

ENTER THE SPINOR,
CZYLI O MODUŁACH CLIFFORDA, SPINORACH CZYSTYCH I MOCACH NIECZYSTYCH
(MAWF '25/26 1.XVII I 1.XVIII [RRS])



FIG. 1. Adaptacja plakatu do filmu pt. „Wejście smoka” z 1973 r. z Lee Jun-fanem (o pseudonimie aktorskim Bruce Lee Karate Mistrz) w roli głównej.

SPIS TREŚCI

1. Reprezentacje spinorowe – prosty obrazek matematyczny	2
2. Spinory czyste i flagi zerowe – studium przypadków	4
2.1. Spinor czysty Cartana	5
2.2. Flaga zerowa Penrose’a	9
3. Fizyczne (krypto-prohilbertowskie) realizacje spinorów*	9
3.1. Przypadek $\varepsilon = +1$	12
3.2. Przypadek $\varepsilon = -1$	14
3.3. Spinory	15
Literatura	16

Wprowadzenie do ogólnej teorii reprezentacji algebr, z naciskiem na specyfikę algebr (pół)prostych wynikającym z ich pierwszoplanowej roli w klasyfikacji rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda, stanowi punkt wyjścia do dyskusji obiektów algebro-geometrycznych o ogromnym znaczeniu w matematycznym modelowaniu materii oddziałującej – spinorów, którymi zajmiemy się w

poniższej, ostatniej już części algebraicznej składowej kursu. Geometryczny aspekt przedstawionych tu konstrukcji otworzy przed nami drogę ku dalszym rozważaniom nad fizykalnie istotnymi geometryzującymi konstrukcjami algebraicznych poznanych dotychczas.

1. REPREZENTACJE SPINOROWE – PROSTY OBRAZEK MATEMATYCZNY

Próba zrozumienia struktury podniesienia izometrycznych automorfizmów przestrzeni kwadratowej do jej algebry Clifforda, zrealizowana na poprzednim wykładzie, doprowadziła nas do konstrukcji centralnego rozszerzenia grupy obrotów zachowujących orientację przestrzeni kwadratowej i tym samym przygotowała grunt pod wieńczącą nasze dociekania algebraiczne (w obecnym kontekście)

Definicja 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, przy czym niechaj $((V, Q), \mathbb{K}) \in \{(\mathbb{R}^{p,q}, \mathbb{R}), (\mathbb{C}^{n,0}, \mathbb{C})\}$, i niech $S \in \text{Ob Vect}_{\mathbb{K}}$. **Reprezentacja spinorowa** grupy $\text{Spin}(V, Q)$ to ograniczenie (nietrywialnej) nieprzywiedlnej reprezentacji

$$\rho : \text{Cliff}(V, Q)^0 \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(S)$$

parzystej podalgebry algebry Clifforda $\text{Cliff}(V, Q)$ do tejże grupy

$$(1) \quad \text{Spin}(V, Q) \subset \text{Cliff}(V, Q)^0,$$

przy czym w przypadku $((V, Q), \mathbb{K}) = (\mathbb{R}^{p,q}, \mathbb{R})$ i ρ rzeczywistej mówimy o **rzeczywistej reprezentacji spinorowej** grupy $\text{Spin}_{\mathbb{R}}(p, q)$, a w przypadku $((V, Q), \mathbb{K}) = (\mathbb{C}^{n,0}, \mathbb{C})$ i ρ zespolonej – o **zespolonej reprezentacji spinorowej** grupy $\text{Spin}_{\mathbb{C}}(n) \equiv \text{Spin}(\mathbb{C}^{n,0})$.

Uwaga 1. Należy zwrócić uwagę, że reprezentacja spinorowa nie zstępuje do (czyli nie indukuje reprezentacji) $\text{SO}(V, Q)$, oto bowiem $\rho(-e^C) = -\text{id}_S$.

W odwołaniu do wyników dotychczasowych naszych dociekań możemy bez trudu dokonać kompletnej klasyfikacji wprowadzonych tu obiektów.

Twierdzenie 1 (Klasyfikacyjne dla reprezentacji spinorowych $/\mathbb{R}$). Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj

$$\rho : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(S)$$

będzie (nietrywialną rzeczywistą) reprezentacją nieprzywiedlną. Reprezentacja spinorowa

$$\rho|_{\text{Spin}_{\mathbb{R}}(p,q)} : \text{Spin}_{\mathbb{R}}(p, q) \longrightarrow \text{GL}(S; \mathbb{R})$$

przyjmuje – w zależności od $(p, q) \in \mathbb{N}^{\times 2}$ – następującą postać

- dla $q = p \pm 1 + 8k$: nieprzywiedlna rzeczywista na $S = \mathbb{R}^{2^{l+4k}}$, gdzie

$$l = \begin{cases} p, & \text{gd}y \quad q = p + 1 \pmod{8} \\ p - 1, & \text{gd}y \quad q = p - 1 \pmod{8} \end{cases}$$

(spinory Pauliego);

- dla $q = p \pm 3 + 8k$: nieprzywiedlna kwaternionowa na $S = \mathbb{H}^{2^{l+4k}}$, gdzie

$$l = \begin{cases} p, & \text{gd}y \quad q = p + 3 \pmod{8} \\ p - 3, & \text{gd}y \quad q = p - 3 \pmod{8} \end{cases}$$

(spinory Pauliego);

- dla $q = p \pm 2 + 8k$: nieprzywiedlna zespolona na $S = \mathbb{C}^{2^{l+4k}}$, gdzie

$$l = \begin{cases} p, & \text{gd}y \quad q = p + 2 \pmod{8} \\ p - 1, & \text{gd}y \quad q = p - 2 \pmod{8} \end{cases}$$

(spinory Pauliego);

- dla $q = p+8k$: przywiedlna rzeczywista na $S = S_+ \oplus S_-$ ((bi)spinory Diraca) rozkładalna na dwie wzajem nierównoważne nieprzywiedlne rzeczywiste reprezentacje na $S_{\pm} = \mathbb{R}^{2^{p+4k}}$ (**chiralne spinory Weyla**);
- dla $q = p+4+8k$: przywiedlna rzeczywista na $S = S_+ \oplus S_-$ ((bi)spinory Diraca) rozkładalna na dwie wzajem nierównoważne nieprzywiedlne kwaternionowe reprezentacje na $S_{\pm} = \mathbb{H}^{2^{p+4k}}$ (chiralne spinory Weyla).

Przy tym w przypadku $q - p = 3 \pmod{4}$ wynik powyższej indukcji reprezentacji grupy Spin nie zależy od wyboru nieprzywiedlnej reprezentacji algebry półprostej $Cl_{p,q}^{\mathbb{R}}$.

Dowód: Zważywszy Równ. (1), kluczową rolę w dowodzie odgrywają izomorfizmy (zapisane dla dowolnych $p, k \in \mathbb{Z}$, dla których zapis ma sens)

$$\begin{aligned}
Cl_{p,p+1+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong Cl_{p,p+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}(2^{p+4k}), & Cl_{p,p-1+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong Cl_{p,p-2+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}(2^{p-1+4k}), \\
Cl_{p,p+3+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong Cl_{p,p+2+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{H}(2^{p+4k}), & Cl_{p,p-3+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong Cl_{p,p-4+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{H}(2^{p-3+4k}), \\
Cl_{p,p+2+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong Cl_{p,p+1+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}(2^{p+4k}), & Cl_{p,p-2+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong Cl_{p,p-3+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}(2^{p-1+4k}), \\
Cl_{p,p+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong Cl_{p,p-1+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}(2^{p+4k}) \oplus \mathbb{R}(2^{p+4k}), & Cl_{p,p+4+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong Cl_{p,p+3+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{H}(2^{p+4k}) \oplus \mathbb{H}(2^{p+4k}),
\end{aligned}$$

odczytane wprost z (dowodu) Tw. 11-12.5 po przywołaniu tezy Stw. 11-12.3. Wobec powyższego pozostaje upewnić się, że ograniczenie nieprzywiedlnych reprezentacji odnośnych (prostych) algebr macierzowych do zawartych w nich w sposób właściwy grup Spin nie prowadzi do pojawienia się podprzestrzeni niezmienniczych względem obrazu ograniczenia w grupie liniowej przestrzeni reprezentacji w obrębie tychże przestrzeni, a ponadto – że w przypadku, gdy odnośne parzyste podalgebry Clifforda są półproste, ich nierównoważne reprezentacje pozostają nierównoważnymi po ograniczeniu ich do grup Spin. Oba te fakty wynikają jednak wprost z tego, że $\text{Spin}_{\mathbb{R}}(p, q)$ zawiera addytywną bazę $Cl_{p,q}^{\mathbb{R}0}$, a określenie reprezentacji na takowej bazie w pełni charakteryzuje tę reprezentację, oto bowiem równoważność dwóch reprezentacji (ograniczonych) ewaluowanych na bazie addytywnej implikowałaby ich równoważność w ogólności, a do tego niezmienniczość S względem reprezentacji ograniczonej do podstruktury zawierającej ową bazę implikowałaby bezpośrednio jej niezmienniczość względem reprezentacji sprzed ograniczenia. Rozkłady reprezentacji nieprzywiedlnej algebry Clifforda na sumę prostą wzajem nierównoważnych reprezentacji spinorowych w przypadkach $q - p = 0 \pmod{4}$ jest bezpośrednią konsekwencją Stw. 15-16.12, które zarazem przynosi uzasadnienie użycia określenia „chiralny” w odniesieniu do spinorów.

