

O REPREZENTACJACH – PÓŁ-PROSTO I PÓŁ-KOMPLETNIIE
(MAWF '25/26 1.XV & 1.XVI [RRS])



FIG. 1. Reprezentacja Polski w piłce kopanej nogą na Mundial 1974, która zdobyła w tych mistrzostwach brązowy medal – przykład reprezentacji nietrywialnej, wiernej i – co w rodzimej piłce kopanej spektakularnie rzadkie – nie w pełni rozkładalnej (na sumę prostą łopatek: lewej i prawej).

SPIS TREŚCI

1. Elementy teorii reprezentacji algebr (pół)prostych	1
2. Ogólne własności modułów Clifforda	12
3. Reprezentacje rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda	15

Mając w garści kompletną i zarazem strukturalną klasyfikację algebr Clifforda stowarzyszonych ze skończeniem wymiarowymi przestrzeniami kwadratowymi nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, możemy obecnie przystąpić do badania ich reprezentacji, co da nam punkt wyjścia do dyskusji spinorów, więc obiektów o bezpośrednim znaczeniu fizycznym. Jak pokazaliśmy dowodnie w poprzednim wykładzie, interesujące nas zagadnienie wpisuje się w kadr teorii reprezentacji bardzo szczególnych unitalnych algebr prostych i półprostych o (dwóch) tożsamych składnikach prostych. Nasze dociekania zaczniemy zatem od wyprowadzenia ogólnych stwierdzeń dotyczących takich obiektów.

1. ELEMENTY TEORII REPREZENTACJI ALGEBR (PÓŁ)PROSTYCH

Algebry i struktury pochodne niosące nietrywialną informację fizyczną (jak choćby tę o symetriach stanów i procesów przyrodniczych, czy wreszcie o samej ewolucji stanów) ujawniają swą obecność w opisie obiektów i zjawisk bądź to bezpośrednio, bądź też za pośrednictwem struktur generycznych stowarzyszonych z wyborem algebraicznego zbioru-modelu owych zjawisk i podlegających im obiektów – najbardziej oczywiste przykłady takich wyborów to: konstrukcja algebry (Poissona–)Liego funkcji gładkich na różności symplektycznej (z nawiasem Poissona określonym

przez formę symplektyczną) wykorzystywana do opisu stanów klasycznego układu fizycznego, z którą stowarzyszona jest pojemna struktura algebry Liego symplektycznych pól wektorowych na tejże rozmiarowości, oraz konstrukcja przestrzeni Hilberta wykorzystywana do opisu stanów kwantowego układu fizycznego, z którą stowarzyszona jest nie mniej pojemna struktura (C^*) -algebry ograniczonych operatorów liniowych. W tym drugim przypadku relacje konstytutywne rzeczonych algebr są spełniane przez pewien podzbiór elementów struktury generycznej i określają relacje równoważności na zbiorze-modelu będącym jej nośnikiem. Relacje te porządkują elementy zbioru-modelu według kryterium przynależności do ich klas abstrakcji, co zwykle zyskuje interpretację w terminach „opisów równoważnych”, „rodzajów/rodzin obiektów elementarnych”, „múltipletów symetrii” lub „sektorów nadwyboru” w zbiorze-modelu zjawisk i obiektów. Abstrakcyjnego aparatu konstrukcji i analizy takiego „zapośredniczonego” schematu manifestacji algebr o znaczeniu fizycznym dostarcza teoria reprezentacji algebr, którą zajmujemy się w niniejszym rozdziale. Zaczynamy zatem od podstawowej

Definicja 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj $((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \mapsto 0_{\mathfrak{A}}), \ell_{\mathfrak{A}}), m_{\mathfrak{A}})$ będzie unitalną algebrą łączną nad pierścieniem przemiennym R_1 , $((G, +_G, P_G, \bullet \mapsto 0_G), \ell_G)$ zaś – modulem lewostronnym nad pierścieniem R_2 , przy czym zakładamy, że oba pierścienie wiąże relacja $\mathcal{Z}(R_2) \supseteq R_1$. **Reprezentacja** (typu R_1) algebry $\mathfrak{A}$ na module G to unitalny homomorfizm R_1 -algebr

$$\rho : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_{R_2}(G),$$

przy czym struktura R_1 -algebry na $\text{End}_{R_2}(G)$ jest tutaj indukowana przez włożenie kanoniczne $\mathcal{J}_{R_1} : R_1 \rightarrow R_2$. Moduł G określamy w tym wypadku mianem **nośnika reprezentacji**. Kiedy jest on wolny, definiujemy **wymiar reprezentacji** jako rząd modułu G i zapisujemy

$$\dim \rho \equiv \text{rk}_{R_2} G.$$

Jeśli ρ jest monomorfizmem, mówimy o reprezentacji **wiernej**. Centralizator obrazu reprezentacji (patrz: Przykł. (5-6.1.12)),

$$C_{\text{End}_{R_2}(G)}(\rho(\mathfrak{A})) \subset \text{End}_{R_2}(G),$$

nazywamy **maksymalną podalgebrą komutującą** reprezentacji.

Podmoduł ρ -niezmienniczy to podmoduł $H \subseteq G$ o własności

$$\forall a \in \mathfrak{A} : \rho(a)(H) \subset H.$$

Wyznacza on **podreprezentację** reprezentacji ρ , czyli reprezentację algebry $\mathfrak{A}$ na podmodule H daną w postaci

$$\rho_{(H)} : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_{R_2}(H) : a \mapsto (\mathcal{J}_H \upharpoonright_{\text{Image } \mathcal{J}_H})^{-1} \circ \rho(a) \circ \mathcal{J}_H.$$

Ileokroć pierścień bazowy $R_2 = \mathbb{K}$ jest ciałem, mówimy o **podprzestrzeni ρ -niezmienniczej**. Reprezentacja, której jedynymi przestrzeniami niezmienniczymi są G (cały nośnik) i $\{0_G\}$, nosi miano **nieprzywiedlnej**. Reprezentacja, która nie jest nieprzywiedlna, jest określana jako **przywiedlna**. Reprezentacja, której nośnik rozkłada się na sumę prostą przestrzeni niezmienniczych, to reprezentacja **w pełni przywiedlna**, **w pełni rozkładalna** lub **półprosta**. Wreszcie taką, której nośnik nie rozkłada się na sumę prostą *nietrywialnych* przestrzeni niezmienniczych, nazywamy **nierozkładalną**.

Dla dowolnej pary reprezentacji $\rho_{\alpha} : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_{R_2}(G_{\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ algebry $\mathfrak{A}$, **homomorfizm reprezentacji**, zwany także **splataczem reprezentacji**, to odwzorowanie $\chi \in \text{Hom}_{R_2}(G_1, G_2)$ spełniające warunek

$$\forall a \in \mathfrak{A} : \rho_2(a) \circ \chi = \chi \circ \rho_1(a).$$

Ileokroć splatacz χ jest izomorfizmem, mówimy o **równoważności reprezentacji** ρ_1 i ρ_2 , którą zapisujemy symbolem

$$\rho_2 \sim \rho_1.$$

Reprezentacje R_1 -algebry $\mathfrak{A}$ na R_2 -modułach lewostronnych wraz z odnośnymi splataczami tworzą kategorię, którą będziemy oznaczać symbolem **Rep** $_{R_1 \subseteq R_2}(\mathfrak{A})$.

Uwaga 1. Każda reprezentacja nieprzywiedlna jest w oczywisty sposób nierozkładalna. O tym, że w ogólności jest to wynikanie jednokierunkowe, przekonuje analiza prostego przykładu: Oto przestrzeń $\mathbb{R}$ -liniowa $\mathbb{R}^{\times 2}$ jest nośnikiem nierozkładalnej, lecz przywiedlnej reprezentacji unitalnej $\mathbb{R}$ -algebry łącznej $\mathbb{R}[\cdot]$ określonej (jednoznacznie) przez przyporządkowanie generatorowi $t \in \mathbb{R}[\cdot]$ (zmiennej) macierzy

$$\rho(t) := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jedyną podprzestrzenią ρ -niezmienniczą jest tutaj $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$, przy czym podprzestrzeń ta nie ma ρ -niezmienniczego dopełnienia prostego w $\mathbb{R}^{\times 2}$, co wynika z rachunku

$$\forall_{r \in \mathbb{R}} : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \triangleright \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \langle \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Przykłady 1.

- (1) **Reprezentacja trywialna** R -algebry $\mathfrak{A}$ na R -module G to taka, która spełnia warunek $\forall_{a \in \mathfrak{A} \setminus \{1_{\mathfrak{A}}\}} : \rho(a) = 0$.
- (2) **Reprezentacja lewa regularna** R -algebry $\mathfrak{A}$ na R -module $\mathfrak{A}$ to $l : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_R(\mathfrak{A}) : a \longmapsto m_{\mathfrak{A}}(a, \cdot)$. Analogicznie definiujemy **reprezentację prawą regularną**. Ilekroć $\mathfrak{A}$ jest unitalna, reprezentacje te są wierne.
- (3) **Reprezentacja zredukowana względem ideału** lewostronnego (wzgl. prawostronnego) $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$ R -algebry $\mathfrak{A}$ na R -module $\mathfrak{I}$ to odwzorowanie $l^{\mathfrak{I}} : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_R(\mathfrak{I})$ indukowane przez reprezentację lewą (wzgl. prawą) regularną wskutek ograniczenia wyjściowego R -modułu $\mathfrak{A}$ do jego podmodułu $\mathfrak{I}$. Reprezentacja ta jest w oczywisty sposób nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{I}$ jest minimalny, tj. gdy $\mathfrak{I}$ nie zawiera podideałów innych niż $\{0_{\mathfrak{A}}\}$ oraz $\mathfrak{I}$.
- (4) Wybór bazy w R -module G rzędu $\text{rk}_R G = N \in \mathbb{N}$ określa reprezentację macierzową $\text{End}_R(G) \xrightarrow{\cong} \text{End}_R(R^{\times N}) \cong \mathbb{R}(N)$.
- (5) Reprezentacje ciała $\mathbb{K}$ traktowanego jako unitalna $\mathbb{Z}$ -algebra to przestrzenie $\mathbb{K}$ -liniowe.

