioskujemy zatem, że $F \equiv \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} \upharpoonright_{\mathcal{U}_1 \cap V_1}$ ma pożądaną lokalną odwrotność $\kappa_1 \circ \sigma \circ \kappa_2^{-1} \upharpoonright_{F(\mathcal{U}_0)}$ klasy C^∞ na pewnym otoczeniu $\mathcal{U}_0 \subset F(\mathcal{U}_1 \cap V_1)$ wektora $0 \equiv \kappa_2 \circ f(x)$. Homeomorficzny przeciwbraz $\kappa_2^{-1}(\mathcal{U}_0)$ tego ostatniego jest postulowanym otoczeniem punktu $f(x)$, na którym jest określone lokalne cięcie σ klasy C^∞ . $\square$

Dodamy w tym miejscu rzut oka na własność submersji, która objawia ją jako byt pokrewny dyskutowanym w pierwszym semestrze algebraicznym strukturom uniwersalnym.

Stwierdzenie 2 (Kwazi-universalna⁴ własność submersji). Niechaj $f : M_1 \rightarrow M_2$ będzie surjektywną submersją klasy C^∞ . Ponadto niech N będzie C^∞ -rozmaitością, a $\tilde{F} : M_2 \rightarrow N$ dowolnym odwzorowaniem. Odwzorowanie $\tilde{F}$ jest klasy C^∞ wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie złożone $\tilde{F} \circ f : M_1 \rightarrow N$ ma tę własność. W szczególności każdemu C^∞ -odwzorowaniu $F : M_1 \rightarrow N$ stałemu na poziomicach f odpowiada dokładnie jedno odwzorowanie $\tilde{F} \in C^\infty(M_2, N)$ o własności wyrażonej – wraz z rzezoną własnością f – przez diagram przemienny



Dowód: Ilekcio $\tilde{F}$ jest klasy C^∞ , także $\tilde{F} \circ f$ ma tę własność jako superpozycja odwzorowań klasy C^∞ .

I odwrotnie, niechaj $\tilde{F} \circ f \in C^\infty(M_1, N)$. Wobec surjektywności f dowolny punkt w M_2 możemy przedstawić w postaci $f(x)$ dla pewnego $x \in M_1$. Wybierzmy zatem (dowolnie) punkt $f(x) \in M_2$ oraz jego otoczenie $\mathcal{O}_{f(x)} \subset M_2$, na którym jest określone cięcie lokalne $\sigma : \mathcal{O}_{f(x)} \rightarrow M_1$ odwzorowania f spełniające warunki z tezy Tw.1. Przyjawszy zapis dowodu rzeczzonego stwierdzenia, otrzymujemy tożsamość

$$\tilde{F} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{f(x)}} \equiv \tilde{F} \circ \text{id}_{\mathcal{O}_{f(x)}} = (\tilde{F} \circ f) \circ \sigma,$$

która dowodzi C^∞ -gładkości $\tilde{F} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{f(x)}}$ na gruncie założenia o C^∞ -gładkości $\tilde{F} \circ f$ oraz wynikającej ze Tw.1 C^∞ -gładkości cięcia lokalnego σ . Dowolność wyboru $f(x)$ pozwala wnioskować o globalnej C^∞ -gładkości $\tilde{F}$.

Wreszcie na koniec zajmijmy się udowodnieniem istnienia i jednoznaczności odwzorowania $\tilde{F} \in C^\infty(M_2, N)$, spełniającego tożsamość

$$F = \tilde{F} \circ f.$$

Po pierwsze zauważmy, że każde dwa takie odwzorowania pokrywają się na zbiorze $f(M_1)$, który z racji surjektywności f jest tożsamy z M_2 , przeto odwzorowanie F może być co najwyżej jedno. Wykorzystując raz jeszcze surjektywność f , postulujemy F w postaci jawnie gładkiej

$$\tilde{F} : M_2 \rightarrow N : f(x) \mapsto F \circ \sigma(f(x)) \equiv F(x),$$

używając przy tym *dowolnego* cięcia σ opisanego w tezie Tw.1. Założona przez nas stałość F na włóknach f przesądza o sensowności powyższego postulat ($F(x)$ nie zależy od wyboru reprezentanta włókna $f^{-1}(\{f(x)\})$, tj. nie zależy od wyboru cięcia σ , którego istnienie gwarantuje rzeczzone

⁴Powodem, dla którego wzbraniamy się przed nadaniem tej własności submersji miana „uniwersalnej”, jest to, że klasa obiektów, pośród których para (M_2, f) odgrywa rolę „inicjalną”, jest zdefiniowana w terminach odwzorowania f (chodzi o stałość na poziomicach tego odwzorowania).

twierdzenie), a do tego wprost z definicji zachodzi pożądana tożsamość

$$\check{F} \circ f(x) = F(x).$$

□

Powyższa analiza elementarnych własności surjektywnych submersji odniesiona do rzutu na bazę wiązki prowadzi do wyróżnienia zbiorów odwzorowań z

Uwaga 1. Zbiór cięć lokalnych wiązki (E, B, F, π_E) będziemy oznaczać symbolem

$$\Gamma_{\text{loc}}(E),$$

a zbiór jej cięć globalnych – symbolem

$$\Gamma(E).$$

Z Def.2 wyłania się obiekt geometryczny dostarczający rygorystycznego modelu gładkiego rozkładu przestrzeni wewnętrznych stopni swobody F nad bazą czasoprzestrzenną B (ewentualna obecność dodatkowej struktury różniczkowej na B , tudzież na $\mathbb{T}B$, jak np. tensora metrycznego, nie ma na tym etapie żadnego znaczenia). Zarazem istnienie trywializacji lokalnych wskazuje wyraźnie na możliwość zakodowania informacji o strukturze wiązki w *lokalnie* gładkich odwzorowaniach przejścia g_{ij} . O tym, jak bogata i jak wiernie przez nie kodowana jest to informacja, mówi

Twierdzenie 2 (O rekonstrukcji (izotypu) wiązki włóknistej). Przyjmijmy zapis Def.2. Odwzorowania przejścia wiązki włóknistej (E, B, F, π_E) o pokryciu trywializującym $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B spełniając **warunek 1-kocyklu**

$$(1) \quad \forall_{i,j,k \in I, x \in \mathcal{O}_{ijk}} : g_{ij}(x) \circ g_{kj}(x)^{-1} \circ g_{ki}(x) = \text{id}_F.$$

I odwrotnie, niechaj $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ będzie pokryciem otwartym rozmaitości gładkiej B i niech F będzie dowolną rozmaitością gładką o grupie automorfizmów $\text{Aut}(F) \subseteq \text{Diff}(F, F)$. Dowolna stowarzyszona z $\mathcal{O}_B$ rodzina odwzorowań

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \text{Aut}(F), \quad i, j \in I$$

indukujących odwzorowania klasy C^∞

$$\mathcal{O}_{ij} \times F \longrightarrow F : (x, f) \longmapsto g_{ij}(x)(f)$$

i spełniających powyższy warunek określa wiązkę włóknistą o odwzorowaniach przejścia stowarzyszonych z $\mathcal{O}_{ij}$ tożsamy z g_{ij} . Ilekcioć odwzorowania te są odwzorowaniami przejścia pewnej wiązki włóknistej nad B o włóknie typowym F , ta ostatnia wiązka jest izomorficzna z wiązką zrekonstruowaną na podstawie odwzorowań przejścia g_{ij} .

