

GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA

VIII : IX

15/4 : 22/4

POLA WEKTOROWE I PŁYCHY
W WYMIARZE PONAD-LOKALNYM
I WYNIĘDZONE W TYM OBRAZIE

RÓŻNICZKOWANIE

GEOMETRYCZNE

POL TENZOROWYCH

2025/26

C3B5c VIII

UPRZEDNIO ROZWAŻAŁIŚMY ODPowiedniość

$$\mathcal{P}_m \ni [\gamma]_{\sim_m} \xleftrightarrow{1:1} D(\kappa \circ \gamma)(0) \in \mathbb{R}^{\times \dim M},$$

$\downarrow$
 $\gamma, \gamma(0) = m \in M$

WIDZIĄC ŻE KAŻDĄ KRZYWĄ PRZEZ $m = \gamma(0)$ STOWARZYSZA WEKTOR STYCJNY W TYM PUNKCIE. POJAWIA SIĘ NATURALNE PYTANIE: JAK W TYM OBRAZIE OPISAĆ OBIEKT GLOBALNY, JAKIM JEST POLE WEKTOROWE?

Def. 21. KRZYWA CAŁKOWA POŁA WEKTOROWEGO $\forall \Gamma(TM)$
 TO ODPOWIEDZ $\gamma: I \in \frac{C^1}{J(\mathbb{R})} \rightarrow M, t \mapsto \gamma(t)$ (150)

o własności $\forall t \in I: (\dot{\gamma}(t) :=) T_t \gamma(\partial_t) = V(\gamma(t))$.

zakładając założonym, że $I \ni 0$ i wtedy punkt $\gamma(0)$ nazywamy punktem początkowym γ .

z. 8.1 Rozważmy pole wektorowe na $\mathbb{R}^2$ dane wzorem

$V(x, y) = x \partial_y - y \partial_x$, dla którego powyższe równanie

przyjmuje postać $\frac{dx}{dt}(t) \partial_x + \frac{dy}{dt}(t) \partial_y = x(t) \partial_x - y(t) \partial_y$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t)$, więc też ma rozwiązanie

(151)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \exp(tA) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0).$$

WYJNAGZAMY $\operatorname{Sp} A = \{+i, -i\}$, A JATEM DLA

$$C^\omega(\mathbb{C}) \ni f_t : \mathbb{C} \ni z \mapsto e^{tz}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(1-PARAM. RODZINA FUNKCJI)

JEST

$$f_t = \underbrace{\sigma_t}_{C^\omega(\mathbb{C})} \cdot \underbrace{w_A}_{\text{WIELOMIAN CHAR. } A} + \underbrace{\varrho_t}_{\text{WIELOMIAN INTERPOLACY}}, \quad \deg \varrho_t < \deg w_A = 2$$

$$\varrho_t = \alpha_t x + \beta_t$$

i DLAJ

$$\begin{cases} e^{it} \equiv f_t(i) = \alpha_t \cdot i + \beta_t \\ e^{-it} \equiv f_t(-i) = -\alpha_t \cdot i + \beta_t \end{cases}, \quad \text{czyli}$$

$$\beta_t = \cos t, \alpha_t = \sin t, \text{przekształć } \exp(tA) = \sin t \circ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \cos t \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

~~DOSTAJEMY~~

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} x(0) \sin t - y(0) \cos t \\ x(0) \cos t + y(0) \sin t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1^\circ (x(0), y(0)) = (0, 0) \Rightarrow \gamma(t) = (0, 0) \\ \text{KRZYWA} \\ \text{STOJĄCA} \\ 2^\circ (x(0), y(0)) \neq (0, 0) \Rightarrow \gamma(\mathbb{R}) \cong \mathbb{S}^1 \end{matrix}$$

Uogólnienie: To przejście do dziedzin lokalnej mapy

$\kappa = (x^\mu) : \mathcal{O} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{\dim M}$ | DOSTAJEMY PREZENTACJĘ
WSPÓŁRZĘDNIOWĄ RÓWNAŃ
KRZYWEJ CALKOWEJ = UKŁAD
RÓWNAŃ ZWIĄZANYCH:

$$\frac{d(x^\mu \circ \gamma)}{dt}(t) = (V^\mu \circ \kappa^{-1})(x^\mu \circ \gamma(t)), \mu \in \overline{1, \dim M}; \gamma(0) = m \quad (153)$$

NAR. 2023.

NAMY FUNDAMENTALNE (TUTAJ CYTOWANE BEZ DOWODU)

TW. 11. NIECHAY $U \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{x_n})$; $V : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^{x_n}$.

ROZWAŻAMY ZAGADNIENIE POBYTUOWE

$$\text{IVP}_{\Gamma \times U}(x^\mu) \begin{cases} \dot{x}^\mu(t) = V^\mu(x^\mu(t)) , \mu \in \overline{1, n} \\ x^\mu(t_0) = c^\mu \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{NA} \quad \begin{matrix} \swarrow \text{Dow. uistalone} \\ \overline{I} \ni t_0, t \\ \uparrow \\ \mathcal{J}(\mathbb{R}) \end{matrix}$$

WÓWOCAS

$$\textcircled{\exists} \quad \forall t_0 \in \overline{I}, c = (c^\mu) \in U \quad \exists \quad \begin{matrix} \overline{I}_0 \subseteq \overline{I} \\ \downarrow \psi_{t_0} \end{matrix}, \begin{matrix} U_0 \subseteq U \\ \downarrow \psi_c \end{matrix} : \exists (x^\mu) \in C^1(\overline{I}_0, U) \quad \text{IVP}_{\overline{I}_0 \times U_0}(x^\mu) = 0$$

$$\textcircled{!} \quad \forall (x^\mu), (y^\mu) : \text{IVP}_{\overline{I}_0 \times U_0}(x^\mu) = 0 = \text{IVP}_{\overline{I}_0' \times U_0'}(y^\mu) :$$

$$(x^\mu)|_{\overline{I}_0' \cap \overline{I}_0 \times U_0' \cap U_0} = (y^\mu)|_{\overline{I}_0' \cap \overline{I}_0 \times U_0' \cap U_0}.$$

C^∞ ODWZOBOWANIE $\mathbb{E}_V : I_0 \times U_0 \rightarrow \mathcal{U}, (t, c) \mapsto \mathbb{E}_V(t, c)$
 NALEŻY DO $C^\infty(I_0 \times U_0, \mathcal{U})$.

