

GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA

$$\sqrt{1} : \sqrt{11}$$
$$1/4 : 8/4$$

GEOMETRYZACJE ISTOTNYCH
KONSTRUKCJI ALGEBRY

LINIOWY

ORAZ ...

ALGEBRY LIEGO

2025/26

c385d VI

ABSTRAKCYJNA Def. 12 WNIOSŁYMY ŻE STUDIUM STRUKTURY
ROZMIATOŚCI RUCHÓW LOUKINYCH W ROZMIATOŚCI M .
TO POZWOLIŁO NAM ZABEZPECZONAĆ STRUKTURĘ ISTOTNIE
BOGATSZĄ NIŻ TA (GENERYCZNA), O KTÓREJ MOWA W PRZEDY
DEFINICJI. W SPECYFICZNOŚCI DOSTRZĘGLIŚMY BARDZO SZCZĘDNY,
ŻE LINIOWA POSTAĆ ZALEŻNOŚCI ODWZROKOWAŃ PRZEFICJA
TM POMIĘDZY TRWAŁIZACJAMI NATURALNYMI OD PUNKTU
(WEKTORA) WE WŁOŚCIE. PONIZEJ NADAJEMY TĘ OBSERWACJĘ
STATUS OSOBNĄ DEFINICJĘ, O ROZLEGŁYM SPECTRUM
ZASTOSOWAŃ FIZYKALNYCH (WIAŻĄCICH FORM RÓŻNOCZASOWYCH,
WŁĄSKIE SPINOROWE etc.).

Def. 14.

Przyjmijmy zapis dotychczasowy, ustalmy (dowolnie) $n \in \mathbb{N}$ i rozważmy $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ze standardową topologią (euklidesową) i strukturą różniczkową klasy C^∞ . **Wiązka wektorowa rzędu r nad ciałem $\mathbb{K}$ klasy C^∞** to wiązka włókniasta $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times r}, \pi_{\mathbb{V}})$ o własnościach

- $\forall_{x \in B} : \mathbb{V}_x \equiv \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\{x\}) \in \text{Ob Vect}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}$;
- ograniczenia dyfeomorfizmów klasy C^∞ (lokalnych trywializacji)

$$\text{pr}_2 \circ \tau_i \upharpoonright_{\mathbb{V}_x} : \mathbb{V}_x \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{\times r}, \quad x \in B$$

są izomorfizmami przestrzeni $\mathbb{K}$ -liniowych,

przy czym odwzorowania definiujące strukturę $\mathbb{K}$ -liniową na włóknach $\mathbb{V}$ są klasy C^∞ , w szczególności więc mamy

ODWZOROWANIA GŁADKIE

$$(6) \quad \mathbb{A} : \mathbb{V} \times_B \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$

$\cong \mathbb{V}_x \times_{\mathbb{K}^{\times r}} \mathbb{V}_x$

modelowany na definiującej operacji binarnej $A^r : \mathbb{K}^{\times r} \times \mathbb{K}^{\times r} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times r}$ w rozumieniu diagramu przemienneego

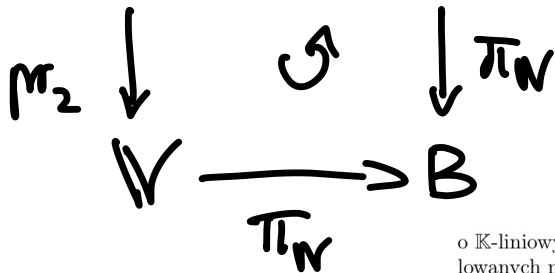
$$(7) \quad \begin{array}{ccc} \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times_B \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\mathbb{A}} & \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \downarrow \tau_i \times \tau_i & & \downarrow \tau_i \\ (\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times r}) \times_{\mathcal{O}_i} (\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times r}) & \xrightarrow{(\text{pr}_1, A^r \circ \text{pr}_{2,4})} & \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times r} \end{array}$$

niech $f_a : X_a \rightarrow Y, a \in \{1, 2\}$. wówczas
 $X_1 \times_{f_1, f_2} X_2 = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid f_1(x_1) = f_2(x_2)\}$
 $X_1'' \times_Y X_2 \subset X_1 \times X_2$.

Fakt: Ilość f_1 lub f_2 jest surowiejszą submersją, X_1, X_2 jest podmnożeniem $X_1 \times X_2$.

ORAZ RODZINĘ ODWZOROWAŃ KLASY C^∞

$\lambda : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$ (DZIAŁANIE CIAŁA STRUKTUR $\mathbb{K}$)



o $\mathbb{K}$ -liniowych ograniczeniach do włókien, uzupełnianą przez odwzorowanie $\mathbb{K}$ -liniowe $\mathbb{L}_{0,\mathbb{K}}$, modelowanych na definiującym działaniu $\ell^r : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{xr} \longrightarrow \mathbb{K}^{xr}$ w rozumieniu diagramu przemiennego

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\mathbb{L}_\lambda} & \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \tau_i \downarrow & & \downarrow \tau_i \\ \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{xr} & \xrightarrow{\ell_\lambda^r} & \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{xr} \end{array} .$$

W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mówimy o **rzeczywistej wiązce wektorowej**, gdy zaś $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ – o **zespolonej wiązce wektorowej**.