Dowód: Pierwsza część tezy jest bezpośrednią konsekwencją następującej równości, słusznej dla dowolnej trójki $(i, j, k) \in \langle I^{\times 3} \rangle$ oraz $(x, f) \in \mathcal{O}_{ijk} \times F$:

$$\begin{aligned} (x, f) &\equiv (\text{id}_{\mathcal{O}_{ijk}} \times \text{id}_F)(x, f) = ((\tau_i \circ \tau_j^{-1}) \circ (\tau_k \circ \tau_j^{-1})^{-1} \circ (\tau_k \circ \tau_i^{-1}))(x, f) \\ &= (x, g_{ij}(x) \circ g_{kj}(x)^{-1} \circ g_{ki}(x)(f)). \end{aligned}$$

Punktem wyjścia do dowodu drugiej jego części jest konstrukcja sumy rozłącznej $\sqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F)$, na której określamy relację

$$(x, f, i) \sim_{g.} (y, g, j) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = x \in \mathcal{O}_{ij} \\ g = g_{ji}(x)(f) \end{cases},$$

Warunek 1-kocyklu spełniony przez odwzorowania przejścia sprawia, że jest to relacja równoważności, oto bowiem dla $i = j = k$ dostajemy

$$g_{ii}(x) \equiv g_{ii}(x) \circ g_{ii}(x)^{-1} \circ g_{ii}(x) = \text{id}_F,$$

zatem $\sim_{g_{..}}$ jest zwrotna, a dalej tenże warunek w połączeniu z poprzednią konkluzją implikuje skośną symetrię g_{ij} ,

$$g_{ji}(x) \circ g_{ij}(x) = g_{ji}(x) \circ g_{ii}(x)^{-1} \circ g_{ij}(x) = \text{id}_F,$$

która pociąga za sobą jej symetrię, i wreszcie stosownie przepisany warunek 1-kocyklu,

$$g_{ij}(x) \circ g_{jk}(x) = g_{ij}(x) \circ g_{kj}(x)^{-1} = g_{ki}(x)^{-1} = g_{ik}(x),$$

oznacza, że jest ona przechodnia. Możemy zatem przejść od $\bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F)$ do zbioru klas abstrakcji

$$\mathcal{R}_{g_{..}} := \left(\bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F) \right) /_{g_{..}},$$

na którym określamy surjekcję

$$\pi_{\mathcal{R}_{g_{..}}} : \mathcal{R}_{g_{..}} \rightarrow B : [(x, f, i)]_{\sim_{g_{..}}} \mapsto x.$$

Zauważmy, że dowolna klasa $[(x, f, i)]_{\sim_{g_{..}}}$ zawiera dokładnie jednego reprezentanta o ustalonym indeksie, $(x, f, i) \in \mathcal{O}_i \times F \times \{i\}$, gdyż – wprost z definicji –

$$(y, g, i) \in [(x, f, i)]_{\sim_{g_{..}}} \implies (y, g) = (x, g_{ii}(x)(f)) = (x, \text{id}_F(f)) = (x, f),$$

a ponieważ także

$$\forall (x, f) \in \mathcal{O}_i \times F : (x, f, i) \in [(x, f, i)]_{\sim_{g_{..}}},$$

przeto otrzymujemy bijekcję

$$[\tau_i] : \pi_{\mathcal{R}_{g_{..}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F : [(x, f, i)]_{\sim_{g_{..}}} \mapsto (x, f).$$

Następnie wprowadzamy na $\mathcal{R}_{g_{..}}$ topologię ilorazową nazywając otwartym dowolny podzbiór $\mathcal{O} \subset \mathcal{R}_{g_{..}}$, którego przeciwobraz względem rzutu

$$(2) \quad \pi_{\sim} : \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F) \longrightarrow \mathcal{R}_{g_{..}}$$

jest otwarty w $\tilde{\mathcal{R}}_{g_{..}}$ w topologii sumy rozłącznej⁵ przestrzeni $\mathcal{O}_i \times F$, $i \in I$, z których każda jest nośnikiem topologii produktowej. W rzeczonyj topologii ilorazowej bijekcje $[\tau_i]$ są homeomorfizmami, a rzut $\pi_{\mathcal{R}_{g_{..}}}$ jest ciągły. Otrzymana tu topologia jest hausdorffowska. Istotnie, ilekroć $[(x_1, f_1, i_1)]_{\sim_{g_{..}}} \neq [(x_2, f_2, i_2)]_{\sim_{g_{..}}}$, mamy dwie możliwości: albo $x_2 \neq x_1$, a wtedy rozdzielamy punkty x_1 i x_2 zbiorami otwartymi – odpowiednio – $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_{i_1}$ i $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_{i_2}$ w hausdorffowskiej (z założenia) bazie, po czym tworzymy jawnie rozłączne otoczenia otwarte $\pi_{\sim}(\mathcal{O}_{\alpha} \times F \times \{i_{\alpha}\})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ obu klas w $\mathcal{R}_{g_{..}}$ ($\pi_{\sim}$ utożsamia punktu we włóknie nad *wspólnym* punktem w bazie!), albo też $x_2 = x_1$ przy $i_2 = i_1$ (jako że $x_2 = x_1$, możemy *wybrać* $i_2 = i_1$, ewentualnie za cenę zmiany f_2), a wtedy rozdzielamy punkty f_1 i f_2 zbiorami otwartymi – odpowiednio – $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$ w hausdorffowskim (także z założenia) włóknie F i na zakończenie tworzymy rozłączne otoczenia otwarte $\pi_{\sim}(\mathcal{O}_{i_1} \times \mathcal{U}_{\alpha} \times \{i_1\})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ obu klas w $\mathcal{R}_{g_{..}}$ (tym razem utożsamienia dotyczą punktów w $\bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F)$ o indeksach pokrycia *innych* niż i_1).

Możemy już teraz skonstruować atlas na tak określonej przestrzeni topologicznej. W tym celu ustalamy atlas na zbiorze $\mathcal{O}_i$ poprzez ograniczenie dowolnego atlasu na bazie B , otrzymując tym sposobem mapy lokalne $\xi_{i,A} : \mathcal{O}_{i,A} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{i,A}$, $A \in J_i$ na podzbiorach $\mathcal{O}_{i,A} \in \mathcal{T}(\mathcal{O}_i)$ (w topologii podprzestrzeni) modelowanych na $\mathcal{U}_{i,A} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{x_n})$, $n = \dim B$, a do tego – atlas na włóknie złożony z map lokalnych $\zeta_{\alpha} : \mathcal{V}_{\alpha} \xrightarrow{\cong} \mathcal{W}_{\alpha}$, $\alpha \in K$ na podzbiorach $\mathcal{V}_{\alpha} \in \mathcal{T}(F)$ modelowanych na $\mathcal{W}_{\alpha} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{x_m})$, $m = \dim F$. To uczyniwszy, definiujemy atlas na $\mathcal{R}_{g_{..}}$ jako zbiór map lokalnych

$$\begin{aligned} \kappa_{i,A,\alpha} & : \quad \mathcal{Q}_{i,A,\alpha} \equiv \pi_{\sim}(\mathcal{O}_{i,A} \times \mathcal{V}_{\alpha}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{i,A} \times \mathcal{W}_{\alpha} \subset \mathbb{R}^{x_n+m} \\ & : \quad [(x, f, i)]_{\sim_{g_{..}}} \mapsto (\xi_{i,A}(x), \zeta_{\alpha}(f)), \end{aligned}$$

⁵Topologię sumy rozłącznej tworzą zbiory, których przeciwobrazy względem *wszystkich* iniekcji kanonicznych $\mathcal{O}_j \times F \longrightarrow \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F)$ są otwarte.

które są dobrze określone, jako że – w świetle wcześniejszych naszych ustaleń – istnieje jedyny reprezentant $(x, f) \in \mathcal{O}_{i,A} \times \mathcal{V}_\alpha \subset \mathcal{O}_i \times F$ klasy $[(x, f, i)]_{\sim_{g_{\cdot,\cdot}}}$ o ustalonym indeksie pokrycia $i \in I$. Na przecięciu ich dziedzin znajdujemy transformacje współrzędniowe

$$\begin{aligned} \kappa_{i,A,\alpha j,B,\beta} &\equiv \kappa_{i,A,\alpha} \circ \kappa_{j,B,\beta}^{-1} & : & \quad \kappa_{j,B,\beta}(\mathcal{O}_{i,A j,B} \times \mathcal{V}_{\alpha\beta}) \xrightarrow{\cong} \kappa_{i,A,\alpha}(\mathcal{O}_{i,A j,B} \times \mathcal{V}_{\alpha\beta}) \\ & & : & \quad (\xi_{j,B}(x), \zeta_\beta(f)) \mapsto (\xi_{i,A}(x), \zeta_\alpha \circ g_{ij}(x)(f)) \\ & & \equiv & \quad (\xi_{i,A} \circ \xi_{j,B}^{-1}(\xi_{j,B}(x)), \zeta_\alpha \circ (g_{ij} \circ \xi_{j,B}^{-1})(\xi_{j,B}(x)) \circ \zeta_\beta^{-1}(\zeta_\beta(f))) . \end{aligned}$$