Naturalne operacje na modułach i algebrach nad pierścieniem przemiennym są dziedziczone przez reprezentacje, czemu daje wyraz

Definicja 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj $\rho_{\alpha} : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_{R_2}(G_{\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą reprezentacjami R_1 -algebry $\mathfrak{A}$ na R_2 -modułach lewostronnych G_{α} . **Suma prosta reprezentacji** ρ_{α} to reprezentacja

$$\rho_1 \oplus \rho_2 : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_R(G_1) \oplus \text{End}_R(G_2) : a \longmapsto \rho_1(a) \oplus \rho_2(a).$$

Iloczyn tensorowy reprezentacji ρ_{α} to reprezentacja

$$\rho_1 \otimes \rho_2 : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_{R_2}(G_1) \otimes_{R_1} \text{End}_{R_2}(G_2) : a \longmapsto \rho_1(a) \otimes_{R_1} \rho_2(a).$$

Niechaj teraz $\rho : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_{R_2}(G)$ będzie reprezentacją R_1 -algebry $\mathfrak{A}$ na R_2 -module G , przy czym zakładamy (dla uproszczenia), że także R_2 jest pierścieniem przemiennym. **Reprezentacja dwoista** (lub **dualna**) do ρ to reprezentacja

$$\rho^* : \mathfrak{A}^{\text{opp}} \longrightarrow \text{End}_{R_2}(G^*) : a \longmapsto \rho(a)^*,$$

gdzie

$$\rho(a)^* : G^* \curvearrowright : \varphi \longmapsto \varphi \circ \rho(a).$$

Mając na uwadze przyszłe konkretne zastosowania fizykalne teorii reprezentacji, uzupełnimy dotychczasową jej dyskusję o elementy nawiązujące bezpośrednio do konstrukcji przedstawionych w Def. 11-12.5 i Stw. 11-12.6. Oto więc mamy

Definicja 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\mathfrak{A}$ będzie algebrą nad ciałem $\mathbb{R}$. Jej reprezentację nazwiemy **reprezentacją typu R** dla $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ (tj. **rzeczywistego**, **zespolonego** lub – odpowiednio – **kwaternionowego**), jeśli jej przeciwdziedzina jest $\mathbb{R}$ -algebra endomorfizmów $\text{End}_{R^{\text{opp}}}(G)$ modułu prawostronnego G nad pierścieniem R , tj.

$$\rho : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_{R^{\text{opp}}}(G).$$

Równoważnego opisu reprezentacji typu $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$ dostarcza oczywiste, lecz zarazem wygodne

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Reprezentacja zespolona $\mathbb{R}$ -algebry $\mathfrak{A}$ to taka jej reprezentacja rzeczywista, której maksymalna podalgebra komutująca spełnia warunek

$$C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(G)}(\rho(\mathfrak{A})) \supset \langle \text{id}_G, I \rangle_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}.$$

Reprezentacja kwaternionowa $\mathbb{R}$ -algebry $\mathfrak{A}$ to taka jej reprezentacja rzeczywista, której maksymalna podalgebra komutująca spełnia warunek

$$C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(G)}(\rho(\mathfrak{A})) \supset \langle \text{id}_G, I, J, K \rangle_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{H}.$$

Dowód: Bezpośrednia konsekwencja Def. 3 oraz Stw. 11-12.6, podparta istnieniem monomorfizmów $\mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{H}$. $\square$

O dodatkowych mechanizmach indukcji zespolonych reprezentacji algebr rzeczywistych i ich kompleksyfikacji opowiada

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj $\mathfrak{A} \in \text{Ob } \mathbf{Alg}_{\mathbb{R}}$ oraz $V \in \text{Ob } \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$ i $W \in \text{Ob } \mathbf{Mod}_{\mathbb{H}^{\text{opp}}}$. Dowolna reprezentacja zespolona $\rho : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ kanonicznie indukuje reprezentację

$$\rho^{\mathbb{C}} : \mathfrak{A}^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$$

stanowiącą jedyne $\mathbb{C}$ -liniowe rozszerzenie przyporządkowania

$$\rho^{\mathbb{C}}(a \otimes_{\mathbb{R}} z) := \rho(a) \circ \ell_z \equiv \ell_z \circ \rho(a),$$

zapisanego dla dowolnych $(a, z) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{C}$. Ponadto dowolna reprezentacja kwaternionowa $\tilde{\rho} : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{H}^{\text{opp}}}(W)$ kanonicznie (tożsamościowo) indukuje reprezentację zespoloną

$$\tilde{\rho} : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(W).$$

Dowód: Trywialny. $\square$

Powracając do dyskusji ogólnych własności reprezentacji algebr unitalnych, wypowiemy obecnie wynik strukturalny o fundamentalnym znaczeniu dla całej teorii reprezentacji, mimo całą swą trywialność.

Stwierdzenie 3 (Lematy Schura). Przyjmijmy zapis Def. 1 i niechaj $\rho_{\alpha} : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V_{\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą dwiema reprezentacjami $\mathbb{K}$ -algebry $\mathfrak{A}$ na odnośnych przestrzeniach wektorowych V_{α} nad ciałem $\mathbb{K}$, odwzorowanie $\chi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ zaś – homomorfizmem reprezentacji. Wówczas $\text{Ker } \chi$ jest podprzestrzenią ρ_1 -niezmienniczą przestrzeni V_1 , a $\text{Image } \chi$ jest podprzestrzenią ρ_2 -niezmienniczą przestrzeni V_2 . Ilekroć ρ_1 jest nieprzywiedlna, zachodzi alternatywa

$$\text{Ker } \chi = V_1 \quad \vee \quad \text{Ker } \chi = \{0_{V_1}\},$$

kiedy natomiast to ρ_2 jest nieprzywiedlna, zachodzi alternatywa

$$\text{Image } \chi = \{0_{V_2}\} \quad \vee \quad \text{Image } \chi = V_2.$$

Dowód: Oczywisty. $\square$

Jego natychmiastową konsekwencją jest

Stwierdzenie 4 (Lemat Schura nad ciałem algebraicznie domkniętym). Przyjmijmy zapis Def. 1 i niechaj $\rho : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ będzie nieprzywiedlną reprezentacją $\mathbb{K}$ -algebry unitalnej $\mathfrak{A}$ na przestrzeni wektorowej V nad ciałem algebraicznie domkniętym $\mathbb{K}$, odwzorowanie $\chi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ zaś – endomorfizmem reprezentacji ρ . Wówczas istnieje skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ spełniający warunek

$$\chi = \lambda \triangleright \text{id}_V.$$

Dowód: Algebraiczna domkniętość $\mathbb{K}$ przesądza o istnieniu skalaru $\lambda \in \text{Sp}(\chi)$, którego możemy użyć do zdefiniowania endomorfizmu

$$\chi_\lambda := \chi - \lambda \triangleright \text{id}_V$$

reprezentacji ρ . Niech $w_\chi \in \mathbb{K}[t]$ będzie wielomianem charakterystycznym χ , a $P_{w_\chi} : \mathbb{K} \curvearrowright$ – funkcją wielomianową z nim stowarzyszoną. Wobec tożsamości $\det(\chi_\lambda) \equiv P_{w_\chi}(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}$ stwierdzamy, że χ_λ nie jest monomorfizmem, co w świetle Stw. 3 implikuje postulowaną tożsamość $\chi_\lambda = 0$. $\square$

Na gruncie dotychczasowych rozważań natury ogólnej możemy obecnie przystąpić do szczegółowej dyskusji reprezentacji algebr o szczególnej strukturze, które napotkamy w dalszej części kursu. Jednym z wyróżników tej klasy algebr pośród innych obiektów kategorii $\mathbf{Alg}_{\mathbb{K}}$ jest szczególna prostota ich teorii reprezentacji, której świadectwa dostarcza poniższe

Twierdzenie 1. Wszystkie wierne reprezentacje nieprzywiedlne skończenie wymiarowej łącznej algebry prostej są wzajem równoważne.

Dowód: Niechaj $\mathfrak{A} \in \text{Ob } \mathbf{Alg}_{\mathbb{K}}$ będzie algebrą prostą skończonego wymiaru. Zaczniemy od skonstruowania wyróżnionej reprezentacji referencyjnej. W tym celu wybierzmy dowolny minimalny (niezerowy) ideał lewostronny $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$, którego istnienie zapewnia skończoność wymiaru $\mathfrak{A}$ (wystarczy zacząć jego poszukiwania od ideału $\mathfrak{A}$, w którym w następnym kroku wybieramy dowolny nietrywialny podideał lewostronny, o ile takowy istnieje, i procedurę powtarzamy (co najwyżej $(\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{A} - 2)$ -krotnie)), i rozważmy reprezentację $l^{\mathfrak{I}}$ zredukowaną względem $\mathfrak{I}$ (w rozumieniu Przykł. 1 (3)). Reprezentacja ta jest nieprzywiedlna z racji minimalności $\mathfrak{I}$, pozostaje zatem zbadać jej wierność. Jeśli $\mathfrak{I} = \mathfrak{A}$, to $\mathfrak{I} \cdot \mathfrak{I} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$ wprost na mocy definicji algebry prostej. Załóżmy, że $l^{\mathfrak{I}}$ nie jest wierna, tj. $\text{Ker } l^{\mathfrak{I}} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$, a wtedy nieodzownie $\text{Ker } l^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{A}$, gdyż $\text{Ker } l^{\mathfrak{I}}$ jest ideałem obustronnym. To wszakże oznacza, że $\forall a \in \mathfrak{A}, b \in \mathfrak{I} \ni a \cdot b \equiv l_a^{\mathfrak{I}}(b) = 0_{\mathfrak{A}}$, czyli $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, w sprzeczności z założeniem o prostocie $\mathfrak{A}$. Pozostaje jeszcze rozpatrzyć przypadek $\mathfrak{I} \subsetneq \mathfrak{A}$. I w tym przypadku założymy, że $\text{Ker } l^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{A}$. Wobec niezerowości $\mathfrak{I}$ możemy wybrać $x \in \mathfrak{I} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\}$, z którym następnie stowarzyszymy ideał prawostronny $x \cdot \mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$. Poczynione założenie przesądza o tym, że jest to ideał obustronny, oto bowiem

$$\forall a \in \mathfrak{A} : a \cdot (x \cdot \mathfrak{A}) = (a \cdot x) \cdot \mathfrak{A} \equiv l_a^{\mathfrak{I}}(x) \cdot \mathfrak{A} = 0_{\mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\} \subset x \cdot \mathfrak{A}.$$

Wobec prostoty $\mathfrak{A}$ wnioskujemy, że albo $x \cdot \mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, albo też $x \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$. Jeśli $x \cdot \mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, to bez trudu stwierdzamy, że także $\langle x \rangle_{\mathbb{K}} \cdot \mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, co jest w sprzeczności z założeniem o prostocie $\mathfrak{A}$. Jeżeli natomiast $x \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, to

$$\forall (a, \lambda) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{K} : a \cdot (\lambda \triangleright x) = \lambda \triangleright (a \cdot x) \equiv \lambda \triangleright l_a^{\mathfrak{I}}(x) = \lambda \triangleright 0_{\mathfrak{A}} = 0_{\mathfrak{A}}$$

oraz

$$\forall (a, \lambda) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{K} : (\lambda \triangleright x) \cdot a = \lambda \triangleright (x \cdot a) \in x \cdot \mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\},$$

a ponieważ $\langle x \rangle_{\mathbb{K}} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$ (wszak $x \neq 0_{\mathfrak{A}}$), przeto koniecznie $\langle x \rangle_{\mathbb{K}} = \mathfrak{A}$. Wtedy jednak zachodzi równość $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A} \equiv \langle x \rangle_{\mathbb{K}} \cdot \mathfrak{A} = x \cdot \mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, co jest w sprzeczności z założeniem o prostocie $\mathfrak{A}$. Jeżeli natomiast $x \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, to

$$\forall a, b = x \cdot c \in \mathfrak{A} : a \cdot b \equiv a \cdot (x \cdot c) = (a \cdot x) \cdot c \equiv l_a^{\mathfrak{I}}(x) \cdot c = 0_{\mathfrak{A}} \cdot c = 0_{\mathfrak{A}},$$

znów w sprzeczności z założeniem $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$. Ostatecznie więc nieodzownie $\text{Ker } l^{\mathfrak{I}} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, czyli mamy do czynienia z wierną i – jak pokazaliśmy wcześniej – nieprzywiedlną reprezentacją $l^{\mathfrak{I}}$.