Na koniec zajmijmy się niezależnością wyniku opisanej indukcji reprezentacji grupy $\text{Spin}_{\mathbb{R}}(p, q)$ od wyboru nieprzywiedlnej reprezentacji algebry półprostej $Cl_{p,q}^{\mathbb{R}}$. Oznaczmy jako

$$\iota_3^{\pm} : Cl_{p,p+3+8k}^{\pm} \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}(2^{p+4k}), \quad \iota_7^{\pm} : Cl_{p,p-1+8k}^{\pm} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}(2^{p+4k})$$

izomorfizmy (11-12.8), po czym zauważmy, że w świetle Równ. (11-12.7) zachodzi tożsamość

$$Cl_{p,q}^{\mathbb{R}0} = \{ \gamma_+ + J_{\mathbb{R}^{p+q}}(\gamma_+) \mid \gamma_+ \in Cl_{p,q}^+ \},$$

a ponieważ na mocy Stw. 11-12.2 $J_{\mathbb{R}^{p+q}}$ jest izomorfizmem między algebrą $Cl_{p,q}^+$ i $Cl_{p,q}^-$, przeto reprezentacje

$$\rho_{\text{def}} \circ \iota_3^- \circ J_{\mathbb{R}^{p+q}} : Cl_{p,p+3+8k}^+ \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^{2^{p+4k}})$$

oraz

$$\rho_{\text{def}} \circ \iota_7^- \circ J_{\mathbb{R}^{p+q}} : Cl_{p,p-1+8k}^+ \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2^{p+4k}})$$

są nieprzywiedlne (wszak $\iota_k^- \circ J_{\mathbb{R}^{p+q}}$ są izomorfizmami $\mathbb{R}$ -algebr), a zatem – wobec prostoty $Cl_{p,q}^+$ – nieodzwrotnie

$$\rho_{\text{def}} \circ \iota_k^- \circ J_{\mathbb{R}^{p+q}} \sim \rho_{\text{def}} \circ \iota_k^+, \quad k \in \{3, 7\},$$

mimo więc relację $\rho_+ \not\sim \rho_-$, orzeczoną w Stw.15-16.11 (i), w ograniczeniu do $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}$ stwierdzamy istnienie splataczy $\chi_3 \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^{2^{p+4k}})$ oraz $\chi_7 \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2^{p+4k}})$ spełniających warunki

$$\rho_-(\gamma_+ + J_{\mathbb{R}^{p+q}}(\gamma_+)) = \rho_{\text{def}} \circ \iota_k^- \circ J_{\mathbb{R}^{p+q}}(\gamma_+) = \chi_k \circ \rho_{\text{def}} \circ \iota_k^+(\gamma_+) \circ \chi_k^{-1} \equiv \chi_k \circ \rho_+(\gamma_+ + J_{\mathbb{R}^{p+q}}(\gamma_+)) \circ \chi_k^{-1},$$

czyli

$$\rho_- \upharpoonright_{\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}} \sim \rho_+ \upharpoonright_{\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}}.$$

□

Twierdzenie 2 (Klasyfikacyjne dla reprezentacji spinorowych $/\mathbb{C}$). Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj

$$\rho : \text{Cl}_n^{\mathbb{C}} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(S)$$

będzie (nietrywialną zespoloną) reprezentacją nieprzywiedlną. Reprezentacja spinorowa

$$\rho \upharpoonright_{\text{Spin}_{\mathbb{C}}(n)} : \text{Spin}_{\mathbb{C}}(n) \longrightarrow \text{GL}(S; \mathbb{C})$$

przyjmuje – w zależności od $n \in \mathbb{N}$ – następującą postać

- dla $n \in 2\mathbb{N} + 1$: nieprzywiedlna zespolona na $S = \mathbb{C}^{2^{\frac{n-1}{2}}}$ (**spinory Pauliego**);
- dla $n \in 2\mathbb{N}$: przywiedlna zespolona na $S = S_+ \oplus S_-$ (**(bi)spinory Diraca**) rozkładalna na dwie wzajem nierównoważne nieprzywiedlne zespolone reprezentacje na $S_{\pm} = \mathbb{C}^{2^{\frac{n}{2}-1}}$ (**chiralne spinory Weyla**).

Przy tym w przypadku $n \in 2\mathbb{N} + 1$ wynik powyższej indukcji reprezentacji grupy Spin nie zależy od wyboru nieprzywiedlnej reprezentacji algebry półprostej $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$.

Dowód: W pełni analogiczny do dowodu Tw. 1.

□

Jest całkowicie jasnym, że przedstawiona tu dyskusja reprezentacji spinorowych stanowi ledwie wprowadzenie do teorii reprezentacji grupy Spin , przynoszącej – m.in. – odpowiedź na pytanie o kompletną klasyfikację *wszystkich* nierównoważnych nieprzywiedlnych jej reprezentacji oraz pierścienia tychże reprezentacji. Szczegółowe studium struktury tego ostatniego, które z racji fundamentalnej roli, jaką nieprzywiedlne reprezentacje grupy Spin odgrywają w modelowaniu pól fizycznych, powinno być przedmiotem każdego umotywowanego fizykalnie wykładu z teorii grup i algebr (Liego), pozwala wyróżnić reprezentację spinorową jako jego elementarny generator. Doskonałym źródłem intuicji i podstawowych konstrukcji w tym zakresie jest monografia Cartana [Car38a, Car38b].

2. SPINORY CZYSTE I FLAGI ZEROWE – STUDIUM PRZYPADKÓW

Konstrukcje algebraiczne napotykanne w kategorii przestrzeni kwadratowych mają zazwyczaj naturalną i czytelną interpretację geometryczną, która zasadza się na intuicji dotyczącej pojęć „długości wektora”, „kąta między wektorami”, „obrotu wektora” i „odbicia wektora w hiperpłaszczyźnie”. Idąc tym tropem, więc – na obecnym czysto algebraicznym etapie¹ naszych rozważań – nieco może arbitralnie wyposażając nośnik struktury przestrzeni kwadratowej w atrybut „geometryczności” (którego odmawiamy nośnikowi struktury reprezentacji odnośnej grupy Spin), możemy zadać pytanie o geometryczny aspekt konstrukcji spinora, rozumianego jako wektor z przestrzeni reprezentacji grupy Spin nakrywającej grupę obrotów przestrzeni kwadratowej. Pięknej w swej

¹Po przejściu do geometryzacji struktur algebraicznych dostrzeżemy zasadność takiego rozróżnienia ontologicznego, a to z tej racji, że struktura przestrzeni kwadratowej będzie pochodzić ze zmetryzowanej wiązki stycznej nad rozmaitością, gdy tymczasem nośnik reprezentacji będzie „ledwie” modelem przestrzeni wewnętrznych stopni swobody pola spinorowego.

naturalności i prostocie odpowiedzi na tak postawione pytanie (choć nie wyczerpującej denotatu, a to z racji istnienia spinorów nie-czystych (*sic!*)) udzielił É. Cartan we wspomianej już wcześniej monografii [Car38a, Car38b] poświęconej spinorom. Odpowiedź tę doskonale uzupełnia konstrukcja R. Penrose'a przedstawiona w trakcie konferencji Battelle Rencontres, a spisana w [Pen68].

2.1. Spinor czysty Cartana. Na obecnym etapie mamy z jednej strony przestrzeń kwadratową (V, Q) , zanurzoną w odnośnej algebrze Clifforda $\text{Cliff}(V, Q)$, w której emulujemy izometrię za pośrednictwem grupy $\text{Spin}(V, Q) \subset \text{Cliff}(V, Q)$, a z drugiej – przestrzeń S reprezentacji spinorowej tej ostatniej, całkowicie niezależną *a priori* od V . Okazuje się, że w pewnych szczególnych okolicznościach można wprost „zrealizować” niezerowe wektory izotropowe z V w nośniku reprezentacji S i stowarzyszyć z nimi spinory. Taka jest idea konstrukcji Cartana, którą przedstawiamy poniżej. Całkowicie ogólna i szczegółowa jej analiza wykracza poza ramy niniejszego kursu, jednakowoż jej znaczenie w budowaniu konkretnej geometrycznej konotacji dla abstrakcyjnego pojęcia spinora stanowi dostateczną motywację choćby tylko dla wnikliwego prześledzenia tej konstrukcji na wybranym przykładzie, co czynimy poniżej. Konstrukcja ta jest zorganizowana wokół

Definicja 2. Przyjmijmy zapis Def. 13-14.1 i 1. **Spinor czysty** to wektor z przestrzeni reprezentacji spinorowej grupy $\text{Spin}(V, Q)$ anihilowany przez obraz $j_V^C(W) \subset \text{Cliff}(V, Q)$ dowolnej maksymalnej podprzestrzeni Q -zerowej $W \subset V$.