Zważywszy, że odwzorowania $\xi_{i,A} \circ \xi_{j,B}^{-1}$ są transformacjami współrzędniowymi (rozdrobnionego) atlasu na B , C^∞ -gładkimi z założenia, a ponadto $g_{ij} \circ \xi_{j,B}^{-1}$ są lokalnymi prezentacjami odwzorowań przejścia, także C^∞ -gładkimi (w działaniu na F , w rozumieniu opisu odwzorowań g_{ij} podanego w treści dowodzonego twierdzenia) z założenia, i wreszcie $\zeta_\alpha \circ g_{ij}(x) \circ \zeta_\beta^{-1}$ są lokalnymi prezentacjami automorfizmów $g_{ij}(x)$ włókna F , również C^∞ -gładkimi z założenia, stwierdzamy, że transformacje $\kappa_{i,A,\alpha j,B,\beta}$ są C^∞ -gładkie, zatem mapy lokalne $\kappa_{i,A,\alpha}$ określają na $\mathcal{R}_{g_{\cdot,\cdot}}$ strukturę rozmaiłości różniczkowalnej klasy C^∞ . Względem tejże struktury odwzorowania $[\tau_i]$ są (tautologicznie) dyfeomorfizmami klasy C^∞ (także rzut na bazę, $\pi_{\mathcal{R}_{g_{\cdot,\cdot}}} \upharpoonright_{\mathcal{Q}_{i,A,\alpha}} \equiv \text{pr}_1 \circ [\tau_i]$, jest klasy C^∞) i określają na $\mathcal{R}_{g_{\cdot,\cdot}}$ strukturę wiązki włóknistej klasy C^∞ .

Na zakończenie wykażemy równoważność struktur wiązki włóknistej: wyjściowej na danej wiązce włóknistej (E, B, F, π_E) , o lokalnych trywializacjach $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F$, $i \in I$, i tej zrekonstruowanej w sposób opisany wyżej z jej odwzorowań przejścia g_{ij} . W tym celu rozważymy odwzorowania dane lokalnie w postaci

$$(3) \quad \iota_i := [\tau_i]^{-1} \circ \tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F \xrightarrow{\cong} \pi_{\mathcal{R}_{g_{\cdot,\cdot}}}^{-1}(\mathcal{O}_i), \quad i \in I$$

i zauważamy, że te lokalne dyfeomorfizmy w dowolnym punkcie $y \in \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_{ij})$, zadawanym przez pewne $x \in \mathcal{O}_{ij}$ oraz $f \in F$ w postaci $y = \tau_i^{-1}(x, f)$, spełniają relację

$$\begin{aligned} \iota_j(y) &\equiv \iota_j(\tau_i^{-1}(x, f)) \equiv [\tau_j]^{-1} \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1}(x, f) = [\tau_j]^{-1}(x, g_{ji}(x)(f)) = [\tau_i]^{-1} \circ [\tau_i] \circ [\tau_j]^{-1}(x, g_{ji}(x)(f)) \\ &= [\tau_i]^{-1}(x, g_{ij}(x) \circ g_{ji}(x)(f)) = [\tau_i]^{-1}(x, f) \equiv [\tau_i]^{-1} \circ \tau_i \circ \tau_i^{-1}(x, f) \equiv \iota_i(y), \end{aligned}$$

czyli że stanowią ograniczenia określonego globalnie dyfeomorfizmu

$$\iota : E \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}_{g_{\cdot,\cdot}},$$

dane wzorem

$$\iota \upharpoonright_{\pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \iota_i,$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{R}_{g_{\cdot,\cdot}} \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{R}_{g_{\cdot,\cdot}}} \\ B & \xlongequal{\text{id}_B} & B \end{array},$$

która pozwala nam zidentyfikować ι jako postulowany izomorfizm wiązek. □

Powyższy wynik rekonstrukcyjny uogólnia się w naturalny sposób na morfizmy wiązek.

Twierdzenie 3 (O rekonstrukcji morfizmu wiązek włóknistych). Przyjmijmy zapis Def. 2. Dane lokalne $h_{(j^2, i^1)}$ morfizmu wiązek $(\Phi, f) : (E_1, B_1, F_1, \pi_{E_1}) \longrightarrow (E_2, B_2, F_2, \pi_{E_2})$ o odwzorowaniach przejścia $g_{i^\alpha j^\alpha}^{(\alpha)} : \mathcal{O}_{i^\alpha j^\alpha} \longrightarrow \text{Aut}(F_\alpha)$ stworzyszonych z trywializacjami lokalnymi $\tau_{i^\alpha}^{(\alpha)}$

nad pokryciami trywializującymi $\mathcal{O}_{B_\alpha}$ baz B_α spełniają na $\mathcal{O}_{(j^2, i^1)(l^2, k^1)}^f \equiv \mathcal{O}_{(j^2, i^1)}^f \cap \mathcal{O}_{(l^2, k^1)}^f \ni x$ warunek

$$(4) \quad h_{(l^2, k^1)}(x) = f^* g_{l^2 j^2}^{(2)}(x) \circ h_{(j^2, i^1)}(x) \circ g_{i^1 k^1}^{(1)}(x).$$

I odwrotnie, niechaj $(E_\alpha, B_\alpha, F_\alpha, \pi_{E_\alpha})$ i $\mathcal{O}_{B_\alpha}$ oraz $f : B_1 \longrightarrow B_2$ i $\mathcal{O}_{B_1}^f$ będą jak w treści Def. 2. Dowolna stowarzyszona z $\mathcal{O}_{B_1}^f$ rodzina odwzorowań

$$h_{(j^2, i^1)} : \mathcal{O}_{(j^2, i^1)}^f \longrightarrow C^\infty(F_1, F_2), \quad (j^2, i^1) \in I^2 \times I^1$$

indukujących odwzorowania klasy C^∞

$$\mathcal{O}_{(j^2, i^1)}^f \times F_1 \longrightarrow F_2 : (x, \phi) \longmapsto h_{(j^2, i^1)}(x)(\phi)$$

i spełniających powyższy warunek określa morfizm wiązek włókniстых $(\Phi, f) : (E_1, B_1, F_1, \pi_{E_1}) \longrightarrow (E_2, B_2, F_2, \pi_{E_2})$.

Dowód: Dla danego morfizmu (Φ, f) o danych lokalnych $h_{(j^2, i^1)}$ stwierdzamy równość, spełnioną dla dowolnych $(x, \phi) \in \mathcal{O}_{(j^2, i^1)(l^2, k^1)}^f \times F_1$,

$$\begin{aligned} & (f(x), h_{(l^2, k^1)}(x)(\phi)) = (\tau_{l^2}^{(2)} \circ \Phi \circ \tau_{k^1}^{(1)-1})(x, \phi) \\ &= ((\tau_{l^2}^{(2)} \circ \tau_{j^2}^{(2)-1}) \circ (\tau_{j^2}^{(2)} \circ \Phi \circ \tau_{i^1}^{(1)-1}) \circ (\tau_{i^1}^{(1)} \circ \tau_{k^1}^{(1)-1}))(x, \phi) \\ &= ((\tau_{l^2}^{(2)} \circ \tau_{j^2}^{(2)-1}) \circ (\tau_{j^2}^{(2)} \circ \Phi \circ \tau_{i^1}^{(1)-1}))(x, g_{i^1 k^1}^{(1)}(x)(\phi)) \\ &= (\tau_{l^2}^{(2)} \circ \tau_{j^2}^{(2)-1})(f(x), (h_{(j^2, i^1)}(x) \circ g_{i^1 k^1}^{(1)}(x))(\phi)) \\ &= (f(x), (g_{l^2 j^2}^{(2)}(f(x)) \circ h_{(j^2, i^1)}(x) \circ g_{i^1 k^1}^{(1)}(x))(\phi)), \end{aligned}$$

która odtwarza warunek postulowany.