(D: PROSTA ANALIZA BANACHOWSKA.)

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & (x^\mu(t)) \\ & x^\mu(t_0) = c^\mu \end{aligned}$$

Cor. 3. NIECHAJ $V \in \Gamma(TM)$. $\forall m \in M \exists \varepsilon_m > 0, \gamma \in C^\infty([-\varepsilon_m, \varepsilon_m], M)$:
 γ JEST JEDYNĄ KRZYWĄ CAŁKOWĄ V PRZEZ $m = \gamma(0)$.

ZACHOWANIE KRZYWYCH CAŁKOWYCH WGLĘDEM AFINICZNYCH
 TRANSFORMACJI DIERZINY (NAD-) $\mathbb{R} \ni t$ USTALA...

Skw. 22. NIECHAJ $V \in \Gamma(TM)$, $I \subset \mathbb{R}$ ODCINEK, $\gamma: I \rightarrow M$ KRZYWA
 CAŁKOWA V PRZEZ $\gamma(0)$.

DYNAMY $\tilde{I}_a := \{t \in \mathbb{R} \mid at \in I\}, a \in \mathbb{R}$

$\check{I}_b := \{t \in \mathbb{R} \mid t+b \in I\}, b \in \mathbb{R}$

WOWCZAS $\forall a \in \mathbb{R} : \tilde{\gamma}_a : \tilde{I}_a \rightarrow M, t \mapsto \gamma(at) =: \tilde{\gamma}_a(t)$
jest krzywą całową $\Rightarrow \forall$ przel. $\gamma(0)$

$\forall b \in \mathbb{R} : \check{\gamma}_b : \check{I}_b \rightarrow M, t \mapsto \gamma(t+b) =: \check{\gamma}_b(t)$
jest krzywą całową $\vee$ przel. $\gamma(b)$

D: TOWIALNY. (SPRAWDZAMY DZIAŁANIE $\dot{\tilde{\gamma}}_a(t_0)$ WZGL. $\dot{\check{\gamma}}_b(t_0)$
NA $C^\infty(M, \mathbb{R})$ DLA $t_0 \in \tilde{I}_a$ WZGL. $\in \check{I}_b$ I PORÓWNUJEMY
Z DZIAŁANIEM $\Rightarrow \gamma$ WZGL. $\vee$.)

DUŻO CIEKAWSZY JEST ICH NATURALNY TRANSPORT WZDŁUŻ ODWZROBIONYCH
 GEODETYCZNYCH:

Sw.23. NIECHAJ $M_1, M_2 \in \text{Man}^\infty$ I NIECH $f \in C^\infty(M_1, M_2)$.

$$\forall (V, W) \in \Gamma(TM_1) \times \Gamma(TM_2)$$

(V, W) W f -RELACJI $\iff f$ PRZEPROWADZA KRZYWĄ CIĄGŁOŚĆ V
 W KRZYWĄ CIĄGŁOŚĆ W ,

TJ. $\forall \gamma \in C^\infty(J-\varepsilon, \varepsilon[, M_1)$ KRZYWA CIĄGŁOŚĆ $V : f \circ \gamma \in C^\infty(J-\varepsilon, \varepsilon[, M_2)$ KRZYWA
 CIĄGŁOŚĆ W .

D: $\Leftrightarrow$ DLA KĄŻDEJ CIĄGŁOŚCI $\gamma: I \rightarrow M_1$, POŁA V MĄCZYMY

$$\overset{\kappa_2 \circ}{(f \circ \gamma)'}(t) \equiv T_t(f \circ \gamma)(\partial_t) = T_{\gamma(t)}^{\kappa_2} f \circ \overset{\circ \kappa_1}{T_t} \gamma(\partial_t) \overset{\gamma}{=} T_{\gamma(t)} f(V(\gamma(t)))$$

f -RELACJA $\hookrightarrow W(f(\gamma(t))) \equiv W((f \circ \gamma)(t))$, TJ. $f \circ \gamma$ JEST KRZYWĄ CIĄGŁOŚCIĄ. (157)

$\Leftarrow$ PRZĘDZ DOWOLN PUNKT $m \in M_1$, PRZECIĄDZI KRZYWA CAŁKOWA $\gamma_m:]-\varepsilon_m, \varepsilon_m[\rightarrow M_1$
 ZOLA V_1 A WTEDY - WPROST NA MOCZ ZAŁOŻENIA - $f \circ \gamma_m:]-\varepsilon_m, \varepsilon_m[\rightarrow M_2$
 JEST KRZYWA CAŁKOWA, W PRZĘDZ $(f \circ \gamma_m)'(0) = f'(m)$. JEST ZATEM
 $dV(f(m)) = (f \circ \gamma_m)'(0) = T_{\gamma_m(0)} f(\dot{\gamma}_m(0)) = T_m f(V(\dot{\gamma}_m(0)))$
 $= T_m f(V(m))$, CZYLI (V, W) SĄ W f -RELACJI. $\square$

W NASTĘPNEJ KOLEJNOŚCI SPOJRZYM NA ZAGADNIENIE CAŁKOWANIA
 ZOLA WEKTOROWEGO „Z LOTU PIŁKI”. DLA WIĘKSZEJ PRZEJRYWALNOŚCI
 PODWAJAM WYRAŻANIA, KTÓRE NAM INTUICYJNIE ZAŁOŻYMY NAJPIERW, JE

$$\forall m \in M, t \in \mathbb{R} \exists \gamma(t) \in M, \gamma(0) = m.$$

STOWARZYSZYWSZY Z DOWOLNYM $m \in M$ ODNOŚNĄ KRZYWA CAŁKOWĄ (158)