Przechodząc do konkretnej realizacji, rozważmy przestrzeń kwadratową $\mathbb{R}^{1,2}$, dla której $\text{Cl}_{1,2}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}(2) \equiv \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{\times 2})$, a skoro tak to $\rho_s : \text{Spin}(\mathbb{R}^{1,2}) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{\times 2})$, co pozwala traktować wektory z $\mathbb{C}^{\times 2}$ jako pinory $\mathbb{R}^{1,2}$ ($\text{Pin}(\mathbb{R}^{1,2})$ zawiera addytywną bazę algebry Clifforda $\mathbb{C}(2)$). Wśród nich są spinory, odzworowywane w siebie nawzajem przez $\text{Spin}(\mathbb{R}^{1,2}) \subset \text{Pin}(\mathbb{R}^{1,2})$. Poszukamy ich w obrazie

$$I_{1,2}^{\times} := \delta_E^{(1,2)-1}(\{0\}) \setminus \{0\}$$

w $\mathbb{C}^{\times 2}$, który skonstruujemy w następnym kroku. Oto więc rozważmy wektory

$$v \equiv (t, x, y) \in \mathbb{R}^{1,2} \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

o „normie”

$$\delta_E^{(1,2)}(v) = t^2 - x^2 - y^2.$$

Ilekość v jest izotropowy,

$$\delta_E^{(1,2)}(v) = 0,$$

możemy – wobec warunku $t \neq 0$ (którego niespełnienie implikowałoby równość $v = (0, 0, 0)$) – „wyciągnąć pierwiastek kwadratowy” z wektora v wprowadzając wektor

$$\xi \equiv \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{\times 2}$$

o składowych zadanych formułami

$$\xi_1^2 = \frac{1}{2}(x, y), \quad \xi_2^2 = -\frac{1}{2}(x, -y),$$

spełniających po uwzględnieniu warunku izotropowości v układ warunków

$$(2) \quad \begin{cases} \xi_1^2 - \xi_2^2 = x \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 = iy \\ 2\xi_1\xi_2 = it \end{cases}.$$

Istotnie, otrzymujemy wówczas tożsamość

$$t^2 - x^2 - y^2 = -4\xi_1^2\xi_2^2 - (\xi_1^2 - \xi_2^2)^2 + (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 = 0.$$

Rozwiązanie ogólne powyższego układu ma postać

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+iy}{2}} \\ \varepsilon_2 \sqrt{\frac{-x+iy}{2}} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\},$$

przy czym wybieramy wspólną dla obu składowych gałąź funkcji $\sqrt{\cdot}$, dla której $\sqrt{-1} = i$. Znaki ε_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ związane są warunkiem

$$\text{sign}(t)|t| \equiv t = -2i\xi_1\xi_2 = -i\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{-x^2-y^2} = \varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{t^2} = \varepsilon_1\varepsilon_2|t|,$$

z którego wyprowadzamy relację

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cdot \text{sign}(t).$$

Ta pozwala ostatecznie zapisać rozwiązanie

$$(3) \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{x+iy}{2}} \\ \text{sign}(t) \sqrt{\frac{-x+iy}{2}} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\},$$

czyli – jeśli wprowadzić pomocniczą notację zespoloną $z \equiv x + iy \in \mathbb{C}$, w której $\bar{z} = x - iy$ –

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{z}{2}} \\ \text{sign}(t) i \sqrt{\frac{\bar{z}}{2}} \end{pmatrix} =: \xi(v), \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}.$$

Zauważmy, że znak ε nie może być ustalony w sposób niesamosprzeczny jednocześnie dla *wszystkich* wektorów izotropowych, oto bowiem przy obrocie o kąt φ w płaszczyźnie $\{(0, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ (zachowującym zbiór wektorów izotropowych), przy którym składowe wektora v transformują się wedle formuł

$$v \equiv (t, z) \mapsto (t, e^{i\varphi} \cdot_{\mathbb{C}} z) =: R_\varphi(v),$$

składowe spinora podlegają transformacji

$$\xi(v) \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \xi(v) \equiv \xi(R_\varphi(v)).$$

W szczególności pod wpływem pełnego obrotu, $\varphi = 2\pi$, następuje odbicie

$$\xi(v) \mapsto \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi} \xi(R_\varphi(v)) = -\xi(v).$$

Mamy przeto nieusuwalną niejednoznaczność

$$I_{1,2}^\times \ni v \mapsto \pm \xi(v) \in \mathbb{C}^{\times 2},$$

przy czym odwzorowanie ξ określa injekcję $I_{1,2}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^{\times 2}/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Jak scharakteryzować algebraicznie jego obraz?

Podane przez nas rozwiązanie problemu „wyciągnięcia pierwiastka kwadratowego z wektora” ma swoją zgrabną (i w pełni równoważną z powyższą) realizację macierzową, do której omówienia przejdziemy obecnie. Oto więc z wektorem v stowarzyszymy w sposób $\mathbb{R}$ -liniowy macierz

$$\gamma(v) := \begin{pmatrix} t & iz \\ i\bar{z} & -t \end{pmatrix} \equiv t \triangleright \gamma(e_0) + x \triangleright \gamma(e_1) + y \triangleright \gamma(e_2),$$

używając przy tej okazji trójki macierzy

$$\gamma(e_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

odpowiadających wektorom bazy standardowej. Zauważmy, że spełnione są tożsamości

$$\gamma(e_0)^2 = \mathbf{1}_2 \equiv \delta_E^{(1,2)}(e_0) \triangleright \mathbf{1}_2,$$

$$\gamma(e_1)^2 = -\mathbf{1}_2 \equiv \delta_E^{(1,2)}(e_1) \triangleright \mathbf{1}_2,$$

$$\gamma(e_2)^2 = -\mathbf{1}_2 \equiv \delta_E^{(1,2)}(e_2) \triangleright \mathbf{1}_2$$

oraz

$$\{\gamma(e_0), \gamma(e_1)\} = \mathbf{0}_2, \quad \{\gamma(e_0), \gamma(e_2)\} = \mathbf{0}_2, \quad \{\gamma(e_1), \gamma(e_2)\} = \mathbf{0}_2,$$

czyli w sumie – dla dowolnych wektorów $v_\alpha = v_\alpha^\mu \triangleright e_\mu \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \{1, 2\}$ –

$$(4) \quad \{\gamma(v_1), \gamma(v_2)\} = v_1^\mu v_2^\nu \{\gamma(e_\mu), \gamma(e_\nu)\} = \Phi_{\delta_E^{(1,2)}}(v_1, v_2) \triangleright \mathbf{1}_2.$$

Stwierdzamy zatem, że γ jest kanonicznym odwzorowaniem Clifforda

$$(5) \quad \gamma : \mathbb{R}^{1,2} \longrightarrow \mathbb{C}(2) \cong \text{Cl}_{1,2}^{\mathbb{R}},$$

a do tego spełnia warunek strukturalny

$$\det_{(2)} \gamma = -\delta_E^{(1,2)}.$$

Rozważmy następnie wektor $\xi(v) \in \mathbb{C}^{\times 2}$ przyporządkowany – według opisanego schematu – wektorowi izotropowemu $v \in I_{1,2}^{\times}$ oraz macierz $\gamma(v)$ stowarzyszoną z tym ostatnim. Jak wynika wprost z konstrukcji, zachodzi równość

$$\gamma(v) \odot \xi(v) \equiv \begin{pmatrix} -2i\xi_1\xi_2 & 2i\xi_1^2 \\ -2i\xi_2^2 & 2i\xi_1\xi_2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a ponieważ $\text{Ker } \gamma(v) \neq \mathbb{C}^{\times 2}$ (wszak $\gamma(v) \neq 0$), przeto dla ustalonego (dowolnie) izotropowego wektora $v \in \mathbb{R}^{1,2}$ równość

$$(6) \quad \gamma(v) \odot \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wyznacza (kierunek) $\xi \in \mathbb{C}^2$. Istotnie, wobec równości

$$\det_{(2)} \gamma(v) = -\delta_E^{(1,2)}(v) = 0$$

mamy nierówność

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } \gamma(v) > 0,$$

a zarazem – jeśli tylko $v \neq (0, 0, 0)$ – prawdziwą jest też nierówność

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } \gamma(v) < 2,$$

których koniunkcja daje nam pożądany wynik:

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } \gamma(v) = 1.$$

Przywoławszy Def. 2, domniemywamy, że powyższy $\xi \in \text{Ker } \gamma(v) \setminus \{0_{\mathbb{C}^{\times 2}}\}$ jest spinorem czystym stowarzyszonym z maksymalną podprzestrzenią $\delta_E^{(1,2)}$ -zerową $\langle v \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^{1,2}$ – istotnie, $\{\gamma(v) \mid v \in I_{1,2}^{\times}\}$ jest jej wiernym obrazem w $\text{Cl}_{1,2}^{\mathbb{R}}$. Ażeby potwierdzić to przypuszczenie, musimy jeszcze przekonać się, że wektory tej postaci rozpinają przestrzeń reprezentacji grupy $\text{Spin}_{\mathbb{R}}(1, 2)$, czyli że działanie tej grupy nie wyprowadza nas poza zbiór wektorów w $\mathbb{C}^{\times 2}$ rozważanej postaci. W tym celu rozpatrzmy transformacje macierzy $\gamma(v)$ indukowane przez standardowe działanie grupy $\text{SO}_{\mathbb{R}}(1, 2)$ na (dowolnym) wektorze v za pośrednictwem odwzorowania (5). W świetle Tw. 13-14.2 wystarczy zbadać zachowanie tejże macierzy pod wpływem złożenia dwóch odbić v w płaszczyznach $\delta_E^{(1,2)}$ -ortogonalnych do dwóch wektorów nieizotropowych. Obliczamy zatem – dla dowolnego $\mu \in \{0, 1, 2\}$ –

$$\begin{aligned} \gamma(P_{e_\mu}(v)) &= \gamma(v - 2\delta_E^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \cdot \Phi_{\delta_E^{(1,2)}}(v, e_{\bar{\mu}}) \triangleright e_{\bar{\mu}}) = \gamma(v) - 2\delta_E^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \cdot \Phi_{\delta_E^{(1,2)}}(v, e_{\bar{\mu}}) \triangleright \gamma(e_{\bar{\mu}}) \\ &= \gamma(v) - \delta_E^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \triangleright \{\gamma(v), \gamma(e_{\bar{\mu}})\} \odot \gamma(e_{\bar{\mu}}) \\ &\equiv \gamma(v) - \delta_E^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \triangleright (\gamma(v) \odot \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \gamma(e_{\bar{\mu}}) + \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \gamma(v) \odot \gamma(e_{\bar{\mu}})) \\ &= \gamma(v) - \delta_E^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \triangleright (\delta_E^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}}) \triangleright \gamma(v) + \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \gamma(v) \odot \gamma(e_{\bar{\mu}})) \\ &= -\delta_E^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \triangleright \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \gamma(v) \odot \gamma(e_{\bar{\mu}}) \equiv -\text{Ad}_{\gamma(e_{\bar{\mu}})}(\gamma(v)) \equiv \widetilde{\text{Ad}}_{\gamma(e_{\bar{\mu}})}(\gamma(v)) \end{aligned}$$

i na tej podstawie

$$\gamma(P_{e_\mu} \circ P_{e_\nu}(v)) = \text{Ad}_{\gamma(e_\mu) \odot \gamma(e_\nu)}(\gamma(v))$$