Niechaj teraz $\rho : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ będzie wierną reprezentacją nieprzywiedlną na przestrzeni wektorowej V . Wierność ρ oznacza, że $\forall a \in \mathfrak{A} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\} : \rho(a) \neq 0$, czyli

$$\forall a \in \mathfrak{A} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\} \exists v \in V : \rho(a)(v) \neq 0_V.$$

Ustalmy $a_0 \in \mathfrak{A} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\}$ oraz odnośny wektor $v_0 \in V$ (o powyższej własności) i zdefiniujmy odwzorowanie (jawnie) $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\chi_0 : \mathfrak{A} \rightarrow V : a \mapsto \rho(a)(v_0).$$

Odwzorowanie to spełnia – dla dowolnych $(a, b) \in \mathfrak{A} \times (\mathfrak{I} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\})$ – warunek

$$\chi_0 \circ l_a^{\mathfrak{I}}(b) \equiv \chi_0(a \cdot_{\mathfrak{A}} b) \equiv \rho(a \cdot_{\mathfrak{A}} b)(v_0) = \rho(a) \circ \rho(b)(v_0) \equiv \rho(a) \circ \chi_0(b),$$

tj. splata ze sobą nieprzywiedlne reprezentacje $\mathfrak{A}$: reprezentację zredukowaną względem $\mathfrak{I}$ oraz ρ , patrz: Przykł. 1 (3). Ponieważ jednak zarówno $\text{Ker } \chi_0 \neq \mathfrak{I}$ (gdyż $\chi_0(a_0) \neq 0_V$), jak i $\text{Image } \chi_0 \neq \{0_V\}$ (z tego samego powodu), przeto – na mocy Stw. 3 – χ_0 jest izomorfizmem. Na tej podstawie wnioskujemy, że każda wierna reprezentacja nieprzywiedlna $\rho : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ jest równoważna reprezentacji zredukowanej $l^{\mathfrak{I}}$ względem dowolnego (minimalnego) ideału lewostronnego $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$. $\square$

Jego treść uzupełnia w nader istotny sposób

Stwierdzenie 5. Wszystkie nietrywialne reprezentacje unitalnej łącznej algebry prostej są wierne.

Dowód: Niechaj $\mathfrak{A} \in \text{Ob } \mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}$ będzie algebrą prostą, $\rho : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ zaś – jej reprezentacją, przy czym zakładamy, że $\text{Ker } \rho \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$. Wybierzmy dowolny element $a \in \text{Ker } \rho \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\}$ i wygenerujmy zeń ideał obustronny

$$\langle a \rangle_{\mathfrak{A}} := \left\{ \sum_{i=1}^N b_i \cdot_{\mathfrak{A}} a \cdot_{\mathfrak{A}} c_i \mid b_i, c_i \in \mathfrak{A}, i \in \overline{1, N}, N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ideał ów zawiera $a \neq 0_{\mathfrak{A}}$, gdyż $a \equiv \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \cdot a \cdot \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$, a zatem z racji prostoty $\mathfrak{A}$ zachodzi równość $\langle a \rangle_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$, która jednak pociąga za sobą tożsamość (zapisaną symbolicznie)

$$\rho(\mathfrak{A}) \equiv \rho(\mathfrak{A} \cdot a \cdot \mathfrak{A}) = \rho(\mathfrak{A}) \circ \rho(a) \circ \rho(\mathfrak{A}) = 0,$$

więc też trywialność ρ . $\square$

Z połączenia obu poprzednich wyników wyprowadzamy

Corollarium 1. Wszystkie nietrywialne reprezentacje nieprzywiedlne unitalnej łącznej algebry prostej są wzajem równoważne.

W kontekście Stw. 5-6.5 i Def. 2 rodzi się naturalne pytanie o konsekwencje, jakie powyższe rozważania niosą dla teorii reprezentacji algebr będących sumami prostymi unitalnych algebr prostych (czyli szczególnymi przypadkami tzw. **algebr półprostych**), przy czym – jak niemal zawsze w niniejszym kursie – ostatecznej sankcji logicznej dla tego pytania dostarczają istotne fizyczne zastosowania owych algebr, jak choćby napotkana przez nas klasyfikacja rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda. Ilościowej odpowiedzi na nie udziela

Stwierdzenie 6. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in \overline{1, N}} \subset \text{Ob } \mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}$ będzie rodziną unitalnych algebr prostych nad ciałem $\mathbb{K}$ o odnośnych nietrywialnych reprezentacjach nieprzywiedlnych $\{\rho_i\}_{i \in \overline{1, N}}$, o których mowa w Cor. 1. Dowolna nietrywialna reprezentacja nieprzywiedlna algebry $\bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{A}_i$ jest równoważna jednej z reprezentacji

$$\rho_n := \bigoplus_{i=1}^N n_i \rho_i,$$

$$n. \equiv (n_1, n_2, \dots, n_N) \in \{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)\}.$$

Dowód: Niechaj $\rho : \bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{A}_i \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ będzie nietrywialną reprezentacją nieprzywiedlną. Rozważmy kanoniczne włożenia $j_{\mathfrak{A}_i} : \mathfrak{A}_i \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{A}_i$. Bez trudu przekonujemy się, że endomorfizmy

$$\pi_i := \rho \circ j_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i}), \quad i \in \overline{1, N}$$

tworzą zupełną rodzinę rzutów komplementarnych na V , zatem zadają rozkład

$$V = \bigoplus_{i=1}^N V_i, \quad V_i := \pi_i(V),$$

którego składnik prosty V_i jest nośnikiem reprezentacji

$$\rho_i := \rho \circ j_{\mathfrak{A}_i} : \mathfrak{A}_i \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V_i)$$

o własności

$$\begin{aligned} \forall_{j \in \overline{1, N} \setminus \{i\}} : \rho_j(\mathfrak{A}_j)(V_i) &\equiv \rho_j(\mathfrak{A}_j) \circ \rho \circ j_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i})(V) = \rho(j_{\mathfrak{A}_j}(\mathfrak{A}_j) \cdot_{\mathfrak{A}} j_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i}))(V) \\ &= \rho(\{0_{\mathfrak{A}}\})(V) = \{0_V\}, \end{aligned}$$

która pozwala zapisać

$$\begin{aligned} \rho(\mathfrak{A})(V_i) &\equiv \rho\left(\bigoplus_{j=1}^N j_{\mathfrak{A}_j}(\mathfrak{A}_j)\right) \circ (\rho \circ j_{\mathfrak{A}_i})(1_{\mathfrak{A}_i})(V) = \rho(j_{\mathfrak{A}_i}(\mathfrak{A}_i) \cdot_{\mathfrak{A}} j_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i}))(V) \\ &= \rho \circ j_{\mathfrak{A}_i}(\mathfrak{A}_i)(V_i) \equiv \rho_i(\mathfrak{A}_i)(V_i). \end{aligned}$$

czyli – innymi słowy –

$$\rho \equiv \bigoplus_{i=1}^N \rho_i \circ \text{pr}_i,$$

gdzie $\text{pr}_i : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_i$ jest rzutem kanonicznym na składową. I odwrotnie, rodzina reprezentacji $\rho_i : \mathfrak{A}_i \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V_i)$, $i \in \overline{1, N}$ zadaje reprezentację

$$\rho := \bigoplus_{i=1}^N j_{\text{End}_{\mathbb{K}}(V_i)} \circ \rho_i \circ \text{pr}_i : \bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{A}_i \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}\left(\bigoplus_{i=1}^N V_i\right)$$

sumy prostej algebr $\mathfrak{A}_i$ na (zewnątrznej) sumie prostej przestrzeni V_i . Wobec prostego charakteru rozkładu ρ na składowe jest jasnym, że nietrywialność i nieprzywiedlność ρ wymaga, iżby wszystkie poza jedną z podreprezentacji $\tilde{\rho}_i := (j_{\text{End}_{\mathbb{K}}(V_i)} \circ \rho_i \circ \text{pr}_i)$ były trywialne, a do tego – iżby sama nietrywialna $\tilde{\rho}_i$ była nieprzywiedlna, co w świetle Cor.1 jest równoznaczne z dowodzoną tezą. $\square$

Możemy już teraz przystąpić do konstruktywnego opisu (nietrywialnych) reprezentacji nieprzywiedlnych wyróżnionych algebr macierzowych wspomnianych w tezie Stw.5-6.3, które napotkaliśmy we wcześniejszej części wykładu.

Twierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def.1. Wszystkie nietrywialne reprezentacje nieprzywiedlne dowolnej z $\mathbb{K}$ -algebr $R(n)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, o których mowa w Stw.5-6.3 ($\mathbb{K}$ dowolne, gdy $R = \mathbb{K}$ jest ciałem, wzgl. $\mathbb{K} = \mathbb{R} \subset R$, gdy $R \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}\}$), są równoważne odnośnie **reprezentacji definiującej**

$$\rho_{\text{def}} := \text{id}_{\text{End}_{R^{\text{opp}}}(R^{\times n})}.$$

Ponadto dowolna skończenie wymiarowa nietrywialna reprezentacja algebry $\mathbb{K}(n)$ nad ciałem $\mathbb{K}$ jest w pełni przywiedlna i równoważna skończonej sumie prostej kopii tejże reprezentacji definiującej.

Dowód: Zauważmy przede wszystkim, że reprezentacja ρ_{def} jest nietrywialna i nieprzywiedlna, gdyż $\rho_{\text{def}}(\mathbf{1}_n) = \mathbf{1}_n \neq \mathbf{0}_n$ oraz

$$\forall_{\substack{v \in R^{\times n} \setminus \{0\} \\ w \in R^{\times n}}} \exists_{a \in R(n)} : w = a \odot v.$$

Istotnie, dowolny wektor $v \neq 0_{R^{\times n}}$ ma różną od zera jedną ze składowych $v^i \neq 0$ w bazie standardowej $\mathcal{E} \equiv \{e_i\}_{i \in \overline{1, n}}$, można zatem dla ustalonego $w = w^i \triangleright e_i$ wybrać a w postaci

$$a := \frac{w^j}{v^i} \triangleright E_{j, \bar{i}}^{(n)}$$

gdzie $\{E_{i, j}^{(n)}\}_{i, j \in \overline{1, n}}$ jest bazą standardową pierścienia $R(n)$ wskazaną w Przykł. 5-6.1 (1) i gdzie kreska nad indeksem i oznacza, że nie jest on wysumowany. Pierwsza część dowodzonej tezy jest zatem bezpośrednią konsekwencją Cor. 1.