$\gamma_m : \mathbb{R} \rightarrow M$ o własnościach $\gamma_m(0) = m$ i $\dot{\gamma}_m(t) = V(\gamma_m(t))$,
 DEFINIOWANY ODWZOROWANIE

$$\Phi_V(i; j) := \gamma_j(\cdot - i) : \mathbb{R} \times M \rightarrow M, (t, m) \mapsto \gamma_m(t) = \Phi_V(t; j_m)$$

które w świetle Tw. 2.2 spełnia własności

$$\Phi_V(t+s; j_m) = \Phi_V(t; \Phi_V(s; j_m))$$

(oraz - oczywiście - $\Phi_V(0; j_m) = m$). To nas prowadzi do

Def. 2.2 POTOK GLOBALNY NA M ($\equiv$ 1-PARAMETROWA
 RODZINA DIFEOMORFIZMÓW $M \equiv$ DZIAŁANIE CIĄGŁE GRUPY $\mathbb{R}$ NA M)

TO ODWZOROWANIE $\lambda : \mathbb{R} \times M \xrightarrow{C^1} M, (t, m) \mapsto \lambda_t(m)$ (159)

O własnościach $\lambda_{t+s} = \lambda_t \circ \lambda_s$ i $\lambda_0 = \text{id}_M$

(homomorfizm $\lambda_\cdot : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}^1(M, M)$).

ORBITA punktu $m \in M$ w потоку λ to używa ciągła

$$[m]_\lambda = \{ \lambda_t(m) \mid t \in \mathbb{R} \}.$$

rozciągającego!

INFINITEZYMALNY GENERATOR potoku ^{V} ($\equiv$ pole fundamentalne λ)

to ciągłe pole wektorowe $V_\lambda : M \rightarrow TM, m \mapsto \lambda_\cdot(m)'(t=0)$

Tw. 24. INFINITEZYMALNY GENERATOR dowolnego gładkiego potoku gładkiego na M jest gładkim polem wektorowym także, a jego orbity są używkami całkowymi tego pola.

D: W ŚWIEŁE Łw.17. WYSTARZY UPRAWNIĆ SIĘ, ŻE DLA DOWOLNEJ $f \in C^\infty(\Theta, \mathbb{R})$ NA DOWOLNYM OTOCZENIU WSPÓŁRZĘDNIOWYM $\partial \in J(M)$ ZACHODZI $V_\lambda|_\partial f \in C^\infty(\Theta, \mathbb{R})$. OBUŻAMY – W $m \in \partial$ –

$$\begin{aligned} (V_\lambda|_\partial f)(m) &\equiv V_\lambda(m)(f) \equiv \lambda.(m)'(0)(f) \equiv \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \lambda.(m)) \\ &\equiv \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{(t,m)=(0,m)} (f \circ \lambda) \left(\equiv D_1(f \circ \lambda)(0,m) \right), \end{aligned}$$

$\begin{matrix} \text{oraz } \circ \kappa^{-1} \circ \kappa & \kappa: \partial \rightarrow U \subset \mathbb{R}^{n \times 0} \\ D = d\kappa|_M \end{matrix}$

AKI $f \in C^\infty(\Theta, \mathbb{R})$ I $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R} \times M, M)$, ZATEM POCODNA CZĄSTKOWA $D_1(f \circ \lambda)(0, \cdot) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ▣

POZOSTAJE PRZECONAĆ SIĘ, ŻE $\lambda.(m)$ JEST KRZYWA CIECOWA V_λ PRZĘZ $m \dots$

Tj. $\exists \lambda. (m)'(t) = V_\lambda(\lambda_t(m)) \quad \forall (t, m) \in \mathbb{R} \times M.$

OZNACZMY $m_0 := \lambda_{t_0}(m)$ DLA DOWOLNEGO $t_0 \in \mathbb{R}.$

NAMY POŁĄCZĄC $\lambda. (m)'(t_0) = V_\lambda(m_0)$, ALE $\lambda_t(m_0) = \lambda_t(\lambda_{t_0}(m)) = \lambda_{t+t_0}(m)$,
JATEM DLA DOWOLNEJ $f \in C^\infty(\Theta_{m_0}, \mathbb{R})$ NA PRAWYM ODCIECIU $\mathcal{O}_{m_0}$
DOSTAJEMY

$$\begin{aligned} V_\lambda(m_0)(f) &\equiv \lambda. (m_0)'(0)(f) \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \lambda)(\cdot, m_0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \lambda)(\cdot + t_0, m) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (f \circ \lambda)(\cdot, m) \equiv \lambda. (m)'(t_0)(f). \quad \square \end{aligned}$$

PROBLEM: W OBYDŁOŚCI POWIJSZY MECHANIZM DZIAŁA W JEDNĄ
STRONĘ, A POLA WEKTOROWE NIE GENERUJĄ PÓŁKÓW
GLOBALNYCH...

KONTROLNYK: $V(x,y) = x^2 \partial_x$ NA $\mathbb{R}^2$ MA KRZYWĄ CAŁKOWĄ WYCHODZĄCĄ Z $(1,0)$ W POSTACI $\gamma(t) = \left(\frac{1}{1-t}, 0\right)$. STWIERDZAMY OSOBNOŚĆ POTOKU W $t=1$.

LOKALNIE WSKAZUJE „FIZYCZNO GRA”...

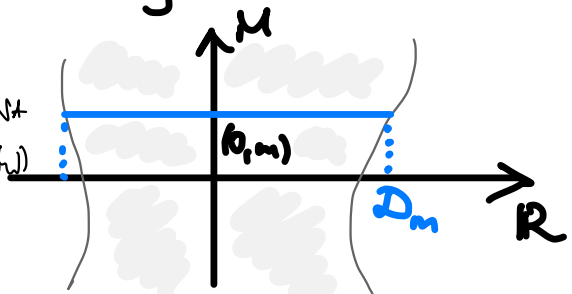
Def. 23. DZIEDZINA POTOKU NA M TO PODZBIÓR OTWARTY

$$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M \text{ O WŁAŚNOŚCI}$$

$\forall m \in M : \mathcal{D}_m := \{t \in \mathbb{R} \mid (t, m) \in \mathcal{D}\}$ JEST ODCINKIEM OTWARTYM, ZAWIERAJĄCYM 0.