Rząd wiązki będziemy oznaczać symbolem $\text{rk } V$. Ilekroć $\text{rk } V = 1$, wiązkę określamy mianem **wiązki liniowej** i zwyczajowo oznaczamy symbolem L ,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \rightsquigarrow & L \\ & & \downarrow \pi_L \\ & & B \end{array} .$$

Odwzorowanie (różniczkowalne klasy C^∞)

$$0_V : B \longrightarrow V : x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, 0^r), \quad x \in \mathcal{O}_i,$$

nosi miano **cięcia zerowego** wiązki wektorowej V . Jest ono cięciem globalnym V w rozumieniu Uwagi 1, przy czym zarówno zbiór cięć lokalnych $\Gamma_{\text{loc}}(V)$, jak i zbiór cięć globalnych $\Gamma(V)$ noszą naturalną (punktową) strukturę modułu nad pierścieniem $C^\infty(B, \mathbb{K})$.

Podwiązka wektorowa rzędu $s \leq r$ wiązki wektorowej $(V, B, \mathbb{K}^{xr}, \pi_V)$ to podwiązka $(W, B, \mathbb{K}^{xs}, \pi_V|_W)$ tejsze wiązki (włóknistej) o tej własności, że nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ jej włókno $W_x \subset V_x$ jest podprzestrzenią $\mathbb{K}$ -liniową.

Morfizm wiązek wektorowych (nad ciałem $\mathbb{K}$) $(\mathbb{V}_\alpha, B_\alpha, \mathbb{K}^{r_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $r_\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ to dwójka (Φ, f) złożona z morfizmu wiązek włókniстых

$$(\Phi, f) : (\mathbb{V}_1, B_1, \mathbb{K}^{r_1}, \pi_{\mathbb{V}_1}) \longrightarrow (\mathbb{V}_2, B_2, \mathbb{K}^{r_2}, \pi_{\mathbb{V}_2}),$$

którego ograniczenie do włókna nad dowolnym punktem bazy $x \in B_1$,

$$(10) \quad \Phi|_{\mathbb{V}_{1x}} : \mathbb{V}_{1x} \longrightarrow \mathbb{V}_{2f(x)},$$

jest odwzorowaniem $\mathbb{K}$ -liniowym.

z.g., (1) TRYWIALNA WIĄZKA WEKTOROWA:

$(B \times \mathbb{K}^{r_1}, B, \mathbb{K}^{r_1}, \pi_1)$ o odwrotnej strukturze uniowej (wprost z $\mathbb{K}^{r_1}$).

(2) WSTĘGA MÖBIUSA ∞ SIEROKOŚCI.

(3) $(TM, M, \mathbb{R}^{\dim M}, \pi_{TM})$

$$\begin{array}{ccc} TM_1 & \xrightarrow{\Gamma} & TM_2 \\ \pi_{TM_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{TM_2} \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

(Γ, f) - MORFIZM
WIĄZKI
WEKTOROWY (107)

JEDNĄ Z FUNDAMENTALNYCH (WRĘCZ NISKOPOZIOMOWYCH
— NA POZIOMIE PĘWNIA WYBORU) WYNIKÓW TEORII
PRZESTRZENI LINIOWYCH JEST TWIERDZENIE O ISTNIENIU
BAZY, CZYLI — NIECO BARDZIEJ ABSTRAKCYJNIE — IZOMORFIZMU
Z MODELOWĄ PRZESTRZENIĄ WEKTOROWĄ. JĘC O
GEOMETRYCZNYM ODPWIEDNIKIEM JEST POMIĘDZY

Tw. 9. Przyjmijmy oznaczenia Def. 4. Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między trywializacjami lokalnymi wiązki wektorowej $(V, B, \mathbb{K}^{\times r}, \pi_V)$ i zbiorami r nigdzie nie-znikających cięć lokalnych definiującymi nad każdym punktem bazy $x \in B$ (w ich wspólnym nośniku) r wektorów liniowo niezależnych $\sigma^k(x)$, $k \in \overline{1, r}$ w odnośnych włóknach V_x . W szczególności wiązka wektorowa jest globalnie trywialna, tj. izomorficzna z wiązką $(B \times \mathbb{K}^{\times r}, B, \mathbb{K}^{\times r}, \text{pr}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje r jej cięć globalnych o tej własności.

D: $\Rightarrow$ NIECHAY $\tau : B \times \mathbb{K}^{nr} \xrightarrow{\sim} V$ BĘDZIE
 (ROZWIĄZANIA PROWADZIMY
 DLA UPROSZCZENIA NAD B ,
 ZAMIAST CYNIE TO NAD $\mathcal{O}_E(B)$.)

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1 \downarrow & \downarrow \pi_V \\ & B & \xlongequal[(id_B)]{} B \end{array}$$

TRYWIALIZACJA,

A WÓWYAS ε -OBRAZEM ZBIORU $\varepsilon_a : B \rightarrow B \times \mathbb{K}^{nr}$, $a \in \overline{\mathbb{K}}$
 $: x \mapsto (x, e_a)$

LNZ CIĘŻ WNIOSU TRYWIALNOJ, ZADANEGO PRZEZ WIEKOR
 $\{e_a\}_{a \in \overline{\mathbb{K}}}$ BAZY W MODELU $\mathbb{K}^{nr}$, JEST GŁADKO

INDEKSOWANA PRZEZ $B \ni x$ RODZINA BAZ WE WŁOŚCIACH
 $V_x \ni (\tau \circ \varepsilon_a)(x)$. ISTOTNIE, τ JEST WERTYKALNE: $\pi_V((\tau \circ \varepsilon_a)(x)) = x$,
 PRZETO $\tau \circ \varepsilon_a \in \Gamma(V)$, A NADTO — LINIOWE I ODWRACALNE (109)

W OGRANICZENIU DO WŁOŚCI (IZOMORFIZMNYM OBRAZEM UKŁADU LNZ JEST UKŁAD LNZ !).