Niech dalej $\rho : \mathbb{K}(n) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ będzie reprezentacją $\mathbb{K}$ -algebry $\mathbb{K}(n)$ na pewnej przestrzeni $\mathbb{K}$ -liniowej V . Łatwo sprawdzamy, że endomorfizmy tej ostatniej dane wzorami

$$\pi_i := \rho(E_{i, i}^{(n)})$$

tworzą zupełną rodzinę rzutów komplementarnych na V , oto bowiem na mocy Równ. (5-6.1) i (5-6.2) zachodzi

$$\pi_i \circ \pi_j \equiv \rho(E_{i,i}^{(n)} \odot E_{j,j}^{(n)}) = \delta_{i,j}^{\mathbb{K}} \triangleright \rho(E_{i,j}^{(n)}) = \delta_{i,j}^{\mathbb{K}} \triangleright \rho(E_{i,i}^{(n)}) \equiv \delta_{i,j}^{\mathbb{K}} \triangleright \pi_i$$

oraz

$$\sum_{i=1}^n \pi_i \equiv \rho\left(\sum_{i=1}^n E_{i,i}^{(n)}\right) = \rho(\mathbf{1}_n) = \text{id}_V.$$

To jednak jest równoznaczne z istnieniem rozkładu

$$V = \bigoplus_{i=1}^n \pi_i(V).$$

Rozważmy odwzorowania $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\tau_{1 \rightarrow k} := \rho(E_{k,1}^{(n)}) \upharpoonright_{\pi_1(V)} : \pi_1(V) \longrightarrow V$$

o własności

$$\tau_{1 \rightarrow k} \circ \pi_1 \equiv \tau_{1 \rightarrow k} \circ \pi_1 \circ \pi_1 \equiv \rho(E_{k,1}^{(n)} \odot E_{1,1}^{(n)}) \circ \pi_1 = \rho(E_{k,k}^{(n)} \odot E_{k,1}^{(n)}) \circ \pi_1 \equiv \pi_k \circ \tau_{1 \rightarrow k},$$

która implikuje relacje

$$\text{Image } \tau_{1 \rightarrow k} \subset \pi_k(V).$$

Zdefiniowawszy odwzorowania $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\tau_{k \rightarrow 1} := \rho(E_{1,k}^{(n)}) \upharpoonright_{\pi_k(V)} : \pi_k(V) \longrightarrow V$$

o własności

$$\tau_{k \rightarrow 1} \circ \pi_k \equiv \tau_{k \rightarrow 1} \circ \pi_k \circ \pi_k \equiv \rho(E_{1,k}^{(n)} \odot E_{k,k}^{(n)}) \circ \pi_k = \rho(E_{1,1}^{(n)} \odot E_{1,k}^{(n)}) \circ \pi_k \equiv \pi_1 \circ \tau_{k \rightarrow 1},$$

z której wynikają relacje

$$\text{Image } \tau_{k \rightarrow 1} \subset \pi_1(V),$$

stwierdzamy bez trudu, że odwzorowania $\tau_{k \rightarrow 1}$ są obustronnymi odwrotnościami odwzorowań $\tau_{1 \rightarrow k}$,

$$\tau_{1 \rightarrow k} \circ \tau_{k \rightarrow 1} \equiv \rho(E_{k,1}^{(n)} \odot E_{1,k}^{(n)}) \upharpoonright_{\pi_k(V)} = \rho(E_{k,k}^{(n)}) \upharpoonright_{\pi_k(V)} \equiv \pi_k \upharpoonright_{\pi_k(V)} = \text{id}_{\pi_k(V)},$$

$$\tau_{k \rightarrow 1} \circ \tau_{1 \rightarrow k} \equiv \rho(E_{1,k}^{(n)} \odot E_{k,1}^{(n)}) \upharpoonright_{\pi_1(V)} = \rho(E_{1,1}^{(n)}) \upharpoonright_{\pi_1(V)} \equiv \pi_1 \upharpoonright_{\pi_1(V)} = \text{id}_{\pi_1(V)},$$

co daje nam do ręki rodzinę izomorfizmów podprzestrzeni

$$\tau_{k \rightarrow 1} : \pi_k(V) \xrightarrow{\cong} \pi_1(V), \quad k \in \overline{1, n}.$$

Określmy następnie odwzorowanie $\mathbb{K}$ -liniowe

$$T \equiv (\pi_1, \tau_{1 \rightarrow 2}, \tau_{1 \rightarrow 3}, \dots, \tau_{1 \rightarrow n}) : \pi_1(V) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n V$$

i oznaczmy – dla dowolnego wektora $v \in \pi_1(V)$ –

$$(\tau_1^v, \tau_2^v, \dots, \tau_n^v) := T(v).$$

Łatwo sprawdzamy, że przestrzeń $\langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}} \subset V$ jest dla dowolnego $v \neq 0_V$ podprzestrzenią ρ -niezmienniczą – istotnie, układ $\mathcal{T} := \{\tau_k^v\}_{k \in \overline{1, n}}$ jest jawnie $\mathbb{K}$ -liniowo niezależny (wszak jego elementy, będące izomorficznymi obrazami wektora niezerowego, należą do parami różnych składników prostych V), a przy tym wprost na mocy definicji rozpina przestrzeń $\langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}}$, jest zatem jej bazą, w niej zaś stwierdzamy – dla dowolnej macierzy $M = M_{ij} \triangleright E_{i,j}^{(n)} \in \mathbb{K}(n)$ –

$$\rho(M)(\tau_k^v) = M_{ij} \triangleright \rho(E_{i,j}^{(n)} \odot E_{k,1}^{(n)})(v) = M_{ij} \cdot \delta_{j,k}^{\mathbb{K}} \triangleright \rho(E_{i,1}^{(n)})(v)$$

$$\equiv M_{i,k} \triangleright \tau_i^v \in \langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}}.$$

Przy tym zauważamy, że także w przypadku reprezentacji definiującej ρ_{def} są – w bazie standardowej $\mathcal{E}$ przestrzeni $\mathbb{K}^n$ – spełnione równości

$$\rho_{\text{def}}(M)(e_k) = M_{ij} \triangleright E_{i,j}^{(n)} \odot e_k = M_{ij} \cdot \delta_{j,k}^{\mathbb{K}} \triangleright e_i \equiv M_{i,k} \triangleright e_i,$$

więc odwzorowanie $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\iota_v : \langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times n}$$

będące rozszerzeniem przyporządkowania baz

$$\langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}} \ni \tau_i^v \longmapsto e_i \in \mathbb{K}^{\times n}, \quad i \in \overline{1, n}$$

jest równoważnością reprezentacji

$$\rho \upharpoonright \langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}} \sim \rho_{\text{def}}.$$

Uwzględniając powyższe, wybierzmy w $\pi_1(V)$ dowolną bazę $\{v_i \equiv \tau_1^{v_i}\}_{i \in \overline{1, D}}$, $D \equiv \dim_{\mathbb{K}} \pi_1(V)$, a wówczas układy wektorów $\{\tau_k^{v_i}\}_{i \in \overline{1, D}} \subset \pi_k(V)$, $k \in \overline{1, n}$ są – jako izomorficzne obrazy układu bazowego – bazami w odnośnych składnikach $\pi_k(V) \subset V$, co w sumie daje nam rozkład

$$V = \bigoplus_{k=1}^n \pi_k(V) = \bigoplus_{k=1}^n \bigoplus_{i=1}^D \langle \tau_k^{v_i} \rangle_{\mathbb{K}} = \bigoplus_{i=1}^D \bigoplus_{k=1}^n \langle \tau_k^{v_i} \rangle_{\mathbb{K}} \equiv \bigoplus_{i=1}^D \langle T(v_i) \rangle_{\mathbb{K}} \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^D \iota_{v_i}} \bigoplus_{i=1}^D \mathbb{K}^{\times n},$$

a wraz z nim – postulowaną równoważność

$$\rho \sim \bigoplus_{i=1}^D \rho_{\text{def}}.$$

□

Powyższe twierdzenie stanowi zwieńczenie naszej wyczerpującej analizy teorii reprezentacji algebr prostych. Jednocześnie tworzy ono naturalny kontekst, w którym możliwe jest lepsze zrozumienie sensu Stw. 1. Oto więc mamy

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Tw. 2 i ustalmy (dowolnie) $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Prawdziwe są następujące zdania:

- (i) Reprezentacja definiująca $\mathbb{R}$ -algebry $\mathbb{R}(n)$ jest rzeczywista i nie jest zespolona, więc tym bardziej nie jest też kwaternionowa.
- (ii) Reprezentacja definiująca $\mathbb{R}$ -algebry $\mathbb{C}(n)$ jest zespolona i nie jest kwaternionowa.
- (iii) Reprezentacja definiująca $\mathbb{R}$ -algebry $\mathbb{H}(n)$ jest kwaternionowa.

Dowód: Punktem wyjścia do udowodnienia tezy stwierdzenia jest zrozumienie strukturalnej różnicy między odwzorowaniem $\mathbb{R}$ -liniowym i odwzorowaniem R^{opp} -liniowym na $R^{\times n}$ dla pierścienia z dzieleniem $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, w którym pierścień $\mathbb{R}$ jest zanurzony poprzez monomorfizm

$$j_R : \mathbb{R} \rightarrowtail R \equiv \mathbb{R}^{\times N} : r \longmapsto (r, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N-1 \text{ razy}}),$$

gdzie $N = 1$ dla $R = \mathbb{R}$, $N = 2$ dla $R = \mathbb{C}$ i $N = 4$ dla $R = \mathbb{H}$. Biorąc pod uwagę to zanurzenie, zapiszemy

$$R^{\times n} \equiv \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}^{\times N} \cong \mathbb{R}^{\times n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times N},$$

a wtedy

$$\text{End}_{\mathbb{R}}(R^{\times n}) \cong (\mathbb{R}^{\times n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times N})^* \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}^{\times n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times N}) \cong \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(N).$$

Dalej zauważmy, że należące do R współczynniki rozkładu dowolnej macierzy $M = E_{i,j}^{(n)} \otimes_{\mathbb{R}} M_{ij} \in R(n)$ w bazie standardowej są w powyższej prezentacji macierzami

$$M_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N M_{ij}^{\alpha} \triangleright I_{\alpha}^R \in \mathbb{R}(N)$$

o współczynnikach rzeczywistych $M_{i,j}^k$, rozpiętymi na generatorach $I_\alpha^R \in \mathbb{R}(N)$ realizujących działanie (poprzez mnożenie) elementów tejże bazy standardowej 1 (w przypadku $R = \mathbb{R}$) wzgl. $(1, 0), (0, 1)$ (w przypadku $R = \mathbb{C}$), wzgl. $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$ (w przypadku $R = \mathbb{H}$) na $\mathbb{R}^{\times N} \cong R$. Widzimy zatem, że

$$R(n) \cong \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \bigoplus_{\alpha=1}^n \langle I_\alpha^R \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(N) \cong \text{End}_{\mathbb{R}}(R^{\times n}).$$