($P_{e_\mu} \circ P_{e_\nu} \in \text{O}_{\mathbb{R}}(1, 2)$, zatem $P_{e_\mu} \circ P_{e_\nu}(v) \in I_{1,2}^\times$, ilekroć $v \in I_{1,2}^\times$, więc zapis powyższy ma sens), co oznacza, że dla dowolnego $\xi \equiv \xi(v) \in \text{Ker } \gamma(v)$ jak wyżej jest

$$\gamma(e_\mu) \odot \gamma(e_\nu) \xi(v) \in \text{Ker}(\text{Ad}_{\gamma(e_\mu) \odot \gamma(e_\nu)}(\gamma(v))) \equiv \text{Ker } \gamma(P_{e_\mu} \circ P_{e_\nu}(v)),$$

tj. $\text{Spin}_{\mathbb{R}}(1, 2)$ -przetransformowany ξ -obraz wektora jest wyróżnionej przez nas postaci.

Uwzględniając równość (6) definiującą kierunek $\xi(v)$, postulujemy

$$(7) \quad \xi(P_{e_\mu}(v)) = \lambda(P_{e_\mu}) \triangleright \gamma(e_\mu) \odot \xi(v)$$

dla pewnego przyporządkowania

$$\lambda : \{P_{e_0}, P_{e_1}, P_{e_2}\} \longrightarrow \mathbb{C}^\times / (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

(rozumianego – w oczywisty sposób – jako odzwierciedlenie nieusuwalnej niejednoznaczności znaku spinora). Postulat sprawdzamy w bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned} & \gamma(P_{e_\mu}(v)) \odot (\lambda(P_{e_\mu}) \triangleright \gamma(e_\mu) \odot \xi(v)) = -\lambda(P_{e_\mu}) \triangleright \text{Ad}_{\gamma(e_\mu)}(\gamma(v)) \odot \gamma(e_\mu) \odot \xi(v) \\ & = -\lambda(P_{e_\mu}) \triangleright \gamma(e_\mu) \odot \gamma(v) \odot \xi(v) = -\lambda(P_{e_\mu}) \triangleright \gamma(e_\mu) \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

z którego – zgodnie z oczekiwaniem – wynika

$$\forall_{v \in \delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)-1}(\{0\})} \quad \forall_{\xi \in \text{Ker } \gamma(v)} : \lambda(P_{e_\mu}) \triangleright \gamma(e_\mu) \odot \xi(v) \in \text{Ker } \gamma(P_{e_\mu}(v)),$$

a ponieważ, jak uzasadniliśmy wcześniej,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } \gamma(P_{e_\mu}(v)) = 1,$$

przeto poszukiwane skalary $\lambda(P_{e_\mu})$ istnieją. Naturalnym wydaje się przy tym pytanie, czy przyporządkowanie λ rozszerza się do homomorfizmu grup

$$\tilde{\lambda} : \text{O}_{\mathbb{R}}(1, 2) \longrightarrow \mathbb{C}^\times / (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

ciągłego względem standardowej topologii na grupie $\text{Liego } \text{O}_{\mathbb{R}}(1, 2)$, dziedziczonej z $\text{GL}_{\mathbb{R}}(3) \subset \mathbb{R}(3) \cong \mathbb{R}^{\times 9}$. Przypomnijmy: grupa ta ma cztery spójne składowe: podgrupę $\text{SO}_{\mathbb{R}}(1, 2)^+ \equiv \langle P_{e_1} \circ P_{e_2} \rangle$ odwzorowań zachowujących kierunek czasu e_0 oraz orientację w przestrzeni $\langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}}$ (tzw. **ortochroniczną specjalną grupę Lorentza**) oraz jej translaty $P_{e_0}^{n_0} \cdot P_{e_1}^{n_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1, 2)^+$, $(n_0, n_1) \in \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$, tj.

$$\text{O}_{\mathbb{R}}(1, 2) = \text{SO}_{\mathbb{R}}(1, 2)^+ \sqcup P_{e_0} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1, 2)^+ \sqcup P_{e_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1, 2)^+ \sqcup P_{e_0} \cdot P_{e_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1, 2)^+.$$

Na tym etapie możemy przywołać tożsamość

$$(8) \quad P_{e_\mu} \circ P_{e_\mu} = \text{id}_{\mathbb{R}^{1,2}},$$

aby wyznaczyć

$$\xi(v) = \xi(P_{e_\mu} \circ P_{e_\mu}(v)) = \lambda(P_{e_\mu})^2 \triangleright \gamma(e_\mu) \odot \gamma(e_\mu) \odot \xi(v) = \lambda(P_{e_\mu})^2 \cdot \delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_\mu) \triangleright \xi(v).$$

Zważywszy nieusuwalną $\mathbb{Z}_2$ -niejednoznaczność w formule (3), wywodzimy stąd warunek

$$\lambda^2 \in \{-1, 1\}.$$

Przyjęte wcześniej założenie o ciągłym charakterze poszukiwanego rozszerzenia $\tilde{\lambda}$ implikuje stałość tego ostatniego na każdej z czterech spójnych składowych $\text{O}_{\mathbb{R}}(1, 2)$. Ażeby wyznaczyć $\tilde{\lambda}$ dla poszczególnych składowych, wystarczy zbadać warunek (7) w bezpośrednim odwołaniu do relacji (2). Na podstawie oczywistych równości

$$\begin{aligned} & \gamma(e_0) \odot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ -\xi_2 \end{pmatrix} =: \xi^{(0)}, \\ & \gamma(e_1) \odot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\xi_2 \\ i\xi_1 \end{pmatrix} =: \xi^{(1)}, \quad \gamma(e_2) \odot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix} =: \xi^{(2)}, \end{aligned}$$

z których wyprowadzamy reguły transformacyjne

$$\begin{aligned}(t, x, y) &\xrightarrow{\xi \mapsto \xi^{(0)}} (-t, x, y) \equiv P_{e_0}(t, x, y), \\(t, x, y) &\xrightarrow{\xi \mapsto \xi^{(1)}} (-t, x, -y) \equiv -P_{e_1}(t, x, y), \\(t, x, y) &\xrightarrow{\xi \mapsto \xi^{(2)}} (-t, -x, y) \equiv -P_{e_2}(t, x, y),\end{aligned}$$

stwierdzamy, że

$$\lambda(P_{e_0}) = 1 = -\lambda(P_{e_1}) = -\lambda(P_{e_2}),$$

a stąd już wprost wyprowadzamy

$$\tilde{\lambda}|_{\text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+} = 1 = \tilde{\lambda}|_{P_{e_0} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+}, \quad \tilde{\lambda}|_{P_{e_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+} = -1 = \tilde{\lambda}|_{P_{e_0} \cdot P_{e_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+},$$

przy czym zamiast e_1 moglibyśmy z jednakim skutkiem użyć e_2 , co niezależnie potwierdza sensowność przyjętego przyporządkowania. Takie przypisanie wartości generatorom grupy $\text{O}_{\mathbb{R}}(1,2)$ jest spójne z poczynionym przez nas na wstępie założeniem o homomorficznym charakterze $\tilde{\lambda}$, oto bowiem dla dowolnych par $(m_0, m_1), (n_0, n_1) \in \{0, 1\}^{\times 2}$ z jednej strony zachodzą relacje algebraiczne (wynikające wprost z relacji przemienności $[P_{e_\mu}, P_{e_\nu}] = 0$ w połączeniu z tożsamością (8))

$$P_{e_0}^{m_0} \cdot P_{e_1}^{m_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+ \cdot P_{e_0}^{n_0} \cdot P_{e_1}^{n_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+ \subset P_{e_0}^{m_0+n_0} \cdot P_{e_1}^{m_1+n_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+,$$

z drugiej zaś – homomorficzność $\tilde{\lambda}$ wymaga

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}|_{P_{e_0}^{m_0} \cdot P_{e_1}^{m_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+ \cdot P_{e_0}^{n_0} \cdot P_{e_1}^{n_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+} &= \tilde{\lambda}|_{P_{e_0}^{m_0} \cdot P_{e_1}^{m_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+} \cdot \tilde{\lambda}|_{P_{e_0}^{n_0} \cdot P_{e_1}^{n_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+} \\&= (-1)^{m_1} \cdot (-1)^{n_1} = (-1)^{m_1+n_1} \equiv \tilde{\lambda}|_{P_{e_0}^{m_0+n_0} \cdot P_{e_1}^{m_1+n_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+}.\end{aligned}$$

Na zakończenie zauważmy, że transformacje $\xi(v) \mapsto \pm \gamma(e_\mu) \odot \xi(v)$, indukowane przez odbicia $P_{\pm e_\mu}$, są nierozróżnialne na poziomie wektorowym, oto bowiem

$$\begin{aligned}\gamma(P_{-e_\mu}(v)) &= \gamma(v - 2\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(-e_{\bar{\mu}})^{-1} \cdot \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}}(v, -e_{\bar{\mu}}) \triangleright (-e_{\bar{\mu}})) \\&= \gamma(v - 2\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \cdot \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}}(v, e_{\bar{\mu}}) \triangleright e_{\bar{\mu}}) \equiv \gamma(P_{e_\mu}(v)).\end{aligned}$$

To samo dotyczy każdej innej pary odwzorowań indukowanych przez transformacje ortogonalne w $\mathbb{R}^{1,2}$, a różniących się o znak. Fakt ten stanowi jawne odzwierciedlenie istnienia obu krótkich ciągów dokładnych grup, o których mówi Tw. 13-14.1.