(LOKALNY) POTOK NA M ($\equiv$ LOKALNA 1-PARAMETROWA RODZINA LOKALNYCH HOMEOMORFIZMÓW)

TO UJĄCIE ODPOBOWIADAJĄCE $\lambda : \mathcal{D} \rightarrow M$



SPEŁNIĄCE WARUNKI (P1) $\lambda(0, m) = m \quad \forall m \in M$

(P2) $\forall m \in M, s \in D_m, t \in D_{\lambda_s(m)} :$

$$s+t \in D_m \Rightarrow \lambda_t(\lambda_s(m)) = \lambda(t+s, m).$$

INFINITEZYMALNY GENERATOR POTOKU RÓZNICOWANEGO λ TO

$$M \ni m \longmapsto \lambda.(m)'(0) =: V_\lambda(m) \in T_m M.$$

MAMY OBYWISTĄ ADAPTACJĘ Shw.24. :

Shw.25. INFINITEZYMALNY GENERATOR GŁADKIEGO POTOKU LOKALNEGO

$\lambda: D \rightrightarrows M$ JEST GŁADKIM POLEM WEKTOROWYM NA M

O WZRYWEJ CAŁKOWEJ PRZĘZ $m \in M$ W POSTACI $\lambda.(m)$.

D: PROSTA ADAPTACJA POWODNI Shw.24.

ZACHODZI TĘŻ, CYTOWANE BEZ TOWODU, $\rightarrow$ PATRZ: Lee (ALE NIE BRUCE)

TW. 12. [FUNDAMENTALNE O POTOKACH]

NIECHAY $V \in \Gamma(TM)$. ISTNIĘTŁO OKREŚLONY JEDNOZNACZNIE POTOK
MAKSYMALNY ($\equiv$ NIEPRZEDCIEŻALNY W PARAMETRZE AFINIJNYM t)

$$\lambda : D^{\max} \rightarrow M$$

O GENERATORZE V . MA ON NASTĘPUJĄCE WŁASNOŚCI:

- (1) $\forall m \in M : \lambda_*(m) : D_m^{\max} \rightarrow M$ JEST OKREŚLONY JEDNOZNACZNIE
MAKSYMALNĄ (JK) KRZYWĄ CAŁKOWĄ γ WYCHODZĄCĄ Z m .
- (2) $\forall s \in D_m^{\max} : D_{\lambda_s(m)}^{\max} = \{t - s \mid t \in D_m^{\max}\}$
- (3) $\forall t \in \mathbb{R} : \{m \in M \mid (t, m) \in D^{\max}\} =: M_t$ JEST OTWARTY W M ,
A PRZY TYM $\lambda_t|_{M_t} \in \text{Diff}(M_t, M_{-t})$ i $\lambda_t|_{M_t}^{-1} = \lambda_{-t}|_{M_{-t}}$.

Def. 24. Potok λ , o którym mowa w Tw. 12., nazywamy potokiem generowanym przez V i oznaczamy symbolem $\lambda \equiv \overline{X}_V$.

O NATURALNYM ZACHOWANIU POTOKÓW WZGL. RELACJI
i DIFEOMORFIZMU ORZEKA

Sw. 26. Niechamy $M_1, M_2 \in \text{Man}^\infty$, $f \in C^\infty(M_1, M_2)$ i $V \in \Gamma(TM_1)$, $W \in \Gamma(TM_2)$
 (V, W) są w f -relacji $\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}: f(M_{1t}) \subseteq M_{2t} \wedge \overline{X}_W(t, f(\cdot)) = f \circ \overline{X}_V(t, \cdot)$
 czyli $M_{1t} \xrightarrow{f} M_{2t}$ w szczególności $\forall f \in \text{Diff}^\infty(M_1, M_2) \forall t \in \mathbb{R}$:
 $\overline{X}_V(t, \cdot) \downarrow \quad \downarrow \overline{X}_W(t, \cdot)$ $\overline{X}_{f_* V} = f \circ \overline{X}_V \circ (\text{id}_{\mathbb{R}} \times f^{-1})$ i $M_{2t} = f(M_{1t})$.
 $M_{1-t} \xrightarrow{f} M_{2-t}$ D: Proste ćwiczenie. (166)

C3ESC IX

Polei pól wektorowych pozwalają zdefiniować naturalne, geometryczne różniczkowanie pól wektorowych (i nie tylko) i nadaje sens analityczny komutatorom pól wektorowych...

Pamiętaj
wyjścia: różniczkowanie kierunkowe pól wektorowych na $\mathbb{R}^n$
 $v \in \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{R}^n$

$$D_v V(m) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} V(m+tv) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V(m+tv) - V(m)}{t}$$

$$= D_j V^i(m) \partial_j(m)$$

NIE MA NA ROZMAITOŚCI (ogólnej) sensu niezależnego od wyboru (lokalnych) współrzędnych. źródła kłopotów są dwa:
BRAK STRUKTURY LINIOWEJ NA M ($m+tv$ jest bez sensu)
ORAŻ NIETOŻSAMOŚĆ $T_{m+tv} M \ni V(m+tv)$ i $T_m M \ni V(m) \Rightarrow \neg$ J/W. (167)

PIERWSZY KROK MOŻNA ZNEUTRALIZOWAĆ ZASTĘPUJĄC $m + tv$
 ŚCIEŻKĄ $\gamma :]-\varepsilon_m, \varepsilon_m[\rightarrow M$, $\gamma(0) = m$ O WEKTORZE PRĘDKOŚCI
 $\dot{\gamma}(0) = v$. DRUGI KROK JEST O WIELE POWAŻNIEJSZY...

IDEA: ZASTĘPUJEMY $v \in T_m M$ DOWOLNYM POLEM WEKTOROWYM $W \in \Gamma(TM)$
 O WARTOŚCI $W(m) = v$ I UŻYWAMY Φ_N , AŻEBY „COFNAĆ”
 WEKTOR $V(m_\varepsilon)$ Z POWRÓTEM DO $m = \Phi_N(\varepsilon; m)$, A TAM
 – RÓŻNICZUJEMY JAK WŁEPIE.