I ODWROTNIE: NIECHAJ $\sigma_a \in \Gamma(N)$, $a \in \bar{\mathbb{R}}$ BĘDZIE UKŁADEM CIĘC V , O WŁOŚCI KŁAWA W TREŚCI STWIERDZENIA. DOWOLNY WYBÓR BAZY: $\{e_a\}_{a \in \bar{\mathbb{R}}}$ W MODELU $\mathbb{K}^{x_r}$ DĄŻE NAM WOLĄS DO DYSPOZYCJI DEFINICJI ODWZOROWANIA (JAWNE GŁADUNEGO)

$$\overline{\mathfrak{L}}: B \times \mathbb{K}^{x_r} \longrightarrow V, (x, v^a \triangleright e_a) \longmapsto v^a \triangleright \sigma_a(x).$$

W OBRAZIE DOWOLNEJ LOKALNEJ TRYWIALIZACJI (NAD $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \ni x$)
 $\tau: \pi_W^{-1}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{x_r}$

$\mathbb{P}^1(B)$ (10)

OTRZYMUJEMY

$$\tau \circ \Phi(x, v^a \triangleright e_a) = (x, v^a \varepsilon_a^b(x) \triangleright e_b)$$

DLA PEWNYCH $\varepsilon_a^b : \mathcal{O} \rightarrow GL(r, K)$. (ISTOTNIE :
 $\{\sigma_a(x)\}_{a \in \bar{r}}$ JEST BAZĄ W W_x , ZATEM $\{\pi_2 \circ \tau \circ \sigma_a(x)\}_{a \in \bar{r}}$
JEST BAZĄ W $\pi_2 \circ \tau(W_x) \cong K^{\bar{r}}$, MAMY PRZETO
ODWRACALNĄ TRANSFORMACJĘ BAZY $(\varepsilon_a^b(x))_{a \in \bar{r}, b \in \bar{r}}$.)

W NATURALNYCH WSPÓŁRZĘDNYCH (LOUTUNYCH)
ZADAWANYCH PRZEZ τ I MAPĘ LOUTUNĄ NA $\mathcal{O}$
ODWZOROWANIE Φ JEST J. OZYMISTY SPOŁOŻ
GŁOŚNO ODWRACALNE (WSZAK ODWRACANIE (111))

MACIERZY $(\varepsilon_a^b(\cdot))_{a,b \in \Gamma}$ JEST OPERACJĄ ALGEBRAICZNĄ,
 WIĘC CIĄGŁO ZALEŻNĄ OD ARGUMENTU¹, OD WIDZĄC
 IAMA MACIERZ JALĘJ² WPROST Z KONSTRUKCJI CIĄGŁO.
 ZALEŻNOŚĆ OD WSPÓŁRZĘDNYCH x^a JEST WŁOŚNIWO JEST
 LINIOWO ODWRACALNA, WIĘC TAKŻE CIĄGŁA.) TO

OZNACZA, JE $\mathbb{E}|_{\mathcal{D}} \in \text{Diff}(\mathcal{O} \times \mathbb{K}^r, \mathbb{V}|_{\mathcal{D}})$,
 JATEM — WOPRZEC DOWOLNOŚCI — WYBORU $\mathcal{D} \subset \tau$

TAKŻE $\mathbb{E} \in \text{Diff}(B \times \mathbb{K}^r, \mathbb{V})$. □

W NASTĘPNEJ KOLEJNOŚCI WYKORZYSTAMY Tw. 8.
 O WYSPRZĘGLANIU DO GEOMETRYZACJI ROZMIATYCH KONSTRUKCJI
 ALGEBRY LINIOWEJ, PRZYDATNYCH W ANALIZIE NA ROZMIATOWIACH... (12)

1° SUMA WHITNEYA WIAZUŁ WKTOROWYCH $(V_a, B, K^{r_a}, \pi_{V_a})$

TO WIAZKA WKTOROWA $K^{r_1+r_2} \hookrightarrow V_1 \oplus V_2$ o 1-kociku $\downarrow B$ $\left. \begin{array}{l} \text{przejścia } g_{ij}^{(a)}: \mathcal{O}_i \rightarrow GL(r_a, K) \\ a \in \{1, 2\} \end{array} \right\}$

przejścia $g_{ij}^{\oplus} := g_{ij}^{(1)} \oplus g_{ij}^{(2)}: \mathcal{O}_i \rightarrow GL(r_1, K) \oplus GL(r_2, K) \not\subset GL(r_1+r_2, K)$

czyli $V_1 \oplus V_2 \simeq \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times (K^{r_1} \oplus K^{r_2}) / \sim_{g_{ij}^{\oplus}}, \mathcal{T}_f$.

$(x, v_1, v_2, j) \sim (x, g_{ij}^{(1)}(x)(v_1), g_{ij}^{(2)}(x)(v_2), i)$.