Bez trudu znajdujemy jawną postać wyróżnionych macierzy I_α^R (z której wynika ich liniowa niezależność) w bezpośrednim rachunku,

$$1 \cdot_{\mathbb{R}} a = a \quad \implies \quad I_1^{\mathbb{R}} = 1,$$

$$(1, 0) \cdot_{\mathbb{C}} (a, b) = (a, b) \quad \implies \quad I_1^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \tilde{\sigma}_0,$$

$$(0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} (a, b) = (-b, a) \quad \implies \quad I_1^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \tilde{\sigma}_2,$$

$$(1, 0, 0, 0) \cdot_{\mathbb{H}} (a, b, c, d) = (a, b, c, d) \quad \implies \quad I_1^{\mathbb{H}} = \tilde{\sigma}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_0,$$

$$(0, 1, 0, 0) \cdot_{\mathbb{H}} (a, b, c, d) = (-b, a, -d, c) \quad \implies \quad I_2^{\mathbb{H}} = \tilde{\sigma}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2,$$

$$(0, 0, 1, 0) \cdot_{\mathbb{H}} (a, b, c, d) = (-c, d, a, -b) \quad \implies \quad I_3^{\mathbb{H}} = \tilde{\sigma}_2 \otimes_{\mathbb{R}} i \triangleright \tilde{\sigma}_3,$$

$$(0, 0, 0, 1) \cdot_{\mathbb{H}} (a, b, c, d) = (-c, d, a, -b) \quad \implies \quad I_4^{\mathbb{H}} = \tilde{\sigma}_2 \otimes_{\mathbb{R}} i \triangleright \tilde{\sigma}_1,$$

przy czym $\tilde{\sigma}_\mu$, $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ są osławionymi **macierzami Pauliego** (w matematycznie raczej niż fizycznie umotywowanej konwencji¹) o prostych regułach (anty-)komutacji

$$[\tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_j] = 2\varepsilon_{ijk} \triangleright \tilde{\sigma}_k, \quad \{\tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_j\} = -2\delta_{i,j} \triangleright \tilde{\sigma}_0,$$

zapisanych przy użyciu **symbolu Levi-Civitty**

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} \text{sign}(\sigma), & \text{gdy } (i, j, k) = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)) \text{ dla } \sigma \in \mathfrak{S}_{\{1,2,3\}} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

Na tym etapie możemy już wygodnie przeformułować pytanie o postać centralizatora $C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(R^{\times n})}(R(n))$ – w wybranej przez nas wygodnej prezentacji $\text{End}_{\mathbb{R}}(R^{\times n})$ tworzą go macierze

$$C = C_{ij,ab} \triangleright E_{i,j}^{(n)} \otimes_{\mathbb{R}} E_{a,b}^{(N)} \in \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(N)$$

przemienne ze wszystkimi generatorami wiernego obrazu $R(n)$ w $\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(N)$, tj. spełniające układ warunków

$$(1) \quad \forall_{(i,j,\alpha) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n} \times \overline{1,N}} : [C, E_{i,j}^{(n)} \otimes_{\mathbb{R}} I_\alpha^R] = \mathbf{0}_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_N.$$

Wykorzystując algebrę (5-6.2), możemy przepisać powyższe warunki w postaci

$$\forall_{(i,j,\alpha) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n} \times \overline{1,N}} : C_{ki,bc} \triangleright E_{k,j}^{(n)} \otimes_{\mathbb{R}} E_{b,c}^{(N)} \odot I_\alpha^R = C_{jk,bc} \triangleright E_{i,k}^{(n)} \otimes_{\mathbb{R}} I_\alpha^R \odot E_{b,c}^{(N)}.$$

Dla $\alpha = 1$, a wobec liniowej niezależności wektorów $E_{b,c}^{(N)}$ wnioskujemy na tej podstawie, że

$$\forall_{(i,j,b,c) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n} \times \overline{1,N} \times \overline{1,N}} : C_{ki,bc} \triangleright E_{k,j}^{(n)} = C_{jk,bc} \triangleright E_{i,k}^{(n)}.$$

Łatwo widać, że obecność dowolnego niezerowego wyrazu $C_{ki,bc}$ o indeksach $k \neq i$ prowadziłaby do sprzeczności, gdyż oznaczałaby, że wektor $E_{k,j}^{(n)}$ należy do powłoki $\mathbb{R}$ -liniowej wektorów

¹Macierze $\tilde{\sigma}_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$ stanowią bazę algebry Liego $\mathfrak{su}_2$, którą w zgodzie z tradycją matematyczną wybieramy w postaci skośnie hermitowskiej.

$E_{l,m}^{(n)}$, $l \neq k$, stwierdzamy więc, że niechybnie (nadkreślenie indeksu i podkreśla zawieszenie konwencji sumacyjnej Einsteina w odniesieniu do tego (powtórzonego) indeksu)

$$\forall_{(i,j,a,b) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n} \times \overline{1,N} \times \overline{1,N}} : C_{ij,ab} = \delta_{\bar{i}\bar{j}} \bar{c}_{ab}^{\bar{i}}$$

dla pewnych liczb $c_{ab}^i \in \mathbb{R}$. Podstawivszy tę zredukowaną postać do wyjściowej tożsamości, stwierdzamy

$$\bar{c}_{bc}^{\bar{i}} \triangleright E_{i,j}^{(n)} = \bar{c}_{bc}^{\bar{j}} \triangleright E_{i,\bar{j}}^{(n)},$$

więc też koniecznie

$$c_{bc}^i = c_{bc}^j \equiv c_{bc},$$

czyli – innymi słowy – że

$$C = \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} c$$

dla pewnej macierzy $c \in \mathbb{R}(N)$, która w świetle (1) spełnia układ warunków przemienności

$$(2) \quad \forall_{\alpha \in \overline{2,N}} : [c, I_{\alpha}^R] = \mathbf{0}_N.$$

To pozwala zapisać równość

$$C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)}(\mathbb{R}(n)) = \langle \mathbf{1}_n \rangle_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R},$$

co kończy dowód punktu (i).

W przypadku $R = \mathbb{C}$ mamy do czynienia z macierzą

$$c := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(2)$$

o własności

$$\begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & -\delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix},$$

a zatem

$$c = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

i ostatecznie

$$C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)}(\mathbb{C}(n)) = \langle \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_0, \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2 \rangle_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C},$$

co pokazuje słuszność punktu (ii). Odnotujmy na marginesie, że $\mathbb{R}$ -liniowy endomorfizm $\mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2$ przestrzeni $\mathbb{C}^n$ realizuje działanie składowe $(0, 1)$, tj. – w zapisie Stw. 11-12.6 – jest strukturą zespoloną na $\mathbb{C}^n$, co pozwala nadać nowy (i równoważny poprzedniemu) sens pojęciu endomorfizmu $\mathbb{C}$ -liniowego tejże przestrzeni: oto macierze $\mathbb{C}(n)$ są przemienne z tymi i tylko tymi odwzorowaniami $\mathbb{R}$ -liniowymi na $\mathbb{C}^n$, które realizują działanie ciała $\mathbb{C}$.

Przechodząc do ostatniego przypadku, $R = \mathbb{H}$, zapisujemy macierz c w postaci

$$c := \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix}, \quad A, B, \Gamma, \Delta \in \mathbb{R}(2),$$

$$A := \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}, \quad \Gamma := \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{pmatrix}, \quad \Delta := \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_3 & \delta_4 \end{pmatrix},$$

po czym nakładamy po kolei warunki z (2). Z warunku dla $\alpha = 2$ wyprowadzamy zależność

$$\forall_{x \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}} : (x_3, x_4) = (-x_2, x_1),$$

a z warunku dla $\alpha = 3$ – relacje

$$\Gamma = -B^T, \quad \Delta = A^T.$$

Warunek dla $\alpha = 4$ jest teraz spełniony tożsamościowo i koniec końców otrzymujemy oczekiwaną równość

$$C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^n)}(\mathbb{H}(n))$$

$$= \langle \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\tilde{\sigma}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_0), \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (i \triangleright \tilde{\sigma}_3 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2), \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\tilde{\sigma}_2 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_0), \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (i \triangleright \tilde{\sigma}_1 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2) \rangle_{\mathbb{R}},$$

przy czym raz jeszcze przekonujemy się, że wyróżnione $\mathbb{R}$ -liniowe endomorfizmy $\mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (i \triangleright \tilde{\sigma}_3 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2)$, $\mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\tilde{\sigma}_2 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_0)$ i $\mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (i \triangleright \tilde{\sigma}_1 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2)$ realizują na $\mathbb{H}^n$ naturalne działanie *prawostronne*

(czyli z prawej strony – patrz: Def. 11-12.3) elementów – odpowiednio – $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ i $(0, 0, 0, 1)$ pierścienia bazowego $\mathbb{H}$, więc definiują nań strukturę kwaternionową w rozumieniu Stw. 11-12.6. Macierze $\mathbb{H}(n)$ (po raz wtóry) zyskują interpretację endomorfizmów utworzonej w ten sposób kwaternionowej przestrzeni wektorowej jako wyróżnione odwzorowania $\mathbb{R}$ -liniowe na $\mathbb{H}^{xn}$, które są przemienne wyłącznie z odwzorowaniami $\mathbb{R}$ -liniowymi na $\mathbb{H}^{xn}$ realizującymi (prawostronne) działanie pierścienia $\mathbb{H}$. $\square$

2. OGÓLNE WŁASNOŚCI MODUŁÓW CLIFFORDA

W dalszej części wykładu skrupulatnie wykorzystamy wszystkie dotychczasowe nasze obserwacje dotyczące struktury rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda w celu przeprowadzenia wyczerpującej klasyfikacji ich reprezentacji, co będzie stanowiło fundamentalny przyczynek do zrozumienia fizycznie istotnych tzw. reprezentacji spinorowych pewnych wyróżnionych grup zanurzonych w tychże algebrach Clifforda. Punktem wyjścia do dalszej dyskusji jest

Definicja 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V, Q_V)$ będzie przestrzenią kwadratową nad ciałem $\mathbb{K}$. **Moduł Clifforda** algebry $\text{Cliff}(V, Q_V)$ to para $((W, +_W, P_W, \bullet \mapsto 0_W), \ell_W, \rho)$ złożona z przestrzeni wektorowej $((W, +_W, P_W, \bullet \mapsto 0_W), \ell_W)$ nad ciałem $\mathbb{K}$ oraz reprezentacji

$$\rho : \text{Cliff}(V, Q_V) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(W).$$

Najbardziej elementarnej (re)interpretacji (algebraicznej) powyższej definicji na gruncie leżącej u jej podstaw definicji algebry Clifforda dostarcza

Stwierdzenie 8. Przyjmijmy zapis Def. 4. Ilekroć forma kwadratowa Q_V jest niezwyrodniała, ograniczenie (dziedziny) reprezentacji algebry Clifforda do przestrzeni wektorowej $V \subset \text{Cliff}(V, Q_V)$ jest wierne (tj. iniektywne),

$$\text{Ker } \rho \cap V = \{0\}.$$

Dowód: Dla dowolnych: $v \in \text{Ker } \rho$ i $w \in V$ obliczamy – wobec homomorficzności ρ –

$$2_{\mathbb{K}} \Phi_{Q_V}(v, w) \triangleright \text{id}_W \equiv 2_{\mathbb{K}} \Phi_{Q_V}(v, w) \triangleright \rho(e^C) = \rho(\{v, w\}) = \{\rho(v), \rho(w)\} = \{0, \rho(w)\} = \{0, \rho(w)\} = 0,$$

co wobec dowolności w a z racji niezwyrodnienia Q_V implikuje równość $v = 0_V$. $\square$

Uwaga 2. W świetle powyższego stwierdzenia możemy postrzegać moduł Clifforda jako wierną realizację przestrzeni wektorowej V w przestrzeni wektorowej W , transportującą strukturę algebry (Clifforda) na V indukowaną w obecności formy kwadratowej Q_V .