Def. 25. POCHODNA LIEGO GŁADKIEGO POLA WEKTOROWEGO
 $Y \in \Gamma(TM)$ WZDŁUŻ GŁADKIEGO POLA WEKTOROWEGO $W \in \Gamma(TM)$
 TO POLE WEKTOROWE $L_W V : M \ni m \mapsto L_W V(m) \in T_m M$ DANE WJOREM
 O ILE (LOŻĄ) ISTNIEJE $\rightarrow L_W V(m) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_{\Phi_N(t; m)} \Phi_N(-t; \cdot)(V(\Phi_N(t; m))) - V(m)}{t}$. (168)

Slw. 27. Niechaj $M \in \text{Man}^\infty$; niech $\gamma, w \in \Gamma(TM)$. Wówczas

$\mathcal{L}_w \gamma$ istnieje i jest gładkie.

D: Niech $\Theta_m \in \mathcal{J}(M)$ będzie otoczeniem współrzędniowym punktu $m \in M$, t.j. mamy $\kappa = (x^\mu) : \Theta_m \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_m \subset \mathbb{R}^{x_n}$, $n = \dim M$.

Niech też $\tilde{I} \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym, a $\tilde{\mathcal{O}} \subset \Theta_m$ takim otoczeniem m , dla którego $\tilde{I} \times \tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{D}_w^{max, m}$, przy czym

$$\mathcal{L}_w|_{\tilde{I} \times \tilde{\mathcal{O}}} : \tilde{I} \times \tilde{\mathcal{O}} \longrightarrow M \quad (\text{t.j. } \forall (t, x) \in \tilde{I} \times \tilde{\mathcal{O}} : \mathcal{L}_w(t, x) \in \Theta_m),$$

$$\searrow \quad \nearrow$$

$$\quad \quad \quad \Theta_m$$

A wtedy jest dobrze określona prezentacja współrzędniowa

$$\kappa \circ \mathcal{L}_w|_{\tilde{I} \times \tilde{\mathcal{O}}} = (x^\mu \circ \mathcal{L}_w)|_{\tilde{I} \times \tilde{\mathcal{O}}} =: (\phi_w^\mu) : \tilde{I} \times \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{U}_m \subset \mathbb{R}^{x_n},$$

WŁĘC TEŻ - DLA $(t, x) \in \tilde{L} \times \tilde{O}$ - W TEŻ

$$T_x K \left(T_{\Phi_N(t; x)} \Phi_N(-t; \cdot) \right) \circ T_{K \circ \Phi_N(t; x)} K^{-1} = \left(\frac{\partial \Phi^\mu}{\partial x^\nu} (-t, \Phi_N(t; x)) \right),$$

ZATEM

$$T_{\Phi_N(t; x)} \Phi_N(-t; \cdot) \left(V(\Phi_N(t; x)) \right) = \frac{\partial \Phi^\mu}{\partial x^\nu} (-t, \Phi_N(t; x)) V^\nu(\Phi_N(t; x)) \partial_\mu(x),$$

* PONIEWAŻ FUNKCYJNALNE WSPÓŁCZYNNIKI ROZKŁADU W BAZIS ∂_μ
SĄ TUTAJ CIĄGŁYMI FUNKCYJAMI t I x , PRZEPO RÓŻNICZĄCZĄ JAKOŚĆ
PO ZDYSKRYWOWANIU W WIERZNIKU t (I POŁOŻENIU $t=0$)
W SUPERMACE $\mathbb{R}^{x,1}$. $\square$

ZNIAJĘC ZNALEZIONEGO TU NATURALNEGO, GEOMETRYCZNEGO RÓŻNICZKOWANIA
POL WECTOROWICH Z NAPOTKANĄ WŻĘŚNĄ STRUKTURĄ ALGEBROIDALNĄ (70)
USTALA...

Tw. 13. Niechaj $M \in \text{Man}^\infty$; $\gamma, \eta \in \Gamma(TM)$ wówczas

$$\mathcal{L}_\eta \gamma \equiv [\eta, \gamma]_{TM}.$$

D: Rozłożymy M na

$$\text{Reg}(\eta) := \{m \in M \mid \eta(m) \neq 0_{T_m M}\} \quad \left(\in \mathcal{I}(M), \text{ bo } \begin{array}{l} \text{warunek } \neq 0 \\ \text{test otwartý} \end{array} \right),$$

$$\text{supp } \eta = \overline{\text{Reg}(\eta)} \quad (\text{domknięty, z definicji})$$

$$\text{oraz } M \setminus \text{supp } \eta \in \mathcal{I}(M).$$

$\circ m \in \text{Reg}(\eta)$. Niech $\Theta_m \ni m$ będzie otoczeniem współzbieżnym,
z mapą $\kappa: \Theta_m \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_m \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$, a wtedy – na podstawie
udowodnionego na ćwiczeniach (71)

Lemat 4. [O PROSTOWANIU POLA]

$\forall m \in \text{Reg}(W) \exists k=(x^k) : \underset{\substack{\text{LOKALNA} \\ \text{MAPA}}}{\mathcal{O}_m} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_m \subset \mathbb{R}^m : \mathcal{W}|_{\mathcal{O}_m} = \frac{\partial}{\partial x^1} \cdot -$

ZNAJDUJEMY — DLA DOSTATECZNIE MAŁEGO $t \in \mathbb{R}$ ORAZ $x \in \mathcal{O}_m$ —

$k \circ \Phi_W(-t; y) = (x^1(y) - t, x^2(y), \dots, x^n(y))$, MÓŻE TEŻ

$$T_{\Phi_W(t; y)} \underset{= \text{id}_T}{\Phi_W(-t; \cdot)} (V(\Phi_W(t; y))) = V^\mu(x^1(y) + t, x^2(y), \dots, x^n(y)) \partial_\mu(y),$$

A ZATEM
$$\mathcal{L}_W V(y) = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^1}(x^1(y), \dots, x^n(y)) \partial_\mu(y) \equiv [\mathcal{W}, V]_{TM}(y),$$

POZY CZYM OSTATNIA RÓWNOŚĆ WYNIKA WPROST Z FORMUŁY (*)

ZE §2.140. 