2° WIAZKA DUALNA DO (W, B, K^{r_r}, π_W) TO WIAZKA WKTOROWA $W^* \hookrightarrow (K^{r_r})^* \cong K^{r_r}$ o 1-kociku $\downarrow B$ $\left. \begin{array}{l} \text{przejścia } (g_{ij}(\cdot)^T)^*, \mathcal{T}_f. \end{array} \right\}$ (13)

$$W^* \simeq \bigsqcup_{i \in I} \Theta_i \times \mathbb{K}^{*r} / \sim \quad : \quad \begin{array}{ccc} (x, \varphi, j) & \sim & (x, (g_{ij}(x)^{-1})^* \varphi, i) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (\mathbb{K}^{*r})^* & & \varphi \circ g_{ij}(x)^{-1} \\ \cong & & \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{*r}, \mathbb{K}) \end{array}$$

POWYŻSZA DEFINICJA NADLEŻY DO DUALNOŚCI

WŁADNOŚĆ PO WŁADNOŚCI :

$$\bigsqcup_{i \in I} \Theta_i \times \mathbb{K}^{*r} / \sim \quad \xrightarrow{\quad} \quad \bigsqcup_{i \in I} \Theta_i \times \mathbb{K}^{*r} / \sim_{g_{ij}}$$

$$\langle [(x, \varphi, j)]_{\sim}, [(x, \psi, j)]_{\sim} \rangle := \varphi(\psi) \quad \text{///} \quad \checkmark$$

$$\langle [(x, g_{ij}(x)^{-1*} \varphi, i)]_{\sim}, [(x, g_{ij}(x)(\psi), i)]_{\sim} \rangle = (g_{ij}(x)^{-1*} \varphi)(g_{ij}(x)(\psi)).$$

3° WIĄZKA WYZNACZNIKOWA wiązek (V, B, K^*, π_V)

TO WIĄZKA LINIOWA (!) $\det V \hookrightarrow K$

O 1-wokłowej projekcji $\downarrow B$

$\det \circ g_j: \Theta_j \rightarrow K$, gdzie $\det V \simeq \bigsqcup_{i \in I} (\Theta_i \times K) / \sim \det \circ g_j$

tz. $(x, \lambda, j) \sim (x, \det g_j(x) \cdot \lambda, i)$.

NIGDYŻE NIE ZNIKAJĄCE CIĘCIE GLOBALNE $\det V$
OKREŚLAMY MIANEM ORIENTACJI NA V .

(PRZYK. : $\det \in \bigwedge_{\substack{\dim_K V \\ \neq 0}} V^* \setminus \{0\} \leftrightarrow \text{BAZA UPORZĄDKOWANA: } \{e_a\}_{a \in I}$
 $\det(e_1, e_2, \dots, e_p) = 1$ } "ORIENTACJA" (115)

ISTOTNĄ ROLĘ W GEOMETRII RZĄCZNOJ ODPRAWIA
CIĘCIA ROZMAITYCH WŁZEC TENZOROW typu (m, n) :

$T \in \Gamma(TM^{\otimes m} \otimes T^*M^{\otimes n})$, w szczególności

4° METRYKA NA (V, B, K^r, π_V) TO $g \in \Gamma(V^* \otimes V^*)$,

Gdzie $V^* \otimes V^* \simeq \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \otimes (K^r \otimes_K K^r) / \sim g_i(\cdot)^* \otimes g_j(\cdot)^*$,

O WŁASNOŚCI: $g(x) \in V_x^* \otimes_K V_x^*$ JEST FORMĄ 2-LINIOWĄ
SYMETRYCZNĄ NIEZWYRODNIĄ. W SZCZEGÓLNOŚCI W PRZYPADKU
 $V = TM$ MÓWIMY O METRICE NA ROZMAŃCOCI M .

PARĘ (M, g) OKREŚLAMY WÓWCAJ MIANEM STRUKTURY
METRYCZNEJ LUB ROZMAŃCOCI METRYCZNEJ. (16)

MAMY

Tw. 10. DOWOLNA WŁZKA WEKTOROWA (wisc takze dowolna rozmiarosc) jest RIEMANNOWSKA (!) METRYZOWALNA.

1: WYKORZYSTAJEMY MODELE LOCALNE

$$\tau_i : \mathbb{V}|_{\mathcal{O}_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{xr}$$

i STOWARZYSZONY $\hookrightarrow \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ C^∞ ROZKŁADY JEDNOSTKI $\{e_i\}_{i \in I}$.

DEFINIujemy METRYKE MODELOWEJ (INDUKOWANEJ Z METRYKI EUKLIDESOWEJ $\delta_E^{(r,0)} : \mathbb{K}^{xr} \oplus_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{xr} \rightarrow \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ NA MODELU):

$$\mathcal{O}_i \ni x \mapsto g_i(x) : \mathbb{V}_x \times \mathbb{V}_x \rightarrow \mathbb{K}, (v_1, v_2) \mapsto \delta_E^{(r,0)}(m_2 \circ \tau_i(v_1), m_2 \circ \tau_i(v_2)),$$

A NASTĘPNIE "KLEIMY" $g(\cdot)(i, j) := \sum_{i \in I} e_i(\cdot) \circ g_i(\cdot)(\cdot, \cdot)$. □ (17)

POWYŻSZA ABSTRAKCYJNA KONSTRUKCJA WŁZCI DUALNEJ V^*
W PRZYPADKU $V = TM$ DOMAGA SIĘ ODNIIESIENIA
DO WYŚCIOWEJ GEOMETRYCZNEJ KONSTRUKCJI PRZESTRZENI
TOTALNEJ TM JAKO ROZMAITOŚCI RUCHÓW LOCALNYCH
W BAZIE M ...