W podsumowaniu naszego studium możemy skonstatować, że oto naturalną geometryzacją algebraicznej konstrukcji spinora (czystego) w sygnaturze $(1,2)$ (będącego spinorem wśród pinorów $\mathbb{C}^{\times 2}$) jest wektor izotropowy, który jednoznacznie reprezentuje klasę spinora w $\mathbb{C}^{\times 2}/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ względem relacji $\xi \sim -\xi$.

2.2. Flaga zerowa Penrose’a. Zagadnienie do samodzielnego opracowania. Kto pierwszy?

3. FIZYCZNE (KRYPTO-PROHILBERTOWSKIE) REALIZACJE SPINORÓW*

Dotychczasowe nasze rozważania były prowadzone spójnie z prostym obrazkiem *matematycznym*, w którym pinory to elementy przestrzeni reprezentacji nieprzywiedlnej grupy $\text{Pin}(V, Q)$, spinory zaś – elementy przestrzeni reprezentacji nieprzywiedlnej grupy $\text{Spin}(V, Q)$ (patrz chociażby: [Har90]). W szczególności spinory skątne – tak nad $\mathbb{R}$, jak nad $\mathbb{C}$ – pojawiają się naturalnie w rozkładzie przestrzeni pinorów, które określiliśmy uprzednio tradycyjnym mianem (bi)spinorów Diraca. W tej sytuacji znajduje odzwierciedlenie ogólniejsza zasada: Spinory możemy indukować z pinorów poprzez ograniczenie do przestrzeni niezmienniczej względem działania parzystej podalgebry odnośnej algebry Clifforda.

Fizycy mają oczywistą namietność do kategorii $\text{Vect}_{\mathbb{C}}$ i, konsekwentnie, zespolonych reprezentacji rozważanych algebr. Z tego to powodu najczęściej rozpatrują odmienny od beznamiętnego

(a logicznie czystsze) matematycznego schemat konstrukcji reprezentacji grupy² $\text{Spin}(\mathbb{R}^{p,q})$, który przedstawiamy poniżej (zasadniczo) za [BT88]. Punktem wyjścia jest przywołanie funktora kompleksyfikacji z Tw. 11-12.6:

$$\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \mapsto \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \equiv \text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}},$$

który pozwala nam utożsamić rzeczywistą algebrę Clifforda $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ z jej wiernym obrazem $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)$ w modelu $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ zespolonej algebry Clifforda $\text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}}$ i, w zgodzie z tym utożsamieniem, indukować reprezentacje grup: $\text{Pin}(\mathbb{R}^{p,q}) \subset \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ z reprezentacji $\text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}}$ i $\text{Spin}(\mathbb{R}^{p,q}) \subset \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}$ z reprezentacji $\text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}0}$. Oczywiście fizykalnym awantażem tej konstrukcji jest jej immanentna zespoloność. W rzeczy samej, reprezentacja zespolona algebry $\text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}(0)}$ to homomorfizm algebr $\rho : \text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}(0)} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$, czyli taki homomorfizm algebr $\rho : \text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}(0)} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$, którego obraz jest w komutancie struktury zespolonej $I \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Do tego ostatniego należą w szczególności endomorfizmy realizujące elementy podzbioru³ $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \subset \text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}(0)}$. Ponadto ilekroć ρ jest wierna (czyli $\text{Ker } \rho = \{0\}$), własność tę ma także

$$\rho_{\text{ind}} \equiv \rho \upharpoonright_{\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)}.$$

Analogiczny wniosek dotyczy (nie)przywiedności: Istotnie, zachowywanie podprzestrzeni $\mathbb{C}$ -liniowej $W \subset V$ przez $\rho(\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0))$ implikuje

$$\rho(\text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}(0)})(W) \equiv \rho(\mathbb{C} \triangleright \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0))(W) = \mathbb{C} \triangleright \rho(\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0))(W) \subset \mathbb{C} \triangleright W \equiv W.$$

Zyskujemy zatem naturalny mechanizm indukcji zespolonych reprezentacji wiernych i nieprzywiednych $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}(0)}$ z takichże reprezentacji $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{C}(0)}$.

Ażeby móc postąpić dalej w naszych rozważaniach, czyniąc je ilościowymi, wprowadzimy

Definicja 3. Niechaj $\mathfrak{A} \in \text{Ob Alg}_{\mathbb{R}}$ i $V \in \text{Ob Vect}_{\mathbb{C}}$, a nadto niech $\rho : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ będzie reprezentacją zespoloną. **Reprezentacja zespolenie sprzężona (względem ρ)** to reprezentacja

$$\bar{\rho} : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} \bar{V},$$

określona na przestrzeni $\mathbb{C}$ -liniowej $\bar{V} \equiv V$ wyposażonej w działanie

$$\bar{\triangleright} : \mathbb{C} \times \bar{V} \rightarrow \bar{V} : (\lambda, v) \mapsto \bar{\lambda} \triangleright v \equiv \lambda \bar{\triangleright} v,$$

dana wzorem – zapisanym dla dowolnego $a \in \mathfrak{A}$ –

$$\bar{\rho}(a) := \overline{\rho(a)},$$

w którym stosujemy następującą notację: Dowolnemu $\chi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ odpowiada $\bar{\chi} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\bar{V}, \bar{W})$ o własności definiującej $\bar{\chi}(v) = \chi(v)$.

Przyjawszy na przyszłość bardziej przejrzysty zapis, w którym element v przestrzeni V z działaniem $\bar{\triangleright}$ jest oznaczany jako $\bar{v}$, powyższą własność zapiszemy jako $\bar{\chi}(\bar{v}) = \overline{\chi(v)}$. Warto zwrócić uwagę, że dowolna baza $\{e_i\}_{i \in \overline{1,D}}$, $D = \dim_{\mathbb{C}} V$ przestrzeni $\mathbb{C}$ -liniowej V jest zarazem bazą $\bar{V}$, której wybór pozwala ustalić prostą relację między macierzami χ i $\bar{\chi}$ na podstawie bezpośredniego rachunku:

$$\bar{\chi}_{ij} \bar{\triangleright} \bar{e}_j \equiv \bar{\chi}(\bar{e}_i) \equiv \overline{\chi(e_i)} \equiv \overline{\chi_{ij} \triangleright e_j} = \bar{\chi}_{ij} \bar{\triangleright} \bar{e}_j.$$

Ta relacja to relacja sprzężenia zespolonego,

$$(9) \quad [\bar{\chi}]_{\{\bar{e}_i\}_{i \in \overline{1,D}}} = \overline{[\chi]_{\{e_i\}_{i \in \overline{1,D}}}}.$$

Jest też – dla dowolnych $\lambda \in \mathbb{C}$ i $v \in V$ –

$$\bar{\lambda} \triangleright \bar{\chi}(\bar{v}) \equiv \overline{(\lambda \triangleright \chi)(v)} = \overline{\lambda \triangleright \chi(v)} = \bar{\lambda} \bar{\triangleright} \bar{\chi}(v) \equiv \bar{\lambda} \bar{\triangleright} \bar{\chi}(\bar{v}),$$

czyli

$$(10) \quad \overline{\lambda \triangleright \chi} = \bar{\lambda} \bar{\triangleright} \bar{\chi}.$$

²W przypadku grupy $\text{Spin}(\mathbb{C}^n)$ od samego początku wszystko jest w najlepszym porządku.

³Nie jest to, rzecz jasna, podalgebra nad $\mathbb{C}$, lecz nad $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Powyższa definicja pozwala stowarzyszyć z reprezentacją indukowaną ρ_{ind} z danej wiernej reprezentacji nieprzywiedlnej

$$\begin{array}{ccc} \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \equiv \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) & \xrightarrow{\quad} & \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}} \\ & \searrow \rho_{\text{ind}} & \downarrow \rho \\ & & \text{End}_{\mathbb{C}}(P) \end{array}$$

na przestrzeni $\mathbb{C}$ -liniowej (zespolonych pinorów) P dwie reprezentacje $\text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}}$: kompleksyfikację jej samej (patrz: Stw.15-16.2)

$$\rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}} : (\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(P)$$

oraz kompleksyfikację reprezentacji względem niej zespolenie sprzężonej

$$\overline{\rho_{\text{ind}}}^{\mathbb{C}} : \text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\overline{P}).$$

Pierwsza z nich okazuje się być tożsamą z ρ , oto bowiem dla dowolnych $\gamma^i \in \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ i $\lambda_i \in \mathbb{C}$ indeksowanych przez zbiór (skończony) $\overline{1, N} \ni i$ zachodzi

$$\rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}(\gamma^i \otimes \lambda_i) \equiv \lambda_i \triangleright \rho_{\text{ind}}(\gamma^i) \equiv \lambda_i \triangleright \rho(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)) = \rho(\lambda_i \triangleright (\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} (1,0))) = \rho(\gamma^i \otimes \lambda_i),$$

a to z tej racji, że ρ jest homomorfizmem $\mathbb{C}$ -algebr. W następnej kolejności przekonujemy się o wierności i nieprzywiedlności $\overline{\rho_{\text{ind}}}^{\mathbb{C}}$. W tym celu liczymy, dla γ^i i λ_i jak wyżej a wobec (10) i dopiero co udowodnionej tożsamości,

$$\begin{aligned} \overline{\rho_{\text{ind}}}^{\mathbb{C}}(\gamma^i \otimes \lambda_i) &= \lambda_i \triangleright \overline{\rho_{\text{ind}}}(\gamma^i) \equiv \lambda_i \triangleright \overline{\rho_{\text{ind}}(\gamma^i)} \equiv \lambda_i \triangleright \overline{\rho(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} (1,0))} = \overline{\lambda_i \triangleright \rho(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} (1,0))} \\ &= \overline{\rho(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} \overline{\lambda_i})} \end{aligned}$$

i na tej podstawie stwierdzamy:

- $\overline{\rho_{\text{ind}}}^{\mathbb{C}}(\gamma^i \otimes \lambda_i) = 0 \iff \overline{\rho(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} \overline{\lambda_i})} = 0 \iff \rho(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} \overline{\lambda_i}) = 0 \iff \gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} \overline{\lambda_i} = 0$
(wobec wierności ρ), ale to $\iff \text{Re}(\lambda_i) \triangleright \gamma^i = 0 = -\text{Im}(\lambda_i) \triangleright \gamma^i \iff \gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} \lambda_i = 0$;
- $\overline{\rho_{\text{ind}}}^{\mathbb{C}}(\gamma^i \otimes \lambda_i)(\overline{W}) = \overline{\rho(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} \overline{\lambda_i})(W)} \equiv \overline{\rho(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} \overline{\lambda_i})(W)} \subset \overline{W} \iff \rho(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} \overline{\lambda_i})(W) \subset W$.

W dalszej części naszych rozważań kładziemy $p+q \in 2\mathbb{N}$ (pozostawiając analogiczną analizę dla $p+q \in 2\mathbb{N}+1$ do wykonania zainteresowanemu Czytelnikowi). W tym przypadku nasz model $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}(2^{\frac{p+q}{2}})$ jest pełną algebrą macierzową i $\rho \sim \rho_{\text{def}}$ na $\mathbb{C}^{2^{\frac{p+q}{2}}}$, patrz: Tw.15-16.2. Zauważmy też, że wierność i nieprzywiedlność $\rho_{\text{def}} \sim \rho \equiv \rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}$ implikuje – w świetle powyższego – wierność i nieprzywiedlność $\overline{\rho_{\text{ind}}}^{\mathbb{C}}$, stąd zaś wywodzimy – na gruncie Tw.15-16.1 (i konstatacji prostoty $\mathbb{C}(2^{\frac{p+q}{2}})$) – istnienie $\mathbb{C}$ -liniowego izomorfizmu

$$\mathbb{C} : P \xrightarrow{\cong} \overline{P}$$

o własności

$$(11) \quad \forall_{\gamma \in \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} : \mathbb{C} \circ \rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}(\gamma) = \overline{\rho_{\text{ind}}}^{\mathbb{C}}(\gamma) \circ \mathbb{C},$$

czyli splatacza dla tej pary reprezentacji. Wobec tożsamości

$$\overline{\chi_2 \circ \chi_1} = \overline{\chi_2} \circ \overline{\chi_1},$$

której słuszności dla dowolnych $\chi_A \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_A, V_{A+1})$, $A \in \{1, 2\}$ dowodzimy w bezpośrednim rachunku (w którym $\overline{v} \in \overline{V_1}$):

$$\overline{\chi_2 \circ \chi_1}(\overline{v}) \equiv \overline{\chi_2 \circ \chi_1(v)} = \overline{\chi_2(\chi_1(v))} \equiv \overline{\chi_2}(\overline{\chi_1(v)}) \equiv \overline{\chi_2}(\overline{\chi_1}(\overline{v})) \equiv \overline{\chi_2} \circ \overline{\chi_1}(\overline{v}),$$

splatacz ten spełnia równość

$$\overline{\mathbb{C}} \circ \overline{\rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}(\gamma)} = \overline{\mathbb{C} \circ \rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}(\gamma)} = \overline{\rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}(\gamma)} \circ \overline{\mathbb{C}} = \overline{\rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}(\gamma)} \circ \overline{\mathbb{C}},$$

a ponieważ – jak pokazaliśmy wcześniej –

$$\overline{\rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}(\gamma^i \otimes \lambda_i)} = \overline{\rho(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} \bar{\lambda}_i)} \equiv \overline{\rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} \bar{\lambda}_i)},$$

przeto oznaczwszy $\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} \bar{\lambda}_i \equiv \tilde{\gamma}$, przepisujemy tę ostatnią w postaci

$$\bar{\mathbb{C}} \circ \overline{\rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}(\tilde{\gamma})} = \overline{\rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}(\tilde{\gamma})} \circ \bar{\mathbb{C}} = \rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}(\tilde{\gamma}) \circ \bar{\mathbb{C}}.$$

W sumie więc zachodzi

$$\rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}(\gamma) \circ (\bar{\mathbb{C}} \circ \mathbb{C}) = \bar{\mathbb{C}} \circ \overline{\rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}(\gamma)} \circ \mathbb{C} = (\bar{\mathbb{C}} \circ \mathbb{C}) \circ \rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}(\gamma),$$

czyli $\bar{\mathbb{C}} \circ \mathbb{C}$ splata $\rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}$ z sobą samą, ta wszakże jest nieprzywiedlna, co na mocy Stw. 15-16.4 pozwala wnioskować o istnieniu liczby $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$ spełniającej warunek

$$\bar{\mathbb{C}} \circ \mathbb{C} = \lambda \triangleright \text{id}_P.$$

Oznaczmy, dla dowolnego $\mu \in \mathbb{C}^{\times}$,

$$\mathbb{C}_{\mu} := \mu^{-1} \triangleright \mathbb{C} : P \longrightarrow \bar{P} : v \longmapsto \mu^{-1} \triangleright \mathbb{C}(v),$$

a wtedy – wobec $\mathbb{C}$ -liniowości $\bar{\mathbb{C}}$ –

$$\overline{\mathbb{C}_{\mu}} \circ \mathbb{C}_{\mu} \equiv \overline{\mu^{-1} \triangleright \mathbb{C}} \circ (\mu^{-1} \triangleright \mathbb{C}) = \overline{\mu^{-1}} \triangleright \bar{\mathbb{C}} \circ (\mu^{-1} \triangleright \mathbb{C}) = |\mu|^{-2} \triangleright \bar{\mathbb{C}} \circ \mathbb{C} = \frac{\lambda}{|\mu|^2} \triangleright \text{id}_P,$$

jeśli zatem wybierzemy $\mu \in \sqrt{\lambda}$, to otrzymamy

$$\overline{\mathbb{C}_{\mu}} \circ \mathbb{C}_{\mu} = \frac{\lambda}{|\lambda|} \triangleright \text{id}_P,$$

skoro jednak

$$\mathbb{C} \circ \bar{\mathbb{C}} = \overline{\bar{\mathbb{C}} \circ \mathbb{C}} = \overline{\lambda \triangleright \text{id}_P} = \bar{\lambda} \triangleright \text{id}_{\bar{P}},$$

to jest

$$\lambda \triangleright \mathbb{C} = \mathbb{C} \circ (\lambda \triangleright \text{id}_P) \equiv \mathbb{C} \circ (\bar{\mathbb{C}} \circ \mathbb{C}) = (\mathbb{C} \circ \bar{\mathbb{C}}) \circ \mathbb{C} = \bar{\lambda} \triangleright \text{id}_{\bar{P}} \circ \mathbb{C} = \bar{\lambda} \triangleright \mathbb{C},$$

czyli

$$\lambda = \bar{\lambda},$$

a zatem

$$\overline{\mathbb{C}_{\mu}} \circ \mathbb{C}_{\mu} = \varepsilon \triangleright \text{id}_P, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}.$$

Rozważymy teraz po kolei oba możliwe przypadki, biorąc pod uwagę powyższy splatacz znormalizowany i opuszczając w dalszych rozważaniach indeks μ .

3.1. Przypadek $\varepsilon = +1$. Dowolny pinor $w \in P$ ma rozkład

$$w = w_+ + w_-, \quad w_{\pm} = \frac{1}{2} (w \pm \bar{\mathbb{C}}(\bar{w})),$$

w którym – gwoili przypomnienia – $\bar{w}$ jest tożsamy z wektorem $w \in P$, ale jest elementem modułu zespolenie sprzężonego $\bar{P}$. Zarazem

$$\mathbb{C}(w_+) = \frac{1}{2} (\mathbb{C}(w) + \bar{w}) \equiv \frac{1}{2} (\bar{w} + \overline{\bar{\mathbb{C}}(\bar{w})}) = \bar{w}_+$$

i, analogicznie,

$$\mathbb{C}(w_-) = -\bar{w}_-,$$

czyli

$$w_{\pm} \in S^{\pm} = \{ w \in P \mid \mathbb{C}(w) = \pm \bar{w} \}.$$

Przy tym należy zauważyć, że operator

$$\mathbb{K} := \text{id} \triangleright \text{End}_{\mathbb{C}}(P)$$

spełnia – z racji $\mathbb{C}$ -liniowości $\mathbb{C}$ – tożsamości:

$$\mathbb{C}(\mathbb{K}(w_{\pm})) \equiv \mathbb{C}(\text{id} \triangleright w_{\pm}) = \text{id} \triangleright \mathbb{C}(w_{\pm}) \equiv \overline{-\text{id} \triangleright \bar{\mathbb{C}}(\bar{w}_{\pm})} = \overline{-\text{id} \triangleright \bar{\mathbb{C}}(\bar{w}_{\pm})} = \overline{-\text{id} \triangleright \bar{\mathbb{C}}(\bar{w}_{\pm})} = \overline{\mp \text{id} \triangleright \bar{w}_{\pm}} = \overline{\mp \text{id} \triangleright w_{\pm}} = \mp \mathbb{K}(w_{\pm}),$$