I odwrotnie, niechaj $\{h_{(j^2, i^1)} : \mathcal{O}_{(j^2, i^1)}^f \longrightarrow C^\infty(F_1, F_2)\}_{(j^2, i^1) \in I^2 \times I^1}$ będzie dowolną rodziną odwzorowań spełniającą powyższy warunek dla ustalonych odwzorowań przejścia rozważanych wiązek. Definiujemy gładkie odwzorowania lokalne

$$\Phi_{(j^2, i^1)} : \pi_{E_1}^{-1}(\mathcal{O}_{(j^2, i^1)}^f) \longrightarrow \pi_{E_2}^{-1}(\mathcal{O}_{j^2}^{(2)}) : \tau_{i^1}^{(1)-1}(x, \phi) \longmapsto \tau_{j^2}^{(2)-1}(f(x), h_{(j^2, i^1)}(x)(\phi)), \quad (j^2, i^1) \in I^2 \times I^1,$$

po czym bez trudu przekonujemy się, że są one ograniczeniami odwzorowań globalnie gładkich $\Phi : E_1 \longrightarrow E_2$,

$$\Phi_{(j^2, i^1)} = \Phi \upharpoonright_{\pi_{E_1}^{-1}(\mathcal{O}_{(j^2, i^1)}^f)},$$

oto bowiem w $x \in \mathcal{O}_{(j^2, i^1)(l^2, k^1)}^f$ stwierdzamy

$$\begin{aligned} & \Phi_{(l^2, k^1)}(\tau_{i^1}^{(1)-1}(x, \phi)) = \Phi_{(l^2, k^1)}(\tau_{k^1}^{(1)-1}(x, g_{k^1 i^1}^{(1)}(x)(\phi))) \\ & \equiv \tau_{l^2}^{(2)-1}(f(x), h_{(l^2, i^1)}(x)(g_{k^1 i^1}^{(1)}(x)(\phi))) = \tau_{j^2}^{(2)-1}(f(x), g_{j^2 l^2}^{(2)}(f(x))(h_{(l^2, i^1)}(x)(g_{k^1 i^1}^{(1)}(x)(\phi))))), \end{aligned}$$

czyli – w świetle (4) –

$$\Phi_{(l^2, k^1)}(\tau_{i^1}^{(1)-1}(x, \phi)) = \Phi_{(j^2, i^1)}(\tau_{i^1}^{(1)-1}(x, \phi)).$$

□

Dotychczasowa dyskusja przygotowuje nas do geometrycznie lub fizykalnie uzasadnionych specjalizacji nader pojemnego pojęcia wiązki włókniστηj.

2. WIĄZKI WEKTOROWE

Geometrycznie absolutnie naturalnym, a wręcz *kanonicznym* i – także, choć nie wyłącznie z tego powodu – modelowym przykładem wiązki włóknistej jest wiązka styczna nad rozmaitością różniczkowalną $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ klasy C^∞ , którą wprowadziliśmy w Def.1. Nie jest to bynajmniej jedyna jej definicja. Ta, którą przedstawimy poniżej, bazuje na Tw.2 i eksponuje zupełnie wprost fundamentalną cechę wiązki stycznej, jaką jest obecność struktury $\mathbb{R}$ -liniowej we włóknie.

Definicja 3. Wiązka styczna gładkiej rozmaitości $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ wymiaru $n \in \mathbb{N}^\times$, o atlasie $\widehat{\mathcal{A}} = \{\kappa_i\}_{i \in I}$ stowarzyszonym z pokryciem otwartym $\mathcal{O}_M = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ rozmaitości M , to wiązka włóknista $(TM, M, \mathbb{R}^{\times n}, \pi_{TM})$ określona przez 1-kocykl $Dt_{ij} \equiv D(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1}) \circ \kappa_j \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ według schematu z Tw.2, zatem jak następuje:

- przestrzenią totalną wiązki jest zbiór klas abstrakcji

$$TM := \left(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times n} \right) / \sim_{Dt..}$$

relacji

$$(x, v, i) \sim (y, w, j) \iff \begin{cases} x = y \in \mathcal{O}_{ij} \\ v = D(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1})(\kappa_j(x))(v) \equiv Dt_{ij}(x)(v) \end{cases} ;$$

- rzutem na bazę jest odwzorowanie

$$\pi_{TM} : TM \longrightarrow M : [(x, v, i)]_{\sim_{Dt..}} \longmapsto x,$$

którego poziomica

$$T_x M := \pi_{TM}^{-1}(\{x\})$$

nosi miano **przestrzeni stycznej** w punkcie x ;

- topologia zbioru TM jest topologią ilorazową indukowaną wzdłuż surjektywnego rzutu

$$\pi_\sim : \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times n} \longrightarrow \left(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times n} \right) / \sim_{Dt..} : (x, v, i) \longmapsto [(x, v, i)]_{\sim_{Dt..}}$$

z topologii sumy rozłącznej przestrzeni $\mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times n}$, o injekcjach kanonicznych

$$j_i : \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times n} \longrightarrow \bigsqcup_{j \in I} \mathcal{O}_j \times \mathbb{R}^{\times n} : (x, v) \longmapsto (x, v, i), \quad i \in I,$$

z których każda jest nośnikiem topologii produktowej,

$$\mathcal{T}(TM) := \left\{ \mathcal{O} \subset TM \mid \forall_{i \in I} : j_i^{-1}(\pi_\sim^{-1}(\mathcal{O})) \in \mathcal{T}(\mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times n}) \right\};$$

- strukturę różniczkową na przestrzeni topologicznej TM definiują (tautologicznie homeomorficzne) odwzorowania

$$T\kappa_i : \pi_{TM}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times n} : [(x, v, i)]_{\sim_{Dt..}} \longmapsto (\kappa_i(x), v), \quad i \in I,$$

zwane **mapami naturalnymi** (współczynniki rozkładu wektora v w (dowolnej, więc np. standardowej) bazie są współrzędnymi globalnymi na $\mathbb{R}^{\times n}$), które określają transformacje współrzędniowe

$$\begin{aligned} T\kappa_i \circ (T\kappa_j)^{-1} \upharpoonright_{\kappa_j(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{\times n}} & : \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{\times n} \xrightarrow{\cong} \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{\times n} \\ & : (\kappa_j(x), v) \longmapsto (\kappa_i(x), Dt_{ij}(x)(v)), \end{aligned}$$

w oczywisty sposób gładkie – mamy tu zatem do czynienia z gładkim działaniem grupy strukturalnej $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) \ni Dt_{ij}(x)$.

Klasę abstrakcji

$$(5) \quad V(x) := [(x, v, i)]_{\sim_{Dt..}} \in T_x M$$

określamy mianem **wektora stycznego** do rozmaitości $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ (zaczeplonego) w punkcie $x \in M$.

Odwzorowanie gładkie

$$\mathbf{0}_{TM} : M \longrightarrow TM : x \longmapsto [(x, \mathbf{0}^n, i)]_{\sim_{Dt..}}$$

nosi miano **cięcia zerowego** wiązki stycznej TM .

Struktura liniowa, której oczekujemy od modelu „przestrzeni ruchów infinitesimalnych”, jest w tym ujęciu zakodowana wprost w przemyślnym wyborze lokalnego modelu włókna $\mathbb{R}^{\times \dim M}$, o naturalnej interpretacji w terminach lokalnych współrzędnych.