PRZYPOMNIJMY: W KONSTRUKCJI $TM = \bigsqcup_{m \in M} P_m$
WPROWADZIŁEMY RELACJĘ RÓWNOWAŻNOŚCI (WSPÓŁ-STYCZNOŚCI)
NA ZBIORZE LOCALNYCH KRZYWYCH $\gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ PRZEZ $m \in M$:
 $T_m M \equiv P_m \ni [\gamma]_{\sim_m}$. PRZY TYM DEFINICJA RELACJI DOZWOLITA
STOWARZYSZYĆ Z JEJ WŁASNOŚCIĄ ABSTRAKCJI ROZNIKOWANIA
W PUNKCIE $m \in M$ (118)

ALGEBRA FUNKCJI CIĄGŁYCH: $D_{\mathbb{R}^n_m} : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto D(f \circ \gamma)(0)$.
 NA PRACACH POMOCNEJ HEUREZY MOŻEMY MYŚLEĆ O FUNKCJACH
 JAKO OBIEKTACH „DOKŁADNYCH” DO PUNKTÓW/KRZYWYCH,

$$(f \circ \gamma)(0) = ev_{\gamma(0)}(f) : f \sim^* \gamma(0),$$

CO PROWADZI NAS WPRODŃ DO DEFINICJI KO-WEKTORA,

CZYLI WEKTORÓW KO-STYCJNYCH W MEM JAKO KLAS

WSPÓŁ-KO-STYCJNOŚCI... FUNKCJI WŁAŚNIE, OKREŚLONYCH

JAKO WZYCIE DOWOLNYCH... KRZYWYCH LOKALNYCH:

7. KLAS ABSTRAKCYJNY WZGL. RELACJI WSPÓŁ-KO-STYCJNOŚCI:

$$\forall f_1, f_2 \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : f_1 \sim_m f_2 \stackrel{\text{ex}}{\stackrel{\text{def}}{\iff}} \forall \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M : \begin{matrix} \gamma(0) = m \\ D(f_2 \circ \gamma)(0) = D(f_1 \circ \gamma)(0) \end{matrix}$$

KLASĘ WSPÓŁ-KO-STYCZNOŚCI Funkcji $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ OZNACZAMY
 SYMBOLEM $df(m) \equiv [f]_m$ I NAZYWAMY WECTOREM w_m
 LUB WECTOREM KOSTYCZNYM w_m , LUB - HOMERNYCHO -
RÓŻNICZKĄ Funkcji w_m . ZBIÓR TAKICH KLAS:

$$T_m^* M = \{ [f]_m \mid f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \}$$

NAZYWAMY PRZESTRZENIĄ KOSTYCZNĄ (DO M) w_m .
 OTRZYMUJEMY ROZMAIŁOŚĆ RÓŻNICZKOWĄ/KOSTYCZNĄ

$$T^* M := \bigsqcup_{m \in M} T_m^* M.$$

ROZUMIĄC ANALOGICZNIE JAC W PRZYPADKU POJĄTOŚCI
 RUCHÓW HAMILTONA $T^*M = \bigsqcup_{m \in M} P_m$, DOCHODZIMY BEZ TRUDU
 DO NASTĘPUJĄCYCH WNIOSKÓW:

- (i) T^*M NIEŚCIE — WŁOŚNO PO WŁOŚNIENIU (NAD M) —
 NATURALNĄ STRUKTURĘ R -LINIOWĄ (OKREŚLONĄ
 NA REPREZENTANTACH KLAS);
- (ii) NA T^*M JEST DOBRZE OKREŚLONY RGUT NA BAZIE

$$\pi_{T^*M} : T^*M \rightarrow M, (m, [f]_{\sim m}) \mapsto m;$$
- (iii) ATLAS $[(\mathcal{O}, \alpha)]$ NA M INDUKUJE NA T^*M
 RODZINĘ MAP NATURALNYCH, KTÓRE POZWALAJĄ (121)

STOPOLOGIZOWAĆ ZBIÓR T^*M I WYPOSAŻYĆ GO (TAPOLOGICZNIE)
W STRUKTURĘ CIĄGU ORAZ STRUKTURĘ WĄZKI WŁADZĄCY
NAD BAZĄ M . ISTOTNIE, MAJĄC MAPY LOKALNE

$$(x^\mu)_{i \in \bar{I}} \equiv x_i : \mathcal{O}_i \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^{x_i}, \quad x_i = \dim M, i \in \bar{I},$$

DEFINIOWANY NA $T^*M|_{\mathcal{O}_i} \equiv \bigsqcup_{m \in \mathcal{O}_i} T_m^*M$ BIEŻĄCY

$$\check{\kappa}_i : T^*M|_{\mathcal{O}_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{x_i}, \quad (m, [f]_{\sim_m}) \mapsto (x_i(m), (D(f \circ \kappa_i)(0))_{\mu \in \bar{I}_n})$$

PRZY UŻYCIU WZRYWKI-PROSTYCH WSPÓŁRZĘDNYCH : $\hat{\cdot} := p_\mu([f]_{\sim})$

$$\gamma_\mu :]-\varepsilon, \varepsilon[\ni t \mapsto \kappa_i^{-1}(\underbrace{x_i(m)}_{\in \mathcal{U}_i} + t \triangleright e_\mu) \in \mathcal{O}_i$$

JAK ŁATWO WIDAC,

$$D(\kappa_i \circ \gamma_\mu)(0)$$

$$\begin{aligned} D(f \circ \gamma_\mu)(0) &\equiv D((f \circ \kappa_i^{-1}) \circ (\kappa_i \circ \gamma_\mu))(0) = D(f \circ \kappa_i^{-1})(\kappa_i(m))(\overset{||}{e}_\mu) \\ &\equiv \mathcal{D}_\mu(m) f \left(\equiv \frac{\partial(f \circ \kappa_i^{-1})}{\partial x^\mu}(\kappa_i(m)) \right). \end{aligned}$$

NB: USTALENIE POCZĄTKOWYCH WEKTORÓW $\mathcal{D}_\mu(m)f$, $\mu \in \bar{1}, n$
w pełni określa $D(f \circ \gamma)(0) \forall \gamma$!