przeto ogranicza się do odwzorowania $\mathbb{R}$ -liniowego

$$(12) \quad K|_{S^\pm} : S^\pm \xrightarrow{\cong} S^\mp,$$

a wobec tego mamy rozkład

$$(13) \quad P = S^+ \oplus_{(\mathbb{R})} S^-$$

nad $\mathbb{R}$. Tym sposobem istnienie C indukuje **realifikację** przestrzeni pinorów

$$P = S^+ \oplus i \triangleright S^+$$

w rozumieniu Stw. 11-12.7. Zauważmy dalej, że dla $w_\pm \in S^\pm$ a przy poprzednich oznaczeniach otrzymujemy, na gruncie wcześniejszych wyników, relacje

$$\begin{aligned} C(\lambda_i \triangleright \rho(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0))(w_\pm)) &= C \circ \rho(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} \lambda_i)(w_\pm) \equiv C \circ \rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}(\gamma)(w_\pm) = \overline{\rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}}(\gamma) \circ C(w_\pm) \\ &= \pm \overline{\rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}}(\gamma)(\overline{w_\pm}) = \pm \lambda_i \triangleright \overline{\rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}}(\gamma^i)(\overline{w_\pm}) = \pm \overline{\lambda_i} \triangleright \overline{\rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}}(\gamma^i)(\overline{w_\pm}) \\ &= \pm \overline{\lambda_i} \triangleright \rho_{\text{ind}}(\gamma^i)(\overline{w_\pm}) = \pm \overline{\lambda_i} \triangleright \rho_{\text{ind}}(\gamma^i)(w_\pm) \\ &\equiv \pm \overline{\lambda_i} \triangleright \rho(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0))(w_\pm), \end{aligned}$$

ilekroć więc $\overline{\lambda_i} = \lambda_i$, i tylko wówczas

$$C(\lambda_i \triangleright \rho(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0))(w_\pm)) = \pm \lambda_i \triangleright \rho(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0))(w_\pm),$$

czyli

$$\rho_{\text{ind}}^\pm(\gamma) \equiv \rho_{\text{ind}}(\gamma)|_{S^\pm} \in \text{End}_{\mathbb{R}}(S^\pm)$$

dla $\gamma \in \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$. Konstatujemy, że względem rozkładu (13) zachodzi

$$\rho_{\text{ind}} = \rho_{\text{ind}}^+ \oplus \rho_{\text{ind}}^-,$$

gdzie

$$\rho_{\text{ind}}^\pm : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(S^\pm),$$

przy czym zarówno dziedzina, jak i przeciwdziedzina są tutaj $\mathbb{R}$ -algebrami, zatem konstatacja ma sens w $\text{Alg}_{\mathbb{R}}$. Zarazem stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} \rho_{\text{ind}}^-(\gamma) \circ K(w_+) &\equiv \rho_{\text{ind}}(\gamma) \circ K(w_+) \equiv \rho(\gamma \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0))(i \triangleright w_+) = i \triangleright \rho(\gamma \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0))(w_+) \\ &\equiv i \triangleright \rho_{\text{ind}}(\gamma)(w_+) \equiv i \triangleright \rho_{\text{ind}}^+(\gamma)(w_+) \equiv K \circ \rho_{\text{ind}}^+(\gamma)(w_+), \end{aligned}$$

a ponieważ $K \in \text{Iso}_{\mathbb{R}}(S^+, S^-)$, przeto mamy równoważność

$$\rho_{\text{ind}}^- \sim \rho_{\text{ind}}^+$$

z K w roli splatacza. Ostatecznie zatem *zespolona* reprezentacja ρ_{ind} rozkłada się w obrazie realifikacji P na dwie kopie reprezentacji *rzeczywistej* ρ_{ind}^+ ,

$$\rho_{\text{ind}} \cong \rho_{\text{ind}}^+ \oplus \rho_{\text{ind}}^+$$

i – co za tym idzie – ρ_{ind}^+ jest reprezentacją (rzeczywistą) wymiaru

$$\dim \rho_{\text{ind}}^+ = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} P = \dim_{\mathbb{C}} P.$$

Tym sposobem pinory zespolone zyskują status bi-pinorów rzeczywistych. W rozpatrywanych okolicznościach: $p + q \in 2\mathbb{N}$ bez trudu identyfikujemy na podstawie wcześniejszych wyników klasyfikacyjnych sygnatury, dla których możliwa jest pojedyncza rzeczywista reprezentacja pinorowa – są to sygnatury spełniające warunki

$$q - p \equiv 0, 6 \pmod{8}.$$

To dla nich zatem mamy relację

$$\overline{C} \circ C = +\text{id}_P.$$

3.2. Przypadek $\varepsilon = -1$. Równość

$$\overline{C} \circ C = -\text{id}_P$$

implikuje

$$|\det_{(\dim_{\mathbb{C}} P)} C|^2 = (-1)^{\dim_{\mathbb{C}} P},$$

z której wyprowadzamy ograniczenie

$$\dim_{\mathbb{C}} P \stackrel{!}{\in} 2\mathbb{N}.$$

Jak się okazuje, C indukuje wówczas na P strukturę kwaternionową...

Ażeby się o tym przekonać, potraktujemy P jako $4n$ -wymiarową przestrzeń $\mathbb{R}$ -liniową (czyli ten sam zbiór, na którym działa ciało bazowe $\mathbb{R}$ i w którym $w \in P$ i $i \triangleright w$ są $(\mathbb{R})$ -liniowo niezależne), a na niej określimy odwzorowania $\mathbb{R}$ -liniowe

$$J : P \curvearrowright : w \mapsto \overline{C(w)}, \quad K : P \curvearrowright : w \mapsto i \triangleright w.$$

Bez trudu sprawdzamy pożądane relacje:

$$J^2(w) \equiv \overline{C(J(w))} = \overline{C(\overline{C(w)})} \equiv \overline{C(\overline{C(w)})} = \overline{C} \circ C(w) = -\text{id}_P(w),$$

czyli

$$J^2 = -\text{id}_P,$$

oraz

$$K^2(w) \equiv i \triangleright (K(w)) \equiv i \triangleright (i \triangleright w) = i^2 \triangleright w \equiv -\text{id}_P(w),$$

czyli także

$$K^2 = -\text{id}_P,$$

a nadto

$$J \circ K(w) \equiv J(i \triangleright w) \equiv \overline{C(i \triangleright w)} = \overline{i \triangleright C(w)} = \bar{i} \triangleright \overline{C(w)} = -i \triangleright \overline{C(w)} \equiv -K \circ J(w),$$

tj.

$$J \circ K + K \circ J = 0.$$

Czwórka endomorfizmów ($\mathbb{R}$ -liniowych):

$$\{\text{id}_P, I := J \circ K, J, K\}$$

zadaje zatem na P zaanonsowaną wcześniej strukturę kwaternionową. Ta pozwala określić działanie

$$P \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} : (w, (a, b, c, d) \equiv q) \longmapsto a \triangleright w + b \triangleright I(w) + c \triangleright J(w) + d \triangleright K(w) \equiv w \triangleleft q,$$

patrz: Dodatek 11-12.A, które wyróżnia klasę **endomorfizmów kwaternionowych** $\text{End}_{\mathbb{H}^{\text{opp}}}(P) \subset \text{End}_{\mathbb{R}}(P)$ poprzez narzucenie warunku

$$a \triangleright \chi(w) + b \triangleright \chi \circ I(w) + c \triangleright \chi \circ J(w) + d \triangleright \chi \circ K(w) \equiv \chi(w \triangleleft q) \stackrel{!}{=} \chi(w) \triangleleft q$$

$$\equiv a \triangleright \chi(w) + b \triangleright I \circ \chi(w) + c \triangleright J \circ \chi(w) + d \triangleright K \circ \chi(w)$$

dla dowolnego $q = (a, b, c, d) \in \mathbb{H}$. Warunek ten jest równoważny koniunkcji warunków

$$\chi \circ J = J \circ \chi \quad \wedge \quad \chi \circ K = K \circ \chi$$

(implikujących $\chi \circ I = I \circ \chi$), które przepisują się w postaci

$$\begin{cases} \chi \circ \overline{C(w)} \equiv \chi(\overline{C(w)}) = \overline{C \circ \chi(w)} = \overline{C(\chi(w))} = \overline{C} \circ \overline{\chi(w)} \\ \chi(i \triangleright w) = i \triangleright \chi(w). \end{cases}$$

Z tej ostatniej odczytujemy zwięzłą charakterystykę tej klasy endomorfizmów:

$$\chi \in \text{End}_{\mathbb{H}^{\text{opp}}}(P) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\chi \in \text{End}_{\mathbb{C}}(P) \quad \wedge \quad C \circ \chi = \overline{\chi} \circ C \right),$$

w której wyprowadzeniu wykorzystaliśmy równoważność

$$\chi \circ \bar{C} = \bar{C} \circ \bar{\chi} \quad \Longleftrightarrow \quad C \circ \chi = \bar{\chi} \circ C,$$

otrzymaną przez sprzężenie zespolone. Ale dla dowolnego $\gamma \in Cl_{p,q}^{\mathbb{R}}$ jest – wprost z definicji – $\rho_{\text{ind}} \in \text{End}_{\mathbb{C}}(P)$ i – na mocy (11) –

$$C \circ \rho_{\text{ind}}(\gamma) \equiv C \circ \rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}(\gamma \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0)) = \overline{\rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}}(\gamma \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0)) \circ C \equiv \overline{\rho_{\text{ind}}(\gamma)} \circ C \equiv \overline{\rho_{\text{ind}}(\gamma)} \circ C,$$

przeto w oczywisty sposób reprezentacja indukowana ρ_{ind} jest *kwaternionowa*. I tym razem łatwo odnajdujemy odnośne sygnatury – to te, które spełniają warunki

$$q - p \equiv 2, 4 \pmod{8}.$$

W uznaniu roli, jaką w dyskusji fizykalnej konstrukcji reprezentacji pinorowych odgrywa wyróżnione odwzorowanie C , a w związku z jego dalszymi zastosowaniami w modelowaniu pól fermionowych, poświęcamy mu osobną

Definicja 4. Przyjmijmy dotychczasowe oznaczenia. Odwzorowanie $C \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(P, \bar{P})$ określamy mianem **sprzężenia ładunkowego**.