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Wybierzmy dowolny punkt $x \in \mathcal{O}_i \subset M$ rozmaitości $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ wymiaru $n \in \mathbb{N}^\times$, a wówczas odwzorowanie

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_x \kappa_i &: \mathsf{T}_x M \xrightarrow{\mathsf{T}\kappa_i} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times n} \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbb{R}^{\times n} \\ &: [(x, v, i)]_{\sim_{\text{Dt}..}} \mapsto (\kappa_i(x), v) \mapsto v, \end{aligned}$$

będące złożeniem lokalnej mapy naturalnej na TM z kanonicznym rzutem na drugą składową iloczynu kartezjańskiego, jest bijekcją i jako takie w kanoniczny sposób indukuje na $\mathsf{T}_x M$ strukturę przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowej,

$$\mathsf{T}_x M \underset{\mathbb{R}\text{-lin.}}{\cong} \mathbb{R}^{\times n},$$

określaną mianem **przestrzeni stycznej do rozmaitości M w punkcie x** .

Dowód: Strukturę $\mathbb{R}$ -liniową, o której mowa w tezie stwierdzenia, określa formuła

$$\lambda_1 \triangleright [(x, v_1, i)]_{\sim_{\text{Dt}..}} + \lambda_2 \triangleright [(x, v_2, i)]_{\sim_{\text{Dt}..}} := [(x, \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2, i)]_{\sim_{\text{Dt}..}},$$

zapisana dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Wobec $\mathbb{R}$ -liniowego charakteru relacji z Def. 3, struktura ta jest dobrze określona. Istotnie, niechaj $x \in \mathcal{O}_{ij}$ i niech $w_\alpha := \text{Dt}_{ji}(x)(v_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$, a wtedy

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \triangleright [(x, w_1, j)]_{\sim_{\text{Dt}..}} + \lambda_2 \triangleright [(x, w_2, j)]_{\sim_{\text{Dt}..}} = [(x, \lambda_1 \triangleright w_1 + \lambda_2 \triangleright w_2, j)]_{\sim_{\text{Dt}..}} \\ &= [(x, \lambda_1 \triangleright \text{Dt}_{ji}(x)(v_1) + \lambda_2 \triangleright \text{Dt}_{ji}(x)(v_2), j)]_{\sim_{\text{Dt}..}} = [(x, \text{Dt}_{ji}(x)(\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2), j)]_{\sim_{\text{Dt}..}} \\ &= [(x, \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2, i)]_{\sim_{\text{Dt}..}} \equiv \lambda_1 \triangleright [(x, v_1, i)]_{\sim_{\text{Dt}..}} + \lambda_2 \triangleright [(x, v_2, i)]_{\sim_{\text{Dt}..}}. \end{aligned}$$

□

Uwaga 2. Równoważność (izomorfizm) między oboma opisami wiązki stycznej – tym z Def. 1 i tym z Def. 3 – zgodną z naturalną strukturą liniową na włóknach TM (patrz: Stw. 1) określają odwzorowania

$$(6) \quad V_x : [\gamma]_{\sim_x} \mapsto [(\gamma(0), \text{D}(\kappa_i \circ \gamma)(0), i)]_{\sim_{\text{Dt}..}},$$

o odwrotnościach

$$\Gamma_x : [(x, v, i)]_{\sim_{\text{Dt}..}} \mapsto [-\varepsilon, \varepsilon[\exists t \mapsto \kappa_i^{-1}(\kappa_i(x) + t \triangleright v) \in \mathcal{O}_i]_{\sim_x}.$$

W szczególności bez trudu wskazujemy nad każdym punktem B bazę w wiązce przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowych w opisie pierwotnym, a mianowicie – dla $x \in \mathcal{O}_i$ i pewnego $\varepsilon_k > 0$ –

$$\mathsf{P}_x = \bigoplus_{k=1}^n \langle [\gamma_k]_{\sim_x} \rangle_{\mathbb{R}}, \quad \gamma_k :]-\varepsilon_k, \varepsilon_k[\longrightarrow M : t \mapsto \tau_i^{-1}(\tau_i(x) + t \triangleright e_k),$$

gdzie $\{e_k\}_{k \in \overline{1, n}}$ jest bazą standardową $\mathbb{R}^{\times n}$.

Zaobserwowaną powyżej strukturę wiązki przestrzeni liniowych formalizujemy w

Definicja 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, ustalmy (dowolnie) $n \in \mathbb{N}$ i rozważmy $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ze standardową topologią (euklidesową) i strukturą różniczkową klasy C^∞ . **Wiązka wektorowa rzędu r nad ciałem $\mathbb{K}$ klasy C^∞** to wiązka włóknista $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times r}, \pi_{\mathbb{V}})$ o własnościach

- $\forall_{x \in B} : \mathbb{V}_x \equiv \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\{x\}) \in \text{Ob } \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}$;

- ograniczenia dyfeomorfizmów klasy C^∞ (lokalnych trywializacji)

$$\text{pr}_2 \circ \tau_i|_{\mathbb{V}_x} : \mathbb{V}_x \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{\times r}, \quad x \in B$$

są izomorfizmami przestrzeni $\mathbb{K}$ -liniowych,

przy czym odwzorowania definiujące strukturę $\mathbb{K}$ -liniową na włóknach $\mathbb{V}$ są klasy C^∞ , w szczególności więc mamy odwzorowanie gładkie

$$(7) \quad \mathbb{A} : \mathbb{V} \times_B \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$

modelowane na definiującej operacji binarnej $A^r : \mathbb{K}^{\times r} \times \mathbb{K}^{\times r} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times r}$ w rozumieniu diagramu przemienne

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times_B \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\mathbb{A}} & \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \downarrow \tau_i \times \tau_i & & \downarrow \tau_i \\ (\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times r}) \times_{\mathcal{O}_i} (\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times r}) & \xrightarrow{(\text{pr}_1, A^r \circ \text{pr}_{2,4})} & \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times r} \end{array}$$

oraz rodzinę dyfeomorfizmów

$$(9) \quad \mathbb{K}^\times \longrightarrow \text{Diff}^k(\mathbb{V}) : \lambda \longmapsto \mathbb{L}_\lambda$$

o $\mathbb{K}$ -liniowych ograniczeniach do włókien, uzupełnianą przez odwzorowanie $\mathbb{K}$ -liniowe $\mathbb{L}_{0\mathbb{K}}$, modelowanych na definiującym działaniu $\ell^r : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{\times r} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times r}$ w rozumieniu diagramu przemienne

$$(10) \quad \begin{array}{ccc} \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\mathbb{L}_\lambda} & \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \downarrow \tau_i & & \downarrow \tau_i \\ \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times r} & \xrightarrow{\ell_\lambda^r} & \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times r} \end{array} .$$

W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mówimy o **rzeczywistej wiązce wektorowej**, gdy zaś $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ – o **zespolonej wiązce wektorowej**.

Rząd wiązki będziemy oznaczać symbolem $\text{rk } \mathbb{V}$. Ilekroć $\text{rk } \mathbb{V} = 1$, wiązkę określamy mianem **wiązki liniowej** i zwyczajowo oznaczamy symbolem L ,

$$\begin{array}{c} \mathbb{K} \rightsquigarrow L \\ \downarrow \pi_L \\ B \end{array} .$$

Odwzorowanie (różniczkowalne klasy C^∞)

$$\mathbf{0}_{\mathbb{V}} : B \longrightarrow \mathbb{V} : x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, \mathbf{0}^r), \quad x \in \mathcal{O}_i,$$

nosi miano **cięcia zerowego** wiązki wektorowej $\mathbb{V}$. Jest ono cięciem globalnym $\mathbb{V}$ w rozumieniu Uwagi 1, przy czym zarówno zbiór cięć lokalnych $\Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V})$, jak i zbiór cięć globalnych $\Gamma(\mathbb{V})$ niosą naturalną (punktową) strukturę modułu nad pierścieniem $C^\infty(B, \mathbb{K})$.

Podwiązka wektorowa rzędu $s \leq r$ wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times r}, \pi_{\mathbb{V}})$ to podwiązka $(\mathbb{W}, B, \mathbb{K}^{\times s}, \pi_{\mathbb{V}}|_{\mathbb{W}})$ tejże wiązki (włóknistej) o tej własności, że nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ jej włókno $\mathbb{W}_x \subset \mathbb{V}_x$ jest podprzestrzenią $\mathbb{K}$ -liniową.