Powyższy rachunek pozwala już wprost wyznaczyć
składowe z wektora odzorowań przejścia między
mapami naturalnymi...

AŻEBY JE SPRAWNIE OBLICZYĆ, WPROWADZAMY BAZĘ $\{\varphi^\mu\}_{\mu \in \overline{n}}$ DUALNĄ DO $\{e_\mu\}_{\mu \in \overline{n}}$, T.J., $\varphi^\mu(e_\nu) = \delta^\mu_\nu$, I PRZEPISUJEMY

TENWIAUZACYS NATURALNE

$$\check{\tau}_i : T^*M|_{\mathcal{O}_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x_n}, (m, [f]_{\sim m}) \mapsto (m, (D(f \circ \gamma_\mu)(0))_{\mu \in \overline{n}})$$

W POSTACI

$$\check{\tau}_i(m, [f]_{\sim m}) \equiv (m, D(f \circ \gamma_\mu)(0) \circ \varphi^\mu) \equiv (m, D(f \circ \kappa_i^{-1})(\kappa_i(m))) ,$$

A STĄD TAKŻE

$$\check{\tau}_i \circ \check{\tau}_j^{-1} : \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{R}^{x_n} \hookrightarrow$$

$$\begin{aligned} &: (m, D(f \circ \kappa_j^{-1})(\kappa_j(0))) \mapsto (m, D(f \circ \kappa_j^{-1})(\kappa_j(m)) \circ D(\kappa_j \circ \kappa_i^{-1})(\kappa_i(m))) \\ &\equiv (m, (D(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1})(\kappa_j(m)))^* D(f \circ \kappa_j^{-1})(\kappa_j(m))). \quad (124) \end{aligned}$$

TEN OSTATNI WYNIK POŁĄŻUJĘC TOŻSAMOŚĆ (KLASY ISOMORFIZMU)
 NASZEJ KONSTRUKCJI GEOMETRYCZNEJ Z (KLASĄ TOŻSAMOŚCI)
 WYŚNIEJSZEJ KONSTRUKCJI ABSTRAKCYJNEJ NA PODSTAWIE TWIERDZENIA
 O WYSPRZĘGLANIU!

W OTRZYMANEJ TEN SPOSOBEM PREZENTACJI T^*M , A W POŁĄCZENIU
 Z WYŚNIEJSZĄ PREZENTACJĄ TM , MOŻEMY ZAPISAĆ DWOISTOŚĆ

$$\begin{aligned}
 \langle df(m), [r]_{\sim_m} \rangle &= D(f \circ \gamma)(0) \\
 \stackrel{\Theta_i}{=} &= D(f \circ \kappa_i^{-1})(\kappa_i(m)) \circ D(\kappa_i \circ \gamma)(0) \\
 &= \partial_\mu(m) f \circ \frac{d(x^\mu \circ \gamma)}{d\tau}(0)
 \end{aligned}$$

RZECZ JASNA, NASZA KONSTRUKCJA KOWEKTORÓW (w PUNKCIE)
 PROBLEMU FUNKCJE NA (DOW. MATEM.) STODUCHA STWIERDZENIA
 (CZEPÓŻ PUNKTU), MA PRZETO SENS STWIERDZENIE, ŻE FUNKCJE
 (LOKALNIE) GŁADKE (TAUTOLOGICZNE)

$$x^\mu := \pi_\mu \circ k_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{R}$$

ZADAJĄ KOWEKTORY DUALNE DO RÓŻNICZKOWANIA

WSPÓŁRZĘDNIOWYCH: $\leftarrow [\gamma_\nu]_{\nu=1}^m$

$$\langle dx^\mu(m), \partial_\nu(m) \rangle \equiv D(x^\mu \circ k_i^{-1})(k_i(m))(e_\nu) \equiv \pi_\mu(e_\nu) = \delta_\nu^\mu.$$

OTRZYMUJEMY WÓC NATURALNĄ BAZĘ T_m^*M DUALNĄ

DO $\{\partial_\mu(m)\}_{\mu \in \overline{1, n}}$, A MIANOWICIE $\{dx^\mu(m)\}_{\mu \in \overline{1, n}}$.

BAZA TA OKREŚLA NATURALNY LOKALNY UKŁAD WSPÓŁCZYNNEJ NA T^*M ,
 W CTÓRYM IDENTYFIKACJĘ GŁADKIE CIĘCIA T^*M JAKO TE,
 KTÓRYCH (FUNKCYJNALNE) WSPÓŁCZYNNEJ ROZKŁADU W BAZIE
 dx^μ SĄ GŁADKIE. CIĘCIA TE OKREŚLAJĄ MIANEM POL
KOWEKTOROWYCH. POŚRÓD NICH ODNAJDUJEMY

Def. 15. Różniczka Funkcji $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ TO POL

KOWEKTOROWE $df : M \ni m \mapsto \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(m) dx^\mu(m)$

$$\equiv \frac{\partial (f \circ \kappa_i^{-1})}{\partial x^\mu}(\kappa_i(m)) dx^\mu(m)$$

$\in C^\infty(\mathcal{U}_i, \mathbb{R})$

NB: (i) $f \mapsto df$ $\mathbb{R}$ -LINIOWE,

W SZCZEGÓLNOŚCI: $d(\text{const}) = 0$

(ii) $d(f \cdot g) = f \odot dg + g \odot df$ (LEIBNIZ)

NA ZACHOWANIE TEJ CZĘŚCI WYKŁADU ODRZUCIMY JĘZYK
 NATURALNY TRANSPORT PÓŁ KOWARIANTYCH WSTĘP DOZOROWAŃ
 GŁADKICH...