3.3. Spinory. Na obecnym etapie pozostaje jeszcze odpowiedzieć sobie na pytanie o to, jak w opisaną złożoną strukturę algebraiczną wpisują się spinory. Fizyk poszuka ich w ograniczeniu reprezentacji $\rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}$ do $\mathbb{R}$ -podalgebry

$$\begin{array}{ccccc} Cl_{p,q}^{\mathbb{R}0} \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) & \hookrightarrow & Cl_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) & \hookrightarrow & Cl_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong Cl_{p+q}^{\mathbb{C}} \\ & \searrow & & \uparrow & \\ & & & Cl_{p,q}^{\mathbb{R}0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong Cl_{p+q}^{\mathbb{C}0} & \end{array}.$$

W zanalizowanym szczegółowo przypadku $p + q \in 2\mathbb{N}$ przywołajmy znany nam z Tw.2 rozkład przestrzeni pinorów

$$(14) \quad P = S_+ \oplus_{(\mathbb{C})} S_-$$

nad $\mathbb{C}$ na przestrzenie własne operatora chiralności, którego realizację na P możemy w świetle Wykładów XI i XII zapisać w postaci

$$\Gamma \equiv \rho(\omega_{\mathbb{C}}) \equiv \rho(\omega_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} i^{f(p,q)}) \equiv i^{f(p,q)} \triangleright \rho_{\text{ind}}(\omega_{\mathbb{R}}),$$

gdzie $f(p, q) = p + q + E(\frac{p+q+1}{2}) + q \in \mathbb{N}$ (patrz: Def. 11-12.2; ostatni składnik w $f(p, q)$ bierze się z przepisania elementów bazy *pseudo*-ortonormalnej e_{p+k} , $k \in \overline{1, q}$ przestrzeni $\mathbb{R}^{p,q}$ odpowiadających ujemnej składowej sygnatury rzeczywistej (p, q) na odnośne elementy $e_{p+k} \otimes_{\mathbb{R}} 1$ bazy ortonormalnej przestrzeni $\mathbb{C}^{\times p+q} \equiv \mathbb{R}^{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$) jest takie, że

$$\Gamma^2 = \text{id}_P,$$

por. Stw. 11-12.5. Należy przy tym podkreślić, że ilekroć $f(p+q) \notin 2\mathbb{N}$, czyli $i^{f(p,q)} = i r(p, q) \in i\mathbb{R}^{\times}$ przy $q - p \equiv 0, 6 \pmod{8}$, tj. ilekroć $q - p \equiv 6 \pmod{8}$, rozpatrywany uprzednio rozkład (13) nie jest naturalny z punktu widzenia rekonstrukcji spinorów, oto bowiem w tej sytuacji $\Gamma \equiv r(p, q) \triangleright K \circ \rho_{\text{ind}}(\omega_{\mathbb{R}})$ przeprowadza nas między S^+ i S^- , por. (12), czyli przestrzenie własne Γ są postaci (zapisanej przy użyciu $w_{\pm} \in S^{\pm}$)

$$\begin{aligned} & \langle (w_+ + w_-) + \Gamma(w_+ + w_-) \rangle_{\mathbb{C}} = \langle (w_+ + w_-) + i^{f(p,q)} \triangleright (\rho_{\text{ind}}(\omega_{\mathbb{R}})(w_+) + \rho_{\text{ind}}(\omega_{\mathbb{R}})(w_-)) \rangle_{\mathbb{C}} \\ & = \langle (w_+ + w_-) + i r(p, q) \triangleright (\rho_{\text{ind}}(\omega_{\mathbb{R}})(w_+) + \rho_{\text{ind}}(\omega_{\mathbb{R}})(w_-)) \rangle_{\mathbb{C}} \\ & = \langle (w_+ + K \circ \rho_{\text{ind}}^-(r(p, q) \triangleright \omega_{\mathbb{R}})(w_-)) + (w_- + K \circ \rho_{\text{ind}}^+(r(p, q) \triangleright \omega_{\mathbb{R}})(w_+)) \rangle_{\mathbb{C}}, \end{aligned}$$

nie możemy zatem ograniczyć się do którejkolwiek z podprzestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowych $S^{\pm}$. Wobec tego miast transportować strukturę modułu z $\bar{P}$ do P za pośrednictwem $\bar{C}$ (co wcześniej doprowadziło nas do realifikacji pinorów zespolonych), rozważamy raczej relacje pomiędzy (P, ρ_{ind}) i $(\bar{P}, \overline{\rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}})$.

Wracamy przeto do rozkładu (14) nad $\mathbb{C}$ wyznaczonego przez Γ , przy czym zauważamy, że operator

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma} &\equiv \overline{i^{f(p,q)} \triangleright \rho(\omega_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0))} = (-1)^{f(p,q)} i^{f(p,q)} \overline{\triangleright \rho(\omega_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0))} \equiv (-1)^{f(p,q)} i^{f(p,q)} \overline{\triangleright \rho(\omega_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0))} \\ &\equiv (-1)^{f(p,q)} i^{f(p,q)} \overline{\triangleright \rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}(\omega_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0))} = (-1)^{f(p,q)} \overline{\triangleright \rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}(\omega_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} i^{f(p,q)})}\end{aligned}$$

spełnia tożsamość

$$\bar{\Gamma} \circ \bar{\Gamma} = \bar{\Gamma} \circ \bar{\Gamma} = \overline{\text{id}_P} = \text{id}_{\bar{P}},$$

zatem zadaje rozkład

$$\bar{P} = \bar{S}_+ \oplus_{(\mathbb{C})} \bar{S}_-$$

na przestrzenie własne

$$\bar{S}_{\pm} = \{ \bar{v} \in \bar{P} \mid \bar{\Gamma}(\bar{v}) = \pm \bar{v} \},$$

przy czym wprost na mocy tożsamości (11) dostajemy

$$\bar{\Gamma} \circ C = (-1)^{f(p,q)} \overline{\triangleright \rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}(\omega_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} i^{f(p,q)})} \circ C = (-1)^{f(p,q)} \overline{\triangleright C} \circ \rho_{\text{ind}}^{\mathbb{C}}(\omega_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} i^{f(p,q)}) \equiv (-1)^{f(p,q)} \overline{\triangleright C} \circ \Gamma.$$

Na tej podstawie stwierdzamy, że sprzężenie ładunkowe C zadaje równowagę pomiędzy reprezentacjami

$$\rho_{\text{ind}}^0(\pm) \equiv (\rho_{\text{ind}} \upharpoonright_{\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R},0}}) \upharpoonright_{S_{\pm}}, \quad \bar{\rho}_{\text{ind}}^0(\pm) \equiv (\bar{\rho}_{\text{ind}} \upharpoonright_{\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R},0}}) \upharpoonright_{\bar{S}_{\pm}}$$

według schematu:

- $\rho_{\text{ind}}^0(\pm) \sim \bar{\rho}_{\text{ind}}^0(\pm)$, gdy $f(p,q) \in 2\mathbb{N}$ (C nie zmienia chiralności);
- $\rho_{\text{ind}}^0(\pm) \sim \bar{\rho}_{\text{ind}}^0(\mp)$, gdy $f(p,q) \in 2\mathbb{N} + 1$ (C zmienia chiralność).

Przy tym godnym odnotowania jest fakt: $\rho_{\text{ind}}^0(+)$ $\not\sim$ $\rho_{\text{ind}}^0(-)$ jako reprezentacje zespolone, gdyż $\rho_{\text{ind}}^0(\pm)(\omega_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)) = (-i)^{f(p,q)} \triangleright \Gamma \upharpoonright_{S_{\pm}} = \pm (-i)^{f(p,q)} \triangleright \text{id}_{S_{\pm}}$. Okazuje się wszakże, że ich formy *rzeczywiste* są równoważne, co odpowiada temu, że wówczas $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ jest $\mathbb{R}$ -algebrą prostą.

(Ceci **n'est pas**) La Fin

LITERATURA

- [BT88] P. Budinich and A.M. Trautman, *The Spinorial Chessboard*, Trieste Notes in Physics, Springer, 1988.
- [Car38a] É. J. Cartan, *Leçons sur la théorie des spineurs. I : les spineurs de l'espace à trois dimensions*, Actualités scientifiques et industrielles: Exposés de géométrie, vol. 9, Hermann & cie., 1938.
- [Car38b] ———, *Leçons sur la théorie des spineurs. II : les spineurs de l'espace à $n > 3$ dimensions, les spineurs en géométrie riemannienne*, Actualités scientifiques et industrielles: Exposés de géométrie, vol. 11, Hermann & cie., 1938.
- [Har90] F.R. Harvey, *Spinors and Calibrations*, Elsevier Science, 1990.
- [Pen68] R. Penrose, "Structure of Space-Time", pp. 121–235, W.A. Benjamin, 1968.