(172)

2° $m \in \text{supp } W$. TEN SAM WYNIK OTRZYMUJEMY PRZÓJ CIĄGŁOŚĆ (WYNIKAJĄCA Z CIĄGŁOŚCI) OBU OBIEKTÓW: $\mathcal{L}_W V : [W, V]_{TM}$ (WSZAK $\text{supp } W$ JEST ZBIOREM PUNKTÓW ZMIENIENIA $\text{Reg}(W)$). $\square$

3° $m \in M \setminus \text{supp } W$. TUTAJ $W(m) \equiv 0$, A PONIEWAŻ $M \setminus \text{supp } W \in \mathcal{I}(M)$,
 POZOSTO $\exists \vartheta_m \in \mathcal{I}(M) : W|_{\vartheta_m} \equiv 0$, CO IMPLIKUJE
 $\mathcal{L}_W(t; \cdot)|_{\vartheta_m} \equiv \text{id}_{\vartheta_m} \quad \forall t \in \mathbb{R}$, CZYLI TEŻ
 $\tau_{\mathcal{L}_W(t; m)} \mathcal{L}_W(-t; \cdot)(V(\mathcal{L}_W(t; m))) \equiv V(m)$, A JATEM

$\mathcal{L}_W V(m) \equiv 0$, ALE TEŻ $[W, V]_{TM} \equiv 0$,

PATRZ (ZNOWU): FORMUŁA (*) ZE §1.40. $\square$
 TYM SPOSOBEM USTALIMY ANALITYCZNĄ INTERPRETACJĘ STRUKTURY ALGEBRAICZNEJ
 TAKŻE JEST $[i]_{TM}$. 173

NA GRUNCIE DOTYCHCZASOWYCH ROZWAŻAŃ MOŻEMY JACNO SFORMUŁOWAĆ
OPIS DOWOLNYCH PÓŁ TENSOROWYCH NAD ROZMAIŃCĄ M ORAZ
ICH RÓŻNICZKOWANIE GEOMETRYCZNYCH. JACNIEMY OD PRZYPOMNIENIA
MODELU...

IŁOŻYŃ TENSOROWY PRZESTRZENI K -LINIOWYCH V_i , $i \in \overline{1, N}$ TO OBIEKT
UNIWERSALNY (INTEGRALNY) W KATEGORII PAR $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_N, \varphi_V)$ STOJĄCYCH
ZE ZBIORU $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_N$ I ODWZOROWANIA N -ADDYTYWNEGO

$$\varphi_V: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_N \longrightarrow V \in \text{Vect}_K$$

O WŁASNOŚCI $\forall \lambda \in K, \sigma_i \in V_i, i \in \overline{1, N} \quad \forall j \in \overline{1, N-1}$:

$$\varphi_V(\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}, \lambda \sigma_j, \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_N) = \varphi_V(\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma_j, \lambda \sigma_{j+1}, \sigma_{j+2}, \dots, \sigma_N).$$

INNĄMI SŁOWY, JEST TO TAKA PRZESTRZEŃ K -LINIOWA $V_1 \otimes_K V_2 \otimes_K \dots \otimes_K V_N$ (174)

WRAZ Z KANONICZNYM ODWZOROWANIEM POUŻYTEGO TYPU

$$\tau_N: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_N \longrightarrow V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} V_N,$$

KTÓRA W JEDYNY SPOSÓB DOWYKA DO DIAGRAMU PRZEMIANNICZĄCY
(STRZAŁKA PRZEMIANNICZĄCA!) DIAGRAM NASTĘPUJĄCY (w Set)

$$\begin{array}{ccc}
 & \nearrow \varphi_V & V \\
 & \curvearrowright & \uparrow \sim \\
 & & \varphi_V \\
 V_1 \times V_2 \times \dots \times V_N & \xrightarrow{\tau_N} & V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} V_N
 \end{array}
 , \text{ tj. } \varphi_V(v_1 \otimes_{\mathbb{K}} v_2 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} v_N)$$

$$\begin{array}{c}
 \parallel \\
 \varphi_V(v_1, v_2, \dots, v_N),
 \end{array}$$

PRZY CZYM $\tilde{\varphi}_V$ MUSI BYĆ KANONICZNE $\mathbb{K}$ -LINIOWE

WZGLĘDEM KANONICZNEJ STRUKTURY $\mathbb{K}$ -LINIOWEJ NA $V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} V_N$:

$$\mathbb{K} \times V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} V_N \longrightarrow V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} V_N: (\lambda, v_1 \otimes_{\mathbb{K}} v_2 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} v_N) \mapsto (\lambda v_1) \otimes_{\mathbb{K}} v_2 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} v_N \quad (175)$$

(DOWÓD ISTNIENIA FAKT KONSTRUKCYJNY:

grupa wolna zbioru $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_N$

$$V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} V_N \cong \langle V_1 \times V_2 \times \dots \times V_N \rangle_{\mathbb{Z}} / T$$

$$T := \langle (U_1 + W_1) \otimes_{\mathbb{K}} U_2 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} U_N - U_1 \otimes_{\mathbb{K}} U_2 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} U_N - W_1 \otimes_{\mathbb{K}} U_2 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} U_N,$$

$$U_1 \otimes_{\mathbb{K}} (U_2 + W_2) \otimes_{\mathbb{K}} U_3 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} U_N - U_1 \otimes_{\mathbb{K}} U_2 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} U_N - U_1 \otimes_{\mathbb{K}} W_2 \otimes_{\mathbb{K}} U_3 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} U_N,$$

$$\dots, U_1 \otimes_{\mathbb{K}} U_2 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} U_{N-1} \otimes_{\mathbb{K}} (U_N + W_N) - U_1 \otimes_{\mathbb{K}} U_2 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} U_N - U_1 \otimes_{\mathbb{K}} U_2 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} U_{N-1} \otimes_{\mathbb{K}} W_N,$$