NIE SPODÓB WPRAWDZIĆ DUALIZOWAĆ WPROST - PUNKT PO PUNKCIE -
 TRANSPORT STYCZNY $T_m f, m \in M_1$ (DLA $f: M_1 \rightarrow M_2$), GDYŻ
 DLA f NIE INFETYWNEGO,

$$\begin{array}{ccc} m_1 \bullet & \nearrow & \bullet f(m_2) = f(m_1) \\ m_2 \bullet & \nearrow & \end{array}$$

NATRAFIAMY NA

$$(T_{m_1} f)^* : T_{f(m_1)}^* M_2 \rightarrow T_{m_1} M_1$$

III

$$(T_{m_2} f)^* : T_{f(m_2)}^* M_2 \rightarrow T_{m_2} M_1$$

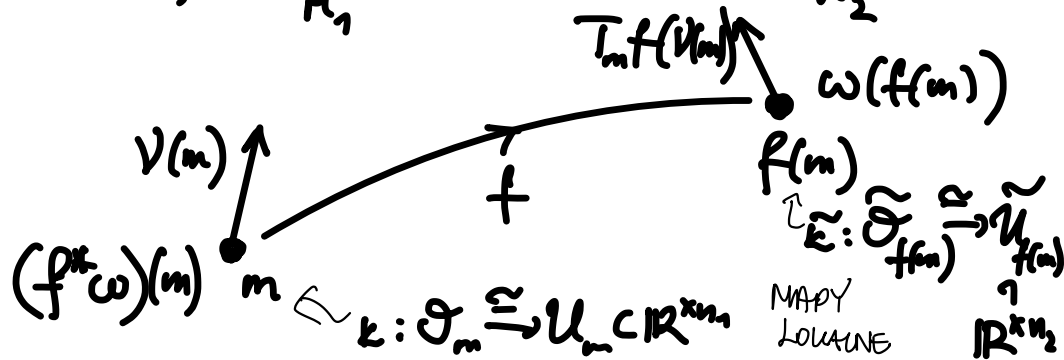
, CZYLI $(Tf)^*$ " NIE JEST
 DOZOROWANE... (128)

KOJEMY JEDNAKOWOJ POSLUŻYC SIĘ TF SPRYTNIĘ, TF.,
 UŻYWAJĄC DWOISTOŚCI: $f^* : \Gamma(T^*M_2) \rightarrow \Gamma(T^*M_1)$

$$: \omega \mapsto f^* \omega$$

WEDŁE SCHEMATU

$$\langle f^* \omega, V \rangle_{M_1} := \langle \omega, Tf \cdot V \rangle_{M_2}$$



BEZ TRUDU WYZNAMAMY (FUNKCYJONALNE) WSPÓŁCZYNNEKI ROZKŁADU
 $f^* \omega$ w LOKALNEJ BAZIE WSPÓŁRZĘDNIOWEJ NA OTOCZENIU $\Theta_m \ni m$: (129)

$$\langle f^* \omega, \partial_\mu \rangle(m) \equiv \underbrace{\langle \omega(f(m)), \frac{\partial(\tilde{\kappa} \circ f \circ \kappa^{-1})^\alpha}{\partial x^\mu}(\kappa(m)) \rangle}_{\omega_p(f(m)) dy^\alpha(f(m))} \partial_\alpha(f(m))$$

$$= \omega_\alpha(f(m)) \frac{\partial(\tilde{\kappa} \circ f \circ \kappa^{-1})^\alpha}{\partial x^\mu}(\kappa(m))$$

$\uparrow \frac{\partial}{\partial y^\alpha}(f(m))$
 $\tilde{\kappa} = (y^\alpha)^{\alpha_1 + \alpha_2}$

↓

$$(f^* \omega)(m) = \omega_\alpha(f(m)) \frac{\partial(\tilde{\kappa} \circ f \circ \kappa^{-1})^\alpha}{\partial x^\mu}(\kappa(m)) \triangleright dx^\mu(m)$$

↑
 gładka zależność od m !

↓

$f^* \omega \in \Gamma(T^*M_1)$, jako wektor!

C3E¹_LSc VII

ROZWINIEMY TERAZ STUDIUM WIĄZKI STYCZNEJ NAD RÓŻNIAŁKAMI
 W KIERUNKU USTANOWIENIA NA NIŻ STRUKTURY SKATEGORYZOWANEJ
 ALGEBRY LIEGO...

ZAGNIJMY OD

Def. 16 (GLADKIE) POLE WEKTOROWE NA $M \in \text{Man}^\infty$

TO CIĘCIĘ GLOBALNE $V \in \Gamma(TM)$, ∇ .

$$V \in C^0(M, TM) : \pi_{TM} \circ V = \text{id}_M.$$

MAMY ODJYWIŚCIE

Sw. 15. ODWZOROWANIE $V : M \rightarrow TM$, $\pi_{TM} \circ V = \text{id}_M$

JEST POLEM WEKTOROWYM $\Leftrightarrow \forall \vartheta_i : V|_{\vartheta_i} = X^\mu(\cdot) \partial_\mu$
 NA $((M, TM), [(\vartheta_i, \vartheta_j)])$ $\kappa_i = (x^\mu)$
 $C^\infty(\vartheta_i, \mathbb{R})$