Morfizm wiązek wektorowych (nad ciałem $\mathbb{K}$) $(\mathbb{V}_\alpha, B_\alpha, \mathbb{K}^{\times r_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $r_\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ to dwójka (Φ, f) złożona z morfizmu wiązek włóknistych

$$(\Phi, f) : (\mathbb{V}_1, B_1, \mathbb{K}^{\times r_1}, \pi_{\mathbb{V}_1}) \longrightarrow (\mathbb{V}_2, B_2, \mathbb{K}^{\times r_2}, \pi_{\mathbb{V}_2}),$$

którego ograniczenie do włókna nad dowolnym punktem bazy $x \in B_1$,

$$(11) \quad \Phi|_{\mathbb{V}_{1x}} : \mathbb{V}_{1x} \longrightarrow \mathbb{V}_{2f(x)},$$

jest odwzorowaniem $\mathbb{K}$ -liniowym. **Rząd morfizmu wiązek wektorowych** (Φ, f) to odwzorowanie

$$\mathrm{rk}(\Phi, f) : B_1 \longrightarrow \mathbb{N} : x \longmapsto \mathrm{rk}(\Phi|_{\mathbb{V}_{1x}}).$$

Wiązki wektorowe skończonego rzędu nad ciałem $\mathbb{K}$ o bazie B wraz z morfizmami wiązek wektorowych między nimi tworzą **kategorię wiązek wektorowych skończonego rzędu nad ciałem $\mathbb{K}$ nad B** , którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbf{VectBun}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}(B).$$

Poniższe stwierdzenie ustanawia intymną relację pomiędzy bazami przestrzeni cięć i trywializacjami wiązki wektorowej.

Twierdzenie 4. Przyjmijmy oznaczenia Def.4. Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między trywializacjami lokalnymi wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times r}, \pi_{\mathbb{V}})$ i zbiorami r nigdzie nieznikających cięć lokalnych definiującymi nad każdym punktem bazy $x \in B$ (w ich wspólnym nośniku) r wektorów liniowo niezależnych $\sigma^k(x)$, $k \in \overline{1, r}$ w odnośnych włóknach $\mathbb{V}_x$. W szczególności wiązka wektorowa jest globalnie trywialna, tj. izomorficzna z wiązką $(B \times \mathbb{K}^{\times r}, B, \mathbb{K}^{\times r}, \mathrm{pr}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje r jej cięć globalnych o tej własności.

Dowód: Dla odciążenia zapisu rozważymy warunki globalnej trywializowalności $\mathbb{V}$ (tj. trywializowalności nad B).

Niechaj

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V} & \xrightarrow[\cong]{\tau} & B \times \mathbb{K}^{\times r} \\ \pi_{\mathbb{V}} \downarrow & & \downarrow \mathrm{pr}_1 \\ B & \xlongequal{\mathrm{id}_B} & B \end{array}$$

będzie trywializacją (globalną) $\mathbb{V}$. Wówczas dyfeomorficznym obrazem zbioru $\{\varepsilon_a : B \longrightarrow B \times \mathbb{K}^{\times r} : x \longmapsto (x, e_a)\}_{a \in \overline{1, r}}$ liniowo niezależnych cięć zadanych przez dowolną bazę $\{e_a\}_{a \in \overline{1, r}}$ we włóknach $\mathbb{K}^{\times r}$ jest gładko indeksowana przez $B \ni x$ rodzina baz we włóknach $\mathbb{V}_x \ni (\tau^{-1} \circ \varepsilon_a)(x)$. Mamy przeto rodzinę pożądaną cięć $\tau^{-1} \circ \varepsilon_a \in \Gamma(\mathbb{V})$. Istotnie, wobec wertykalności τ zachodzi

$$\pi_{\mathbb{V}} \circ (\tau^{-1} \circ \varepsilon_a) = (\pi_{\mathbb{V}} \circ \tau^{-1}) \circ \varepsilon_a = \mathrm{pr}_1 \circ \varepsilon_a = \mathrm{id}_B,$$

a przy tym τ^{-1} jest liniowe we włóknach i odwracalne, zatem wektory $(\tau^{-1} \circ \varepsilon_a)(x)$ są liniowo niezależne.

I odwrotnie: Niechaj $\sigma_a \in \Gamma(\mathbb{V})$, $a \in \overline{1, r}$ będzie zbiorem cięć, o którym mowa w treści twierdzenia. Wówczas dowolny wybór bazy $\{e_a\}_{a \in \overline{1, r}}$ w przestrzeni $\mathbb{K}^{\times r}$ daje nam do dyspozycji definicję odwzorowania (jawnie gładkiego)

$$\Phi : B \times \mathbb{K}^{\times r} : (x, v^a \triangleright e_a) \longmapsto v^a \triangleright \sigma_a(x).$$

W obrazie dowolnej ($\mathbb{K}$ -liniowej) trywializacji *lokalnej* $\tau_{\mathcal{O}} : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{\times r}$ (a takowe istnieją) nad $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(B)$ otrzymujemy, w $x \in \mathcal{O}$,

$$(\tau_{\mathcal{O}} \circ \Phi)(x, v^a \triangleright e_a) = (x, v^a \varepsilon_a^b(x) \triangleright e_b)$$

dla pewnych gładkich odwzorowań $\varepsilon_a^b : \mathcal{O} \longrightarrow \mathrm{GL}(r; \mathbb{K})$ – istotnie, $\{\sigma_a(x)\}_{a \in \overline{1, r}}$ jest bazą w $\mathbb{V}_x$, zatem $\{(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_{\mathcal{O}} \circ \sigma_a)(x)\}_{a \in \overline{1, r}}$ jest bazą w $(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_{\mathcal{O}})(\mathbb{V}_x) \equiv \mathbb{K}^{\times r}$, mamy więc odwracalną transformację bazy $(\varepsilon_a^b(x))_{a \in \overline{1, r}}^{b \in \overline{1, r}}$. W naturalnych współrzędnych (lokalnych) zadawanych przez $\tau_{\mathcal{O}}$ i mapę lokalną $\kappa_{\mathcal{O}} \equiv (x^\mu)^{\mu \in \overline{1, \dim B}}$ na $\mathcal{O}$ (której istnienie możemy założyć bez straty ogólności rozważań) odwzorowanie Φ jest w oczywisty sposób gładko odwracalne – wszak odwracanie macierzy $\varepsilon(x) \equiv (\varepsilon_a^b(x))_{a \in \overline{1, r}}^{b \in \overline{1, r}}$ jest operacją algebraiczną, więc gładko zależną od argumentu $x \in B$, od którego sama wyjściowa macierz $\varepsilon(x)$ zależy gładko wprost z konstrukcji; z kolei zależność od

współrzędnych v^a we włóknie jest liniowo odwracalna, więc także gładka. Mówiąc wprost: mamy reprezentację współrzędną Φ w postaci

$$(x^\mu, v^a) \mapsto (x^\mu, (\varepsilon \circ x^\nu)_b^a v^b)$$

więc też reprezentację odwzorowania odwrotnego w postaci

$$(x^\mu, w^a) \mapsto (x^\mu, ((\varepsilon \circ x^\nu)^{-1})_b^a w^b).$$

To w sumie oznacza, że $\Phi|_{\mathcal{O}} \in \text{Diff}(\mathcal{O} \times \mathbb{K}^{r_1}, \mathbb{V}|_{\mathcal{O}})$, zatem – wobec dowolności wyboru $\mathcal{O}$ (i $\tau_{\mathcal{O}}$) – także $\Phi \in \text{Diff}(B \times \mathbb{K}^{r_1}, \mathbb{V})$. $\square$

Podobnie jak same wiązki wektorowe, morfizmy tych wiązek pokrywające dyfeomorfizm identycznościowy na bazie mają prosty opis lokalny, z którego przyjdzie nam skorzystać w przyszłości.