Jako że prowadzimy nasze rozważania w kategorii przestrzeni kwadratowych, zasadnym wydaje się wyróżnienie tych reprezentacji algebr Clifforda, które – w przypadku istnienia struktury przestrzeni kwadratowej na nośniku reprezentacji – wykazują proste własności względem obu struktur przestrzeni kwadratowej: na przestrzeni V określającej reprezentowaną algebrę oraz na nośniku reprezentacji W . Ten sposób myślenia formalizuje

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Def. 4, zakładając przy tym, że także nośnik reprezentacji W jest przestrzenią kwadratową z formą kwadratową Q_W . Ustaliwszy skalar $\varepsilon \in \{-1_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}\}$, reprezentację algebry Clifforda $\rho : \text{Cliff}(V, Q_V) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(W)$ określimy mianem ε -ortogonalnej, jeśli dla dowolnych $(v, w_1, w_2) \in V \times W^{\times 2}$ jest spełniony warunek

$$(3) \quad \Phi_{Q_W}(\rho \circ j_V^C(v)(w_1), \rho \circ j_V^C(v)(w_2)) = \varepsilon \cdot_{\mathbb{K}} Q_V(v) \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_{Q_W}(w_1, w_2),$$

w którego zapisie $j_V^C : V \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q)$ jest kanonicznym odwzorowaniem Clifforda.

Przy pewnych dodatkowych założeniach, uzyskujemy proste przeformułowanie własności ε -ortogonalności:

Stwierdzenie 9. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, zakładając dodatkowo, że Q_W jest niezwyrodniała. Jeśli (V, Q_V) jest niezwyrodniała, reprezentacja $\rho : \text{Cliff}(V, Q_V) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(W)$ jest ε -ortogonalna wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie $\mathbb{K}$ -liniowe $\rho \circ j_V^C(v) \in \text{End}_{\mathbb{K}}(W)$ jest dla dowolnego $v \in V$ **ε -hermitowskie**, tj. spełnia warunek

$$(\rho \circ j_V^C(v))^\dagger = \varepsilon (\rho \circ j_V^C(v)),$$

gdzie $(\cdot)^\dagger$ jest sprzężeniem hermitowskim określonym względem Φ_{Q_W} .

Dowód: Założenie o niezwyrodnieniu Q_W , implikujące niezwyrodnienie indukowanej przez nią formy dwuliniowej Φ_{Q_W} , pozwala przepisać warunek (3) definiujący reprezentację ε -ortogonalną w równoważnej postaci

$$\forall_{v \in V} : (\rho \circ j_V^C(v))^\dagger \circ (\rho \circ j_V^C(v)) = \varepsilon Q_V(v) \triangleright \text{id}_W.$$

Ponieważ zachodzi także równość

$$(\rho \circ j_V^C(v)) \circ (\rho \circ j_V^C(v)) = \rho(j_V^C(v) \cdot j_V^C(v)) = \rho(Q_V(v) \triangleright e^C) = Q_V(v) \triangleright \text{id}_W,$$

przeto otrzymujemy tożsamość

$$Q_V(v) \triangleright (\rho \circ j_V^C(v))^\dagger \equiv (\rho \circ j_V^C(v))^\dagger \circ (\rho \circ j_V^C(v)) \circ (\rho \circ j_V^C(v)) = \varepsilon Q_V(v) \triangleright (\rho \circ j_V^C(v)).$$

Jeśli teraz założyć, że Q_V jest nieosobliwa, czyli że nie istnieją wektory $v \in V \setminus \{0_V\}$ o własności $Q_V(v) = 0_{\mathbb{K}}$, to dla dowolnego $v \neq 0_V$ otrzymujemy tezę skracając obustronnie $Q_V(v) \neq 0_{\mathbb{K}}$. (Liniowość $\rho \circ j_V^C$ gwarantuje słuszność tezy dla $v = 0_V$.) W ogólniejszym przypadku niezdegenerowanej formy kwadratowej Q_V powyższą tożsamość odnosimy do dowolnej bazy (pseudo)ortonormalnej $\{e_i\}_{i \in \overline{1, \dim_{\mathbb{R}} V}}$, dla której mamy $Q_V(e_i) = \varepsilon_i \in \{-1, 1\}$. Tym sposobem wyprowadzamy równości

$$\varepsilon_i \triangleright (\rho \circ j_V^C(e_i))^\dagger = \varepsilon \cdot \varepsilon_i \triangleright (\rho \circ j_V^C(e_i)), \quad i \in \overline{1, \dim_{\mathbb{R}} V},$$

więc też

$$(\rho \circ j_V^C(e_i))^\dagger = \varepsilon \triangleright (\rho \circ j_V^C(e_i)), \quad i \in \overline{1, \dim_{\mathbb{R}} V}.$$

Na tej podstawie dla dowolnego wektora $v = v^i \triangleright e_i$ obliczamy (wobec $v^i \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} (\rho \circ j_V^C(v))^\dagger &= (v^i \triangleright \rho \circ j_V^C(e_i))^\dagger = v^i \triangleright (\rho \circ j_V^C(e_i))^\dagger = v^i \cdot \varepsilon \triangleright (\rho \circ j_V^C(e_i)) = \varepsilon \triangleright (\rho \circ j_V^C(v^i \triangleright e_i)) \\ &\equiv \varepsilon \triangleright (\rho \circ j_V^C(v)). \end{aligned}$$

Implikacja odwrotna jest trywialna. □

Naturalności dokonanego przez nas wyróżnienia dowodzi

Stwierdzenie 10. Przyjmijmy zapis Def. 5. Dowolna reprezentacja algebry Clifforda rzeczywistej przestrzeni kwadratowej (wymiaru $d_V = \dim_{\mathbb{R}} V$) o (pseudo)euklidesowej formie kwadratowej $Q_V = \varepsilon_V \triangleright \delta_E^{(d_V)}$, $\varepsilon_V \in \{-1, +1\}$ na rzeczywistej przestrzeni kwadratowej (wymiaru $d_W = \dim_{\mathbb{R}} W$) o (pseudo)euklidesowej formie kwadratowej $Q_W = \varepsilon_W \triangleright \delta_E^{(d_W)}$, $\varepsilon_W \in \{-1, +1\}$ jest równoważna pewnej reprezentacji ε_V -ortogonalnej.

Dowód: Wybierzmy bazę ε_V -ortonormalną $\mathcal{E} := \{e_i\}_{i \in \overline{1, d_V}}$ w przestrzeni V , a wówczas w $\text{Cliff}(V, Q_V)$ są spełnione relacje

$$\{e_i, e_j\} = 2\varepsilon_V \delta_{i,j} \triangleright e^C, \quad i, j \in \overline{1, d_V}.$$

Zdefiniujmy grupę

$$\Gamma := \langle e_i \mid i \in \overline{1, d_V} \rangle,$$

generowaną mnożliwotnie przez j_V^C -obrazy elementów bazy $\mathcal{E}$ w $\text{Cliff}(V, Q_V)$ (dla odciążenia zapisu pomijamy symbol j_V^C). Grupa ta jest w oczywisty sposób skończona, ma zatem sens poniższa definicja odwzorowania dwuliniowego:

$$(\cdot | \cdot)^\Gamma : W \times W \rightarrow \mathbb{R} : (w_1, w_2) \mapsto \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \Phi_{Q_W}(\rho(\gamma)(w_1), \rho(\gamma)(w_2)).$$

Przy tym (ε_W) -określoność formy Φ_{Q_W} implikuje (takąż) określoność odwzorowania $(\cdot|\cdot)^\Gamma$, a nadto – dla dowolnych $\gamma \in \Gamma$ i $w_1, w_2 \in W^{\times 2}$ – stwierdzamy Γ -niezmienniczość tego ostatniego,

$$\begin{aligned} (\rho(\gamma)(w_1)|\rho(\gamma)(w_2))^\Gamma &\equiv \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\tilde{\gamma} \in \Gamma} \Phi_{Q_W}(\rho(\tilde{\gamma} \cdot \gamma)(w_1), \rho(\tilde{\gamma} \cdot \gamma)(w_2)) \\ &= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\tilde{\gamma} \cdot \gamma \in \Gamma} \Phi_{Q_W}(\rho(\tilde{\gamma} \cdot \gamma)(w_1), \rho(\tilde{\gamma} \cdot \gamma)(w_2)) \equiv (w_1|w_2)^\Gamma. \end{aligned}$$

Pierwsza z tych cech pozwala stwierdzić istnienie odwzorowania $\chi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(W)$ o własności

$$\forall_{w_1, w_2 \in W} : (w_1|w_2)^\Gamma = \Phi_{Q_W}(\chi(w_1), \chi(w_2)).$$

Istotnie, wystarczy wybrać w W – w zgodzie z Twierdzeniem Lagrange’a o diagonalizacji formy kwadratowej – bazę $\{f_A\}_{A \in \overline{1, d_W}}$ ε_W -ortonormalną względem formy kwadratowej Q_W oraz bazę $\{g_A\}_{A \in \overline{1, d_W}}$ ε_W -ortonormalną względem formy kwadratowej

$$Q_W^\Gamma : W \longrightarrow \mathbb{R} : w \longmapsto (w|w)^\Gamma,$$

a następnie dokonać (jedyne) $\mathbb{R}$ -liniowego rozszerzenia przyporządkowania

$$\chi(g_A) := f_A, \quad A \in \overline{1, d_W},$$

gdyż wtedy

$$\begin{aligned} (w_1|w_2)^\Gamma &= w_1^A \cdot_{\mathbb{R}} w_2^B \cdot_{\mathbb{R}} (g_A|g_B)^\Gamma = \varepsilon_W w_1^A \cdot_{\mathbb{R}} w_2^B \cdot_{\mathbb{R}} \delta_{A,B}^{\mathbb{R}} \equiv w_1^A \cdot_{\mathbb{R}} w_2^B \cdot_{\mathbb{R}} \Phi_{Q_W}(f_A, f_B) \\ &= w_1^A \cdot_{\mathbb{R}} w_2^B \cdot_{\mathbb{R}} \Phi_{Q_W}(\chi(g_A), \chi(g_B)) = \Phi_{Q_W}(\chi(w_1), \chi(w_2)). \end{aligned}$$

Na tym etapie możemy już zadać reprezentację

$$\rho_\chi := \chi \circ \rho(\cdot) \circ \chi^{-1} : \text{Cliff}(V, \varepsilon_V \triangleright \delta_E^{(d_V)}) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(W) : x \longmapsto \chi \circ \rho(x) \circ \chi^{-1},$$

wprost na mocy definicji równoważną ρ . Obrazy elementów grupy Γ względem tej reprezentacji są izometriami Q_W , oto bowiem dla dowolnych $(\gamma, w_1, w_2) \in \Gamma \times W^{\times 2}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Phi_{Q_W}(\rho_\chi(\gamma)(w_1), \rho_\chi(\gamma)(w_2)) &\equiv \Phi_{Q_W}(\chi(\rho(\gamma) \circ \chi^{-1}(w_1)), \chi(\rho(\gamma) \circ \chi^{-1}(w_2))) \\ &= (\rho(\gamma)(\chi^{-1}(w_1))|\rho(\gamma)(\chi^{-1}(w_2)))^\Gamma \\ &= (\chi^{-1}(w_1)|\chi^{-1}(w_2))^\Gamma = \Phi_{Q_W}(w_1, w_2). \end{aligned}$$