$$\lambda \Delta U_1 \otimes_{\mathbb{K}} U_2 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} U_N - U_1 \otimes_{\mathbb{K}} \lambda \Delta U_2 \otimes_{\mathbb{K}} U_3 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} U_N,$$

$$U_1 \otimes_{\mathbb{K}} \lambda \Delta U_2 \otimes_{\mathbb{K}} U_3 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} U_N - U_1 \otimes_{\mathbb{K}} U_2 \otimes_{\mathbb{K}} \lambda \Delta U_3 \otimes_{\mathbb{K}} U_4 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} U_N, \dots,$$

$$U_1 \otimes_{\mathbb{K}} U_2 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} \lambda \Delta U_{N-1} \otimes_{\mathbb{K}} U_N - U_1 \otimes_{\mathbb{K}} U_2 \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} U_{N-1} \otimes_{\mathbb{K}} \lambda \Delta U_N \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

W INTERPRETACJI NAS KONTEKSTU GEOMETRYCZNYM ROZWAŻAMY PŁASZCZYZNĘ
TENZOROWĄ $V = T_m M$ ORAZ $V^* = T_m^* M \dots$ (NAD $\mathbb{R}$)

OTRZYMANIEMY WIAZUJĄ

* TENSOROW KONTRAWARIANTNYCH
STOPNIA K

$$TM^{\otimes k} := \bigcup_{m \in M} T_m M^{\otimes k}_{\mathbb{R}}$$

** TENSOROW KOWARIANTNYCH
STOPNIA L

$$T^*M^{\otimes l} := \bigcup_{m \in M} T^*_m M^{\otimes l}_{\mathbb{R}}$$

*** TENSOROW NIESZANYCH
TYPU (k, l)

$$T^{(k, l)}M := \bigsqcup_{m \in M} T_m M^{\otimes k}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} T^*_m M^{\otimes l}_{\mathbb{R}}$$

PRZY CZYM TOPOLOGIĘ I STRUKTURĘ CIĄGŁĄ (PRAZ STRUKTURĘ WIAZUJĄ WEKTOROWĄ) ZADAJEMY PRZY UŻYCIU ILOCYNDU TENSOROWYCH BILIERGII NAT.

$$[x_1]_{\sim_m \mathbb{R}} \otimes [x_2]_{\sim_m \mathbb{R}} \otimes \dots \otimes [x_k]_{\sim_m \mathbb{R}} \otimes [f_1]_{\sim_m \mathbb{R}} \otimes [f_2]_{\sim_m \mathbb{R}} \otimes \dots \otimes [f_l]_{\sim_m \mathbb{R}} \mapsto$$

$$(D(k \circ x_1)(0) \otimes_{\mathbb{R}} D(k \circ x_2)(0) \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} D(k \circ x_k)(0) \otimes_{\mathbb{R}} D(f_1 \circ \bar{e}^1) \otimes_{\mathbb{R}} D(f_2 \circ \bar{e}^1) \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} D(f_l \circ \bar{e}^1))$$

$\in \mathbb{R}^{n \times n} \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{n \times n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^l$

(77)

RÓWNOWAŻNIE MOJEMY JE ZADAĆ NA GRUNCIE TWIERDZENIA O WSPRZĘGLANIU,
 UŻYWAJĄC ILACYNÓW TENSOROWYCH PROSTYCH POTĘG TENSOROWYCH
 ODPOWIEDNIE POZYSKAĆ: KONTRAWARIANTNYMI $g_{ij} = D(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i(\cdot))$
 I KOWARIANTNYMI $(g_{ij}(\cdot))^{-1}$ DLA $\mathbf{e}_i : \mathcal{D}_i \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^n, n = \dim M$.
 NIE WYMAGA WYJAŚNIENIA TO, JE POZOSTAJĄCE CIĘŻ POWIĄZANYCH
 WIĄZEK SĄ LOKALNIE ROZPINAŁE NA

$$* \quad \partial_{\mu_1} \otimes \partial_{\mu_2} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k}$$

$$** \quad dx^{\mu_1} \otimes dx^{\mu_2} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_k}$$

$$*** \quad \partial_{\mu_1} \otimes \partial_{\mu_2} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\mu_1} \otimes dx^{\mu_2} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_k},$$

A GŁADNIE POLA TENSOROWE ODNOŚNYCH TYPOW, GYLI GŁADNIE
 CIĘŻA GLOBALNE TYCH WIĄZEK, ROZPOZNAJEMY PO TYM, (178)

JE NAYŁA GŁADUŁE WSPÓŁCZYNNIKI FUNKCYJNALNE POJĘTAŁA
W POWIĘŻYCH BAZACH LOCALLNYCH.

NANY TEŻ OQYMAŁE

8w. 28. $\Gamma(T^{(k,l)}M)$ TEST MODUŁEM NAD $C^\infty(M, \mathbb{R})$

, $\forall \zeta \in \Gamma(T^{(k,l)}M)$ ŻADĄŁE ODWZÓROWANIE $(k+l)$ - $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -LINIOWE

$$\tilde{\zeta} : \Gamma(T^{(k,l)}M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

Ł. 8.1 (i) METRYKA $g \in \Gamma(T^*M \otimes^2)$ (O WITALONEJ SYMETRII
, NIEZWYRODNIATA $\forall m \in M$)

(ii) BIWEKTOR POISSONA $\Pi \in \Gamma(TM \otimes^2)$ - SŁOŚNY,
SPĘTANIA $[\Pi, \Pi]_{SN} = 0$, GDZIE $[\cdot, \cdot]_{SN}$ TO TZW. NAWIAS
SŁOUCZENA - NITENHUISA

(iii) POLA ŁADUNKOWE $F \in \Gamma(T^*M \otimes^{\dots} P)$ SŁOŚNE + ...

NA JAKOBYENIE TEJ CZĘŚCI NASZYCH ROZWAŻAŃ WPROWADZIMY NATURALNE
GEOMETRYCZNE RÓZNICZKOWANIA Pól TENSOROWYCH ORAZ Pól WEKTOROWYCH...