Twierdzenie 5. Przyjmijmy zapis Def. 4. Dowolny morfizm (wertikalny) (Φ, id_B) wiązek wektorowych $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{r_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ o odnośnych trywializacjach lokalnych $\tau_i^\alpha : \pi_{\mathbb{V}_\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{r_\alpha}$ (stowarzyszonych z pokryciem współtrywializującym $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$) i odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}(r_\alpha; \mathbb{K})$, opisany przez diagram przemienności

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_1 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{V}_2 \\ \pi_{\mathbb{V}_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathbb{V}_2} \\ B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B \end{array},$$

zadaje rodzinę $\{h_i\}_{i \in I}$ odwzorowań macierzowych (lokalnie) klasy C^∞

$$h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \text{Mat}(r_1 \times r_2, \mathbb{K}), \quad i \in I$$

o własności

$$(12) \quad \forall_{x \in \mathcal{O}_{ij}} : g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x) = h_i(x) \cdot g_{ij}^1(x).$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu.

Dowód: Wybierzmy (dowolnie) bazę $\{e_a\}_{a \in \overline{1, r_1}}$ w przestrzeni $\mathbb{K}^{r_1}$ i na tej podstawie zdefiniujmy cięcia lokalne

$$(13) \quad \varepsilon_a^{(i)} : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{V}_1 : x \mapsto \tau_i^{1-1}(x, e_a).$$

Zauważmy, że odwzorowanie Φ jest w pełni określone przez wartości przyjmowane przezeń na powyższych cięciach, oto bowiem wobec założonej $\mathbb{K}$ -liniowości τ_i oraz Φ w dowolnym punkcie

$$v \equiv \tau_i^{-1}(x, v^a \triangleright_n e_a) \equiv \mathbb{L}_{v^a}^{(1)}(\varepsilon_a^{(i)}(x)), \quad x \in \mathcal{O}_i$$

otrzymujemy

$$\Phi(v) = \Phi(\mathbb{L}_{v^a}^{(1)}(\varepsilon_a^{(i)}(x))) = \mathbb{L}_{v^a}^{(2)} \circ \Phi(\varepsilon_a^{(i)}(x)).$$

Wybierzmy zatem (dowolnie) bazę $\{f_r\}_{r \in \overline{1, r_2}}$ w $\mathbb{K}^{r_2}$, o bazie dualnej $\{f_r^*\}_{r \in \overline{1, r_2}}$, i oznaczmy odnośne cięcia lokalne $\mathbb{V}_2$ jako

$$\phi_\alpha^{(i)} : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{V}_2 : x \mapsto \tau_i^{2-1}(x, f_\alpha),$$

po czym zdefiniujemy

$$h_{i\alpha\alpha} := f_\alpha^* \circ \text{pr}_2 \circ \tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1-1}(\cdot, e_a) : \mathcal{O}_i \rightarrow \text{Mat}(r_1 \times r_2; \mathbb{K}),$$

czyli poprzez formułę

$$(14) \quad \mathbb{L}_{h_{i\alpha\alpha}(x)}^2(\phi_\alpha^{(i)}(x)) := \Phi(\varepsilon_a^{(i)}(x)).$$

Powyższe dane lokalne morfizmu Φ możemy zapisać w postaci macierzy (ε_A to stosowne kanoniczne izomorfizmy $V_A^* \otimes_{\mathbb{K}} W_A \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_A, W_A)$)

$$h_i(x) := h_{i\alpha\alpha}(x) \triangleright \varepsilon_1(e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} f_\alpha), \quad x \in \mathcal{O}_i,$$

podobnie reprezentujemy też odwzorowania przejścia:

$$g_{ij}^1(x) = g_{ij\alpha\beta}^1(x) \triangleright \varepsilon_2(e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} e_b), \quad g_{ij}^2(x) = g_{ij\alpha\beta}^2(x) \triangleright \varepsilon_3(f_\alpha^* \otimes_{\mathbb{K}} f_\beta).$$

Przywoławszy definicję tych ostatnich, ustalamy relację

$$\tau_j^{2-1}(x, h_j(x)(e_a)) = \tau_i^{2-1}(x, g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x)(e_a)),$$

a jednocześnie, wobec $\mathbb{K}$ -liniowości τ_i^α oraz Φ , znajdujemy

$$\begin{aligned} \tau_j^{2-1}(x, h_j(x)(e_a)) &= \Phi(\tau_j^{1-1}(x, e_a)) = \Phi(\tau_i^{1-1}(x, g_{ij}^1(x)(e_a))) = \mathbb{L}_{g_{ij\alpha\beta}^1(x)}^2 \circ \Phi(\tau_i^{1-1}(x, e_b)) \\ &= \mathbb{L}_{g_{ij\alpha\beta}^1(x)}^2 \circ \tau_i^{2-1}(x, h_i(x)(e_b)) = \tau_i^{2-1}(x, h_i(x) \cdot g_{ij}^1(x)(e_a)). \end{aligned}$$

Niechaj teraz $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times r_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą wiązkami wektorowymi o trywializacjach lokalnych $\tau_i^\alpha : \pi_{\mathbb{V}_\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times r_\alpha}$ i odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}(r_\alpha; \mathbb{K})$. Niech też $h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \text{Mat}(r_1 \times r_2; \mathbb{K})$, $i \in I$ będzie rodziną odwzorowań jak w tezie dowodzonego twierdzenia, przy użyciu której określamy odwzorowania lokalne

$$\Phi_i : \pi_{\mathbb{V}_1}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \pi_{\mathbb{V}_2}^{-1}(\mathcal{O}_i) : \tau_i^{1-1}(x, v) \mapsto \tau_i^{2-1}(x, h_i(x)(v)),$$

które w świetle tożsamości, spełnionej dla dowolnych $x \in \mathcal{O}_{ij}$ i $v \in \mathbb{K}^{\times r_1}$,

$$\begin{aligned} \Phi_j(\tau_i^{1-1}(x, v)) &= \Phi_j(\tau_j^{1-1}(x, g_{ji}^1(x)(v))) = \tau_j^{2-1}(x, h_j(x) \cdot g_{ji}^1(x)(v)) \\ &= \tau_i^{2-1}(x, g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x) \cdot g_{ji}^1(x)(v)) = \tau_i^{2-1}(x, h_i(x)(v)) = \Phi_i(\tau_i^{1-1}(x, v)), \end{aligned}$$

jawią się ograniczeniami odwzorowania globalnie gładkiego

$$\Phi : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2, \quad \Phi|_{\pi_{\mathbb{V}_1}^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i.$$

Odwzorowanie to jest w oczywisty sposób $\mathbb{K}$ -liniowe i zachowuje włókna. □

3. GEOMETRYZACJE PODSTAWOWYCH KONSTRUKCJI LINIOWYCH

Definicja wiązki wektorowej nad rozmaitością dostarcza schematu geometryzacji czysto algebraicznej struktury przestrzeni wektorowej. W ślad za nią możemy – na gruncie Tw.2 – dokonać geometryzacji rozmaitych naturalnych operacji na przestrzeniach wektorowych. Poniżej przedstawiamy kilka z nich, które napotkamy w dalszej części kursu.

3.1. Suma prosta wiązek wektorowych.

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Def.4. **Suma prosta (Whitneya) wiązek wektorowych** $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times r_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ nad $\mathbb{K}$, o wspólnej bazie B to wiązka wektorowa

$$(\mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2 \equiv \mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2, B, \mathbb{K}^{\times r_1} \oplus \mathbb{K}^{\times r_2} \equiv \mathbb{K}^{\times r_1 + r_2}, \pi_{\mathbb{V}_1} \circ \text{pr}_1|_{\mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2}),$$

w której $\mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2$ jest produktem włóknistym rozmaitości $\mathbb{V}_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ opisywanym przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2 & \\ \text{pr}_1|_{\mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2} \swarrow & & \searrow \text{pr}_2|_{\mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2} \\ \mathbb{V}_1 & & \mathbb{V}_2 \\ \pi_{\mathbb{V}_1} \searrow & & \swarrow \pi_{\mathbb{V}_2} \\ & B & \end{array}$$

i wyposażonym w strukturę podrozmaitości gładko włożonej w rozmaitość produktową $\mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2$, zgodnie z tezą [Sus23, Tw. 8].