Zdefiniujmy rodzinę endomorfizmów

$$\sigma_i := \rho_\chi(e_i), \quad i \in \overline{1, d_V}.$$

Te spełniają – dla dowolnych $w_1, w_2 \in W$ oraz $i \in \overline{1, d_V}$ – tożsamości

$$\Phi_{Q_W}(\sigma_i^\dagger \circ \sigma_i(w_1), w_2) = \Phi_{Q_W}(\sigma_i(w_1), \sigma_i(w_2)) = \Phi_{Q_W}(w_1, w_2)$$

(wszak $e_i \in \Gamma$), przeto – wobec dowolności w_1 i w_2 – jest

$$\sigma_i^\dagger \circ \sigma_i = \text{id}_W,$$

ale też

$$\sigma_i \circ \sigma_i = \rho_\chi(e_i^2) = \varepsilon_V \triangleright \rho_\chi(e^C) = \varepsilon_V \triangleright \text{id}_W,$$

więc ostatecznie

$$\sigma_i^\dagger = \varepsilon_V \triangleright \sigma_i,$$

co pozwala zapisać – dla dowolnego wektora $v = v^i \triangleright e_i \in V$ – tożsamość

$$\rho_\chi(v)^\dagger = v^i \triangleright \sigma_i^\dagger = \varepsilon_V v^i \triangleright \sigma_i \equiv \varepsilon_V \triangleright \rho_\chi(v),$$

która w świetle Stw. 9 przesądza o ε_V -ortogonalności reprezentacji ρ_χ , jawnie równoważnej ρ . $\square$

Powyższe wprowadzenie przygotowało nas należycie do zmierzania się z wyzwaniem, jakim jest

kompletna klasyfikacja (nieprzywiedlnych i nietrywialnych) reprezentacji rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda – wyzwanie to podejmujemy w następnym rozdziale.

3. REPREZENTACJE RZECZYWISTYCH I ZESPOLONYCH ALGEBR CLIFFORDA

Wyczerpująca klasyfikacja rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda, przeprowadzona w ramach Wykładów XI i XII, w połączeniu z wiedzą dotyczącą reprezentacji algebr prostych i półprostych zgromadzoną pierwszej części wykładu niniejszego, stanowi solidną podstawę do sformułowania kompletnego opisu reprezentacji (nieprzywiedlnych) wszystkich algebr Clifforda nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. Tytułem jej uzupełnienia w sposób pozwalający na wysłowienie twierdzeń klasyfikacyjnych wyartykułujemy istotne

Stwierdzenie 11. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnych liczb $p, q \in \mathbb{N}$ spełniających warunek $q - p = 3 \pmod{4}$ i dowolnej liczby $n \in 2\mathbb{N} + 1$ zachodzi, co następuje:

- (i) w dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ na przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowej V zachodzi

$$\rho(\omega_{\mathbb{R}}) = \varepsilon \triangleright \text{id}_V, \quad \varepsilon \in \{-1, +1\},$$

przy czym reprezentacje odpowiadające obu wartościom ε istnieją i są wzajem nierównoważne – w dalszej części dyskusji będziemy je oznaczać symbolem $\rho_{\varepsilon}^{p,q}$;

- (ii) w dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \text{Cl}_n^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\tilde{V})$ na przestrzeni $\mathbb{C}$ -liniowej $\tilde{V}$ zachodzi

$$\rho(\omega_{\mathbb{C}}) = \tilde{\varepsilon} \triangleright \text{id}_{\tilde{V}}, \quad \tilde{\varepsilon} \in \{-1, +1\},$$

przy czym reprezentacje odpowiadające obu ewentualnościom istnieją i są wzajem nierównoważne – w dalszej części dyskusji będziemy je oznaczać symbolem ρ_{ε}^n .

Dowód: Niechaj $\rho : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ będzie dowolną (nietrywialną) reprezentacją nieprzywiedlną. Wobec tożsamości

$$\rho(\omega_{\mathbb{R}})^2 = \rho(\omega_{\mathbb{R}}^2) = \rho(e^{\mathbb{C}}) = \text{id}_V,$$

wynikającej ze Stw. 11-12.2, endomorfizm $\rho(\omega_{\mathbb{R}})$ definiuje zupełną parę rzutów komplementarnych:

$$P_{\pm} := \frac{1}{2}(\text{id}_V \pm \rho(\omega_{\mathbb{R}})),$$

która wyznacza rozkład nośnika reprezentacji na sumę prostą

$$V = V_+ \oplus V_-, \quad V_{\pm} := P_{\pm}(V),$$

przy czym zachodzi

$$\rho(\omega_{\mathbb{R}})|_{V_{\pm}} = \pm \text{id}_{V_{\pm}}.$$

Jako że element objętości należy do centrum $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ (wszak $p + q \in 2\mathbb{N} + 1$), przeto podprzestrzenie własne $V_{\pm}$ są ρ -niezmiennicze, co wobec założonej nieprzywiedlności ρ ogranicza możliwą rozkład jak niżej:

$$(V_+, V_-) = (V, \{0_V\}) \quad \vee \quad (V_+, V_-) = (\{0_V\}, V).$$

Założmy, że otrzymane tą drogą reprezentacje $\rho_{\pm} : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(V_{\pm})$ o własności $\rho_{\pm}(\omega_{\mathbb{R}}) = \pm \text{id}_{V_{\pm}}$ są równoważne, czyli istnieje izomorfizm $\chi : V_+ \rightarrow V_-$ spełniający warunek

$$\forall \gamma \in \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} : \chi \circ \rho_+(\gamma) = \rho_-(\gamma) \circ \chi.$$

Zachodzi wówczas – w szczególności – tożsamość

$$\chi \equiv \chi \circ \rho_+(\omega_{\mathbb{R}}) = \rho_-(\omega_{\mathbb{R}}) \circ \chi = -\chi,$$

która prowadzi do sprzeczności, skąd ostateczny wniosek o nierównoważności wzajemnej obu reprezentacji.

Na koniec pokażemy, że obie reprezentacje istnieją. W tym celu odwołamy się do Stw.6 oraz 11-12.2, aby stwierdzić istnienie dwóch (nietrywialnych) reprezentacji nieprzywiedlnych algebry $R(2^m) \oplus R(2^m) \cong \text{Cl}_{p,q}^+ \oplus \text{Cl}_{p,q}^- \equiv \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$, $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{H}\}$, $m \in \mathbb{N}$, o strukturze

$$\tilde{\rho}_+ := \rho_{\text{def}} \circ \text{pr}_1 : R(2^m) \oplus R(2^m) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(R^{2^m})$$

i

$$\tilde{\rho}_- := \rho_{\text{def}} \circ \text{pr}_2 : R(2^m) \oplus R(2^m) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(R^{2^m})$$

odpowiednio. Zważywszy (unitalny charakter $\text{Cl}_{p,q}^+ \cong R(2^m)$ oraz) słuszność tożsamości

$$\forall_{\gamma_{\pm} \in \text{Cl}_{p,q}^{\pm}} : \omega_{\mathbb{R}} \cdot \gamma_{\pm} = \pm \gamma_{\pm},$$

wynikających wprost z definicji podalgebr $\text{Cl}_{p,q}^{\pm}$, wyprowadzamy stąd wniosek, że w obrazie odwrotnym izomorfizmów ι_k , $k \in \{3, 7\}$ z dowodu Stw. 11-12.2 otrzymujemy

$$\iota_k^{-1}(\omega_{\mathbb{R}}) = \mathbf{1}_{2^m} \oplus (-\mathbf{1}_{2^m}),$$

a zatem także dla nieprzywiedlnych reprezentacji

$$\rho_{\pm} := \tilde{\rho}_{\pm} \circ \iota_k^{-1} : \text{Cl}_{p,q}^+ \oplus \text{Cl}_{p,q}^- \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(R^{2^m})$$

oczekiwane tożsamości

$$\rho_{\pm}(\omega_{\mathbb{R}}) = \pm \text{id}_{R^{2^m}}.$$

Dowód dla przypadku zespolonego przebiega analogicznie, przy czym odwołuje się do Stw. 11-12.5 zamiast Stw. 11-12.2. $\square$

Tak przygotowani możemy już przejść do sklasyfikowania reprezentacji algebr Clifforda, co w przypadku algebr rzeczywistych podsumowuje

Twierdzenie 3 (Klasyfikacyjne dla reprezentacji nieprzywiedlnych $/\mathbb{R}$). Przyjmijmy zapis dotychczasowy, a następnie wprowadźmy oznaczenia

$$(q_{\mathbb{R}}, q_{\mathbb{C}}, q_{\mathbb{H}}) := (0, 1, 2)$$

oraz – dla dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ –

$$d_{p,q}^{\mathbb{R}} := \dim_{\mathbb{R}} V, \quad \mathfrak{C}_{p,q}^{\mathbb{R}} := C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(V)}(\rho(\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}})).$$

Wreszcie też niechaj $\nu_{p,q}^{\mathbb{R}}$ będzie liczbą nierównoważnych (nietrywialnych) reprezentacji nieprzywiedlnych algebry $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$. Wówczas prawdziwe są równości

$$\nu_{p,q}^{\mathbb{R}} = \begin{cases} 2, & \text{gdy } q - p = 3 \pmod{4}, \\ 1 & \text{w p.p.} \end{cases},$$

a ponadto ilekroć izotyp $\mathbb{R}$ -algebry $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ przedstawiony w Tablicy 11-12.1 jest postaci

$$\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \cong R(2^n) \quad \text{lub} \quad \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \cong R(2^n) \oplus R(2^n),$$

to spełnione są relacje (te same dla obu reprezentacji nierównoważnych w przypadku $q - p = 3 \pmod{4}$)

$$d_{p,q}^{\mathbb{R}} = 2^{n+q_{\mathbb{R}}}, \quad \mathfrak{C}_{p,q}^{\mathbb{R}} \cong R.$$

Dowód: Na podstawie Tw. 11-12.5 i Stw.5-6.3 wnioskujemy, że algebra $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ jest albo półprosta (w przypadku $q - p = 3 \pmod{4}$), albo prosta (w przeciwnym przypadku), co w świetle Stw.6 i Tw.2 prowadzi do postulowanego wzoru na $d_{p,q}^{\mathbb{R}}$ oraz – po uwzględnieniu punktu (i) Stw. 11 – wzoru na $\nu_{p,q}^{\mathbb{R}}$. Typ reprezentacji nieprzywiedlnych (każdorazowo jest to R) ustala Stw. 7. $\square$

W przypadku algebr zespolonych mamy analogiczne

Twierdzenie 4 (Klasyfikacyjne dla reprezentacji nieprzywiedlnych $/\mathbb{C}$). Przyjmijmy zapis dotychczasowy i wprowadźmy – dla dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \text{Cl}_n^{\mathbb{C}} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ – oznaczenia

$$d_n^{\mathbb{C}}(\rho) := \dim_{\mathbb{C}} V, \quad \mathfrak{C}_n^{\mathbb{C}}(\rho) := C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(V)}(\rho(\text{Cl}_n^{\mathbb{C}})).$$

Wreszcie też niechaj $\nu_n^{\mathbb{C}}$ będzie liczbą nierównoważnych (nietrywialnych) reprezentacji nieprzywiedlnych algebry $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$. Wówczas prawdziwe są równości

$$\nu_n^{\mathbb{C}} = \begin{cases} 2, & \text{gdy } n \in 2\mathbb{N} + 1 \\ 1 & \text{w p.p.} \end{cases},$$

a ponadto spełnione są relacje (te same dla obu reprezentacji nierównoważnych w przypadku $n \in 2\mathbb{N} + 1$)

$$d_n^{\mathbb{C}} = 2^{E(\frac{n}{2})}, \quad \mathfrak{C}_n^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C},$$

tj. – w szczególności – wszystkie rozważane reprezentacje są zespolone.