Def. 26. Pochodna Liego pola tensorowego $\tau \in \Gamma(T^{(k,l)}M)$ względem pola wektorowego $V \in \Gamma(TM)$ to pole tensorowe

$$\mathcal{L}_V \tau : M \rightarrow \text{Hom} \rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_{\Phi_V(t; \cdot)} \Phi_V(-t; \cdot)^{\otimes k} \otimes \Phi_V(t; \cdot)^{* \otimes l} \tau(\Phi_V(t; \cdot)) - \tau(u)}{t}$$

POZUMIĄC JAK POPIEDNIO, BEZ TRUDU POWODZIMY

Sch. 29. $\forall \tau \in \Gamma(T^{(k,l)}M), \gamma \in \Gamma(TM) : \mathbb{L}_\gamma \tau \in \Gamma(T^{(k,l)}M)$

DODATKOWE PRZYDATNE WŁASNOŚCI POWYŻSZEGO RÓŻNICZKOWANIA (180)

Sol. 30. Niech $M \in \text{Man}^\infty$; $\forall \in \Gamma(TM)$.

$$(1) \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : \mathcal{L}_V f = V(f)$$

$$(2) \forall \tau_a \in \Gamma(T^{(k_a, l_a)} M), a \in \{1, 2\} :$$

$$\mathcal{L}_V(\tau_1 \otimes \tau_2) = (\mathcal{L}_V \tau_1) \otimes \tau_2 + \tau_1 \otimes (\mathcal{L}_V \tau_2)$$

$$(3) \forall \tau \in \Gamma(T^{(k, l)} M) ; \eta_i \in \Gamma(T^* M), i \in \overline{1, k} ; w_j \in \Gamma(TM), j \in \overline{1, l} :$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V(\tau(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, w_1, w_2, \dots, w_l)) &= (\mathcal{L}_V \tau)(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, w_1, w_2, \dots, w_l) \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \tau(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{i-1}, \mathcal{L}_V \eta_i, \eta_{i+1}, \dots, \eta_k, w_1, \dots, w_l) \\ &\quad + \sum_{j=1}^l \tau(\eta_1, \dots, \eta_k, w_1, w_2, \dots, w_{j-1}, \mathcal{L}_V w_j, w_{j+1}, \dots, w_l) \end{aligned}$$

D: Ad (1) $\mathcal{L}_V f(m) \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \Phi_V(\cdot; m))$

$$= T_{\Phi_V(0; m)} f \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi_V(\cdot; m) \right)$$

$$= T_m f(V(m)) \equiv V(f)(m). \quad \square$$

Pozostałym punktom dowodzimy jak w przypadku Tw.13.
 tj. najpierw na $\text{Reg}(V)$, następnie na domknięciu $\overline{\text{Reg}(V) - \text{supp}(V)}$
 a na koniec - na $M \setminus \text{supp}(V)$. $\square$

Prostą a użyteczną konsekwencją (3), (1) oraz Tw.13. jest
 formuła na pochodną tego w ewaluacji:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_V \tau)(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, w_1, w_2, \dots, w_\ell) &= \mathcal{V}(\tau(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, w_1, w_2, \dots, w_\ell)) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^k \tau(\eta_1, \dots, \eta_{i-1}, \mathcal{L}_V \eta_i, \eta_{i+1}, \dots, \eta_k, w_1, \dots, w_\ell) \\
 &\quad - \sum_{j=1}^\ell \tau(\eta_1, \dots, \eta_k, w_1, \dots, w_{j-1}, [\mathcal{V}, w_j]_{TM}, w_{j+1}, \dots, w_\ell)
 \end{aligned}$$

(**)

Corr. 3. $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \forall \gamma \in \Gamma(TM): \mathcal{L}_V(df) = d(\mathcal{L}_V f)$

D:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_V(df)(w) &= \mathcal{V}(df(w)) - df([\mathcal{V}, w]_{TM}) \\
 &\equiv \mathcal{V}(w(f)) - [\mathcal{V}, w]_{TM}(f) = w(\mathcal{V}(f)) \\
 &\equiv w(\mathcal{L}_V f) \equiv d(\mathcal{L}_V f)(w) \quad \square
 \end{aligned}$$

Wobec $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -liniowości $\mathcal{L}_V \tau$ w (***) formułę tę wstawiamy
(i warto) pójść w prezentacji współrzędniowej:

Na $\sigma \xrightarrow[\kappa=(x^\mu)]{\cong} U \subset \mathbb{R}^{*n}$, $n = \dim M$ zachodzi

$$\mathcal{L}_V \tau|_U = (\mathcal{L}_V \tau)_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k} \partial_{\mu_1} \otimes \partial_{\mu_2} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes dx^{\nu_2} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_k},$$

przy czym $(\mathcal{L}_V \tau)_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k} \equiv (\mathcal{L}_V \tau)(dx^{\mu_1}, dx^{\mu_2}, \dots, dx^{\mu_k}, \partial_{\nu_1}, \partial_{\nu_2}, \dots, \partial_{\nu_k})$.

Mamy przede wszystkim - wobec $\mathcal{L}_V dx^{\mu_i} = d(\mathcal{L}_V x^{\mu_i}) = d(V(x^{\mu_i})) = \partial_\nu V^{\mu_i} dx^\nu$
oraz $\mathcal{L}_V \partial_{\nu_j} = [\partial_{\nu_j}, \mathcal{L}_V] = -\partial_{\nu_j} V^\nu \partial_\nu$ (zauważ, że $\partial_{\nu_j} V^\nu = \partial_{\nu_j} V^\nu$)

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_V \tau)_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k} &= V^\mu \partial_\mu \tau_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k} - \sum_{i=1}^k \tau_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{i-1} \mu \mu_{i+1} \dots \nu_k} \partial_\mu V^{\mu_i} \\ &\quad + \sum_{j=1}^k \tau_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{j-1} \nu \nu_{j+1} \dots \nu_k} \partial_{\nu_j} V^\nu. \end{aligned}$$