Włókno sumy Whitneya nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ przyjmuje postać

$$(\mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2)_x \equiv \mathbb{V}_{1x} \oplus \mathbb{V}_{2x},$$

stanowi więc suma Whitneya naturalną adaptację konstrukcji sumy prostej przestrzeni wektorowych do geometrycznej kategorii przestrzeni modelowanych lokalnie na produktach (elementów topologii) rozmaitości różniczkowalnej z topologicznymi przestrzeniami wektorowymi $\mathbb{K}^{\times r}$, $r \in \mathbb{N}$.

Wiązkę tę można również opisać – w duchu Tw. 2 – w terminach danych lokalnych jej składników, tj. wspólnego pokrycia trywializującego $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ wiązek $\mathbb{V}_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ (otrzymanego np. poprzez wspólne rozdrobnienie odnośnych pokryć trywializujących) wraz z określonymi dlań odwzorowaniami przejścia $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}(r_\alpha; \mathbb{K})$, $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$. Odwzorowania przejścia sumy Whitneya obu wiązek, stowarzyszone z tym samym pokryciem trywializującym i stanowiące podstawę rekonstrukcji (klasy równoważności) wiązki $\mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2$, to

$$g_{ij}^{1 \oplus 2} := g_{ij}^1 \oplus g_{ij}^2 : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(r_1) \oplus \text{GL}_{\mathbb{K}}(r_2) \subset \text{GL}_{\mathbb{K}}(r_1 + r_2).$$

Z sumą Whitneya wiązek wektorowych stowarzyszona jest para epimorfizmów wiązek wektorowych

$$\text{pr}_\alpha : \mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2 \rightarrow \mathbb{V}_\alpha, \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

przyjmujących nad (dowolnym) punktem $x \in B$ postać

$$\text{pr}_{\alpha x} : \mathbb{V}_{1x} \oplus \mathbb{V}_{2x} \rightarrow \mathbb{V}_{\alpha x} : (v_1, v_2) \mapsto v_\alpha.$$

3.2. Iloczyn tensorowy wiązek wektorowych.

Definicja 6. Przyjmijmy zapis Def. 4. **Iloczyn tensorowy wiązek wektorowych** $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times r_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ nad $\mathbb{K}$, o wspólnej bazie B i odnośnych odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(r_\alpha)$ stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ to dowolna wiązka wektorowa

$$(\mathbb{V}_1 \otimes_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2, B, \mathbb{K}^{\times r_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{\times r_2} \cong \mathbb{K}^{\times r_1 \cdot r_2}, \pi_{\mathbb{V}_1} \circ \text{pr}_1)$$

izomorficzna z wiązką zrekonstruowaną, w rozumieniu Tw. 2, z danych lokalnych

$$g_{ij}^{1 \otimes 2} := g_{ij}^1 \otimes g_{ij}^2 : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{\times r_2}) \equiv \text{GL}_{\mathbb{K}}(r_1 \cdot r_2).$$

Iloczyn tensorowy wiązek wektorowych można w szczególności utworzyć dokonując stosownej topologizacji sumy rozłącznej włókien nad punktami bazy $B \ni x$, wybierając je w postaci

$$(\mathbb{V}_1 \otimes_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2)_x \equiv \mathbb{V}_{1x} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_{2x}.$$

Mamy tu zatem do czynienia z naturalną adaptacją konstrukcji iloczynu tensorowego przestrzeni wektorowych.

3.3. Wiązka homomorfizmów i wiązka dualna.

Definicja 7. Przyjmijmy zapis Def. 4. **Wiązka homomorfizmów** (zwana także **wiązką Hom**) wiązek wektorowych $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times r_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ nad $\mathbb{K}$, o wspólnej bazie B i odnośnych odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(r_\alpha)$ stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ to dowolna wiązka wektorowa

$$(\text{Hom}_{\mathbb{K}, B}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2), B, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r_1}, \mathbb{K}^{\times r_2}) \cong \mathbb{K}^{\times r_1 \cdot r_2}, \pi_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)})$$

izomorficzna z wiązką zrekonstruowaną, w rozumieniu Tw. 2, z danych lokalnych

$$g_{ij}^{1 \rightarrow 2} := \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r_1}, g_{ij}^2(\cdot)) \circ \text{Hom}_{\mathbb{K}}(g_{ij}^1(\cdot)^{-1}, \mathbb{K}^{\times r_2})$$

$$: \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r_1}, \mathbb{K}^{\times r_2})),$$

zapisanych w terminach odwzorowań $\mathbb{K}$ -liniowych, które w dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_{ij}$ przyjmują postać – odpowiednio –

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(g_{ij}^1(x)^{-1}, \mathbb{K}^{\times r_2}) : \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r_1}, \mathbb{K}^{\times r_2}) \hookrightarrow$$

$$: \quad \chi \mapsto \chi \circ g_{ij}^1(x)^{-1},$$

oraz

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r_1}, g_{ij}^2(x)) &: \quad \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r_1}, \mathbb{K}^{\times r_2}) \circlearrowright \\ &: \quad \chi \mapsto g_{ij}^2(x) \circ \chi. \end{aligned}$$

Włókno wiązki homomorfizmów nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ jest postaci

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)_x \equiv \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_{1x}, \mathbb{V}_{2x}),$$

mamy przeto do czynienia z naturalną adaptacją konstrukcji przestrzeni $\mathbb{K}$ -liniowej homomorfizmów między (ustalonymi) przestrzeniami wektorowymi.

Definicja 8. Przyjmijmy zapis Def. 7. **Wiązka dualna** (zwana także **wiązką dwoistą**) wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times r}, \pi_{\mathbb{V}})$ to wiązka Hom (o oczywistym rzucie na bazę)

$$(\mathbb{V}^* \equiv \text{Hom}_{\mathbb{K}, B}(\mathbb{V}, B \times \mathbb{K}), B, \mathbb{K}^{\times r*} \cong \mathbb{K}^{\times r}, \pi_{\mathbb{V}^*}),$$

w której definicji $(B \times \mathbb{K}, B, \mathbb{K}, \text{pr}_1)$ jest trywialną wiązką wektorową rzędu 1 nad $\mathbb{K}$. Innymi słowy, mamy tu do czynienia z wiązką wektorową zadaną przez 1-kocykl przejścia $(g_{ij}(\cdot)^{-1})^*$ (gdzie $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}(r; \mathbb{K})$ jest 1-kocyklem przejścia $\mathbb{V}$).

3.4. Kompleksyfikacja rzeczywistej wiązki wektorowej.

Definicja 9. Przyjmijmy zapis Def. 4, zakładając przy tym, że $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$. **Kompleksyfikacja wiązki wektorowej** $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times r}, \pi_{\mathbb{V}})$ to wiązka $\mathbb{C}$ -liniowa (o oczywistym rzucie na bazę)

$$(\mathbb{V}^{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{V} \otimes_{\mathbb{R}, B} (B \times \mathbb{C}), B, \mathbb{C}^{\times r}, \pi_{\mathbb{V}^{\mathbb{C}}}),$$

w której definicji $(B \times \mathbb{C}, B, \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^{\times 2}, \text{pr}_1)$ jest trywialną wiązką wektorową rzędu 1 nad $\mathbb{C}$, z naturalną strukturą trywialnej wiązki wektorowej rzędu 2 nad $\mathbb{R}$ (indukowanej przez kanoniczne włożenie $j_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : r \mapsto (r, 0)$). Działanie ciała bazowego $\mathbb{C}$ na $\mathbb{V}^{\mathbb{C}}$ jest przy tym dziedziczone z naturalnego działania

$$\text{id}_B \times \ell_{\zeta} : B \times \mathbb{C} \circlearrowright : (x, z) \mapsto (x, \zeta \cdot z)$$

tegoż ciała na czynniku trywialnym $B \times \mathbb{C}$ wedle schematu

$$\mathbb{L}_{\zeta} \equiv \text{id}_{\mathbb{V}} \otimes (\text{id}_B \times \ell_{\zeta}), \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

LITERATURA

[Sus23] R.R. Suszek, “*Niezbędnik różniczkowo-geometryczny*”, notatki uzupełniające, 2023.