Dowód: Tezy Tw. 11-12.9 i Stw. 5-6.3 przesądają o tym, że algebra $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$ jest albo prosta (w przypadku $n \in 2\mathbb{N}$), albo półprosta (w przypadku $n \in 2\mathbb{N} + 1$), co pozwala uzyskać postulowany wzór na $d_{p,q}^{\mathbb{R}}$ oraz – po uwzględnieniu punktu (ii) Stw. 11 – wzór na $\nu_{p,q}^{\mathbb{R}}$ na gruncie Stw. 6 i Tw. 2. Zespolony typ reprezentacji nieprzywiedlnych wyznacza teza Stw. 7. $\square$

Ostatnie dwa twierdzenia wyczerpują zagadnienie klasyfikacji nieprzywiedlnych reprezentacji algebr Clifforda $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ i $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$. Zanim jednak zamknijemy ten rozdział naszych dociekań, zatrzymamy się nad pewną szczególną własnością strukturalną rozpatrywanych przez nas reprezentacji, która odegra istotną rolę w dyskusji reprezentacji spinorowych w dalszej części kursu. Oto więc mamy

Stwierdzenie 12. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnych liczb $(p, q) \in \mathbb{N}^{\times 2} \setminus \{(0, 0)\}$ spełniających warunek $q - p = 0 \pmod{4}$ i dowolnej liczby $n \in 2\mathbb{N} \setminus \{0\}$ zachodzi, co następuje:

- (i) nośnik V dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ma rozkład

$$V = V_+ \oplus V_-, \quad V_{\pm} := \rho(P_{\omega_{\mathbb{R}}^{\pm}})(V)$$

na podprzestrzenie własne endomorfizmu $\rho(\omega_{\mathbb{R}})$ stowarzyszone z wartościami własnymi ± 1 , przy czym dowolny wektor $v \in \mathbb{R}^{\times p+q}$ o własności $\delta_E^{(p,q)}(v) \neq 0$ zadaje izomorfizm

$$v_{\pm} := \rho \circ J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v) \upharpoonright_{V_{\pm}} : V^{\pm} \xrightarrow{\cong} V^{\mp},$$

a nadto podprzestrzenie $V_{\pm}$ są zachowywane przez podalgebrę $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}$, której reprezentacje indukowane tym sposobem na $V_{\pm}$ są nieprzywiedlne i spełniają relację

$$\rho(\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}) \upharpoonright_{V_{\pm}} \sim \rho_{\pm 1}^{p,q-1}(\text{Cl}_{p,q-1}^{\mathbb{R}}),$$

jeśli $q \geq 1$, lub

$$\rho(\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}) \upharpoonright_{V_{\pm}} \sim \rho_{\pm 1}^{p-1,q}(\text{Cl}_{p-1,q}^{\mathbb{R}}),$$

jeśli $p \geq 1$;

- (ii) nośnik V dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \text{Cl}_n^{\mathbb{C}} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ma rozkład

$$V = V_+ \oplus V_-, \quad V_{\pm} := \rho(P_{\omega_{\mathbb{C}}^{\pm}})(V)$$

na podprzestrzenie własne endomorfizmu $\rho(\omega_{\mathbb{C}})$ stowarzyszone z wartościami własnymi ± 1 , przy czym dowolny wektor $v \in \mathbb{C}^{\times n}$ o własności $\delta_E^{(n)}(v) \neq 0$ zadaje izomorfizm

$$v_{\pm} := \rho \circ J_{\mathbb{C}^{\times n}}(v) \upharpoonright_{V_{\pm}} : V^{\pm} \xrightarrow{\cong} V^{\mp},$$

a nadto podprzestrzenie $V_{\pm}$ są zachowywane przez podalgebrę $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}0}$, której reprezentacje indukowane tym sposobem na $V_{\pm}$ są nieprzywiedlne i spełniają relację

$$\rho(\text{Cl}_n^{\mathbb{C}0})|_{V_{\pm}} \sim \rho_{\pm 1}^{n-1}(\text{Cl}_{n-1}^{\mathbb{C}}).$$

Dowód: Zajmiemy się punktem (i) tezy stwierdzenia – punkt (ii) jest dowodzony w pełni analogicznie. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że $q \geq 1$, w przeciwnym wypadku zachodzi $p \geq 1$ i dowód przebiega podobnie. Przywoławszy (pierwszą część) Stw.11-12.2, konstatujemy istnienie rozkładu prostego V , o którym mowa w stwierdzeniu, dla dowolnej pary (p, q) spełniającej warunek $(p+q+1)(p+q) - 2p \in 4\mathbb{N}$, zatem w szczególności dla par związanych warunkiem $q-p=0 \pmod{4}$. O tym, że odwzorowania $\mathbb{R}$ -liniowe $v_{\pm}$ są poprawnie określone, przekonuje bezpośredni rachunek:

$$v_{\pm} \circ \rho(P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\pm}) \equiv \rho(j_{\mathbb{R} \times p+q}(v) \cdot P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\pm}) = \rho(P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\mp} \cdot j_{\mathbb{R} \times p+q}(v)) = \rho(P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\mp}) \circ v_{\pm},$$

znajdujący uzasadnienie w antycentralności $\omega_{\mathbb{R}}$, wynikającej z $p+q \in 2\mathbb{N}$. Bijektywność $v_{\pm}$ wynika wprost z tożsamości

$$v_{\pm} \circ v_{\mp} = \rho(j_{\mathbb{R} \times p+q}(v)^2) = \rho(\delta_{\mathbb{E}}^{(p,q)}(v) \triangleright e^{\mathbb{C}}) = \delta_{\mathbb{E}}^{(p,q)}(v) \triangleright \text{id}_{V_{\mp}},$$

w połączeniu z założeniem o nieizotropowości v . Wreszcie też niezmienniczość $V_{\pm}$ względem $\rho(\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0})$ jest następstwem relacji przemienności

$$\forall_{\gamma \in \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}} : \omega_{\mathbb{R}} \cdot \gamma = \gamma \cdot \omega_{\mathbb{R}},$$

które są implikowane przez wzmiankowaną wcześniej antycentralność $\omega_{\mathbb{R}}$. Na tym etapie pozostaje wykazać nieprzywiedlność reprezentacji $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}$ indukowanych – poprzez ograniczenie – na $V_{\pm}$ oraz istnienie równoważności reprezentacji

$$\rho(\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0})|_{V_{\pm}} \sim \rho_{\pm 1}(\text{Cl}_{p,q-1}^{\mathbb{R}}).$$

W ramach dowodu pierwszej części tezy poprzez *reductio ad absurdum* przyjmijmy, że istnieje nietrywialna podprzestrzeń $\rho(\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0})$ -niezmiennicza $W \not\subset V_+$ (dowód dla $W \subset V_-$ przebiega analogicznie), a następnie rozważmy jej obrazy względem odwzorowań $\mathbb{R}$ -liniowych $\sigma_i \equiv \rho \circ j_{\mathbb{R}^{p+q}}^{\mathbb{C}}(e_i)$ określonych dla dowolnej bazy (pseudo)ortonormalnej $\{e_i\}_{i \in \overline{1, p+q}}$ w $\mathbb{R}^{p,q}$, tj. podprzestrzenie $\sigma_i(W) \subset V_-$ (wszak e_i są nieizotropowe). Bez trudu przekonujemy się o ρ -niezmienniczości sumy algebraicznej podprzestrzeni $\widehat{W} \equiv W + \sum_{i=1}^{p+q} \sigma_i(W) \not\subset V_+ \oplus V_- \equiv V$, oto bowiem dla (nietrywialnych) generatorów $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ zachodzi

$$\begin{aligned} \sigma_j(\widehat{W}) &= \sigma_j(W) + \sum_{i=1}^{p+q} \sigma_j \circ \sigma_i(W) = \sigma_j(W) + \sum_{i=1}^{p+q} \rho(j_{\mathbb{R}^{p+q}}^{\mathbb{C}}(e_j) \cdot j_{\mathbb{R}^{p+q}}^{\mathbb{C}}(e_i))(W) \\ &\subset \sum_{i=1}^{p+q} \sigma_i(W) + \rho(\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0})(W) \subset \sum_{i=1}^{p+q} \sigma_i(W) + W \equiv \widehat{W}. \end{aligned}$$

Wobec powyższego $\widehat{W}$ jawi się jako nietrywialna podprzestrzeń ρ -niezmiennicza, co jest sprzeczne z założeniem o nieprzywiedlności ρ .

W celu wykazania słuszności drugiej części tezy wykorzystamy treść i dowód Stw.11-12.3, na podstawie których otrzymujemy – oznaczwszy na potrzeby poniższego rachunku element objętości algebry $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ symbolem $\omega_{\mathbb{R}}^{p,q}$ –

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(\omega_{\mathbb{R}}^{p,q-1}) &= e_1 \cdot e_{p+q} \cdot e_2 \cdot e_{p+q} \cdots e_{p+q-1} \cdot e_{p+q} = (-1)^{\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}} e_1 \cdot e_2 \cdots e_{p+q-1} \cdot e_{p+q} \cdot e_{p+q}^{p+q-2} \\ &\equiv (-1)^{\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}} \omega_{\mathbb{R}}^{p,q} \cdot (e_{p+q}^2)^{\frac{p+q-1}{2}} = (-1)^{\frac{(p+q-1)(p+q-2)+p+q}{2}} \omega_{\mathbb{R}}^{p,q} \\ &\equiv (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-2)}{2}} \omega_{\mathbb{R}}^{p,q}, \end{aligned}$$

i ostatecznie – wobec założeń poczynionych w odniesieniu do (p, q) –

$$\widetilde{\varphi}(\omega_{\mathbb{R}}^{p,q-1}) = \omega_{\mathbb{R}}^{p,q},$$

stąd zaś

$$\rho \circ \tilde{\varphi}(\omega_{\mathbb{R}}^{p,q-1})|_{V_{\pm}} = \rho(\omega_{\mathbb{R}}^{p,q})|_{V_{\pm}} \equiv \pm \text{id}_{V_{\pm}} .$$

Równość $(q-1)-p = 3 \pmod{4k}$ pozwala nam następnie sięgnąć do Stw. 11-12.2, które w połączeniu z udowodnionym na początku tego rozdziału Stw. 11 doprowadza nas do pożądanej konkluzji. $\square$