D: WYSTARCY ROZWAŻYĆ WSPÓRZĘDNE NATURALNE NA $TM(\theta_i)$. $\square$

JEST TEŻ NIE KNIŁY ODCYWKI

glw. 16. $\Gamma(TM)$ JEST MODULEM NAD RZYSKIENIEM $C^\infty(M, \mathbb{R})$,
TJ. (*) $\forall V, W \in \Gamma(TM) : V + W \in \Gamma(TM) ; \mathcal{O}_{TM} \in \Gamma(TM)$
 $\uparrow$ PUNKTOWO
NAD M STRUKTURA GRUPY
PRZEMIENNEJ

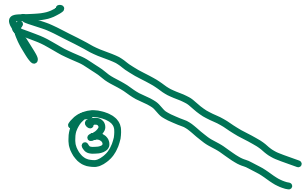
$$(**) \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}), V \in \Gamma(TM) : f \circ V : M \rightarrow TM, m \mapsto \underbrace{f(m)}_{\mathbb{R}} \underbrace{\triangleright}_{\Gamma(TM)} \underbrace{V(m)}_{\text{Vect}_{\mathbb{R}}}$$

W DALSZEJ CZĘŚCI WYKŁADU WYKORZYSTAMY INTYMNY ZWIĄZEK
POL WKTOROWYCH Z RÓŻNICZKOWANIANI $C^\infty(M, \mathbb{R})$...

Stw. 17. NIECH $V: M \rightarrow TM$, $\pi_{TM} \circ V = \text{id}_M$. Wówczas

$$V \in \Gamma(TM) \xrightarrow{\textcircled{1}} \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : (V(f) : M \rightarrow \mathbb{R}, m \mapsto V(m)(f))$$

$\uparrow$
 $C^\infty(M, \mathbb{R})$



$$\forall \mathcal{O} \in \mathcal{T}(M), f \in C^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R}) : V|_{\mathcal{O}}(f) \in C^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R})$$

D: $\textcircled{1} \Rightarrow$ Oczywiste w świetle Stw. 15. ■ ($\text{supp } \chi_u = \bar{U}$)

$\textcircled{2} \Rightarrow$ Wystarczy użyć Funkcji Cięcia χ_u na dowolnym kulowym otoczeniu współrzędniowym $U \xrightarrow[\kappa]{\cong} B_{n=\dim M} \subset \mathbb{R}^n$

dowolnego punktu $m \in \mathcal{O}$, zawartym w $\mathcal{O}$. Zakładamy

przy tym $\chi_u|_W = 1$ dla pewnego $W \subset U$, a wtedy

$f \cdot \chi_u$ rozszerzona gładko przez 0 na $M^n =: \tilde{M} : f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ (133)

SPELNIA $V|_W(f|_W) \equiv V|_W(\tilde{f}|_W) \equiv V(f)|_W \in C^\infty(W, \mathbb{R})$ JAKO OGRANICZENIE
 $C^\infty(W, \mathbb{R})$ $V(f) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ (3 pat.). $\square$

② $\Rightarrow$ ODNOBIMY ZASTOŻENIE DO TAUTOLOGICZNEJ CIĄDŁEJ FUNKCJI

WSPÓRZĘDNOWYCH: $V^\mu(\cdot) \equiv V|_{\sigma}(x^\mu) \in C^\infty(\sigma, \mathbb{R})$,
 x^μ NA $\sigma \xrightarrow{k=(x^\mu)} U \subset \mathbb{R}^m$

PO CZYM PRZYWOŁUJEMY SLW. 15. $\square$

WPROWADZIMY TERAZ

Def. 17. ROZNICZKOWANIE ALGEBRY $C^\infty(M, \mathbb{R})$ TO ODWZOROWANIE

$\mathbb{R}$ -LINIOWE $D: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow 0$ WŁAŚNOŚCI LEIBNITZA:

$$\forall f_1, f_2 \in C^\infty(M, \mathbb{R}): D(f_1 \cdot f_2) = f_1 \cdot D(f_2) + f_2 \cdot D(f_1).$$

PRZESTRZENI $\mathbb{R}$ -LINIOWĄ RÓŻNICZKOWAŃ $C^\infty(M, \mathbb{R})$ OZNACZANY
SYMBOLEM $\text{Der } C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Sw. 18. $\text{Der } C^\infty(M, \mathbb{R}) \underset{\mathbb{R}\text{-lin.}}{\simeq} \Gamma(TM)$

D: WYNIKANIE ① W Sw. 17. OKREŚLA $\Gamma(TM) \rightarrow \text{Der } C^\infty(M, \mathbb{R})$.
IDĄC W KIERUNKU PRZECIWNYM, ZDEFINIEMY - DLA DANEGO
 $D \in \text{Der } C^\infty(M, \mathbb{R})$ - ODWZOROWANIE $V_D(f) : M \rightarrow \mathbb{R}, m \mapsto D(f)(m)$,
KTÓRE W OCZYWISTY SPOSÓB ZALEŻY OD f $\mathbb{R}$ -LINIOWO.
NAD DANYM $m \in M$ DOSTAJEMY RÓŻNICZKOWANIE W PUNKCIE m ,
ZATEM TAKI ZADANIE V_D JEST ODWZOROWANIEM $M \rightarrow TM$ z
o własności $\pi_{TM} \circ V_D = \text{id}_M$.
 $V_D(m)(f) := D(f)(m)$.

PRZY TYM ZALEŻNOŚĆ $D(f)(m)$ OD $m \in M$ JEST CIĄDŁĄ UPROST
Z ZAŁOŻENIA, JAKIEM $V_D \in \Gamma(TM)$ NA MOCY Skł. R. $\square$

USTANOWIONA POWYŻEJ BIJEKCJA POZWALA WYSKOWIĆ

Def. 18. KOMUTATOR PÓŁ WEKTOROWYCH NA $M \in \text{Man}^\infty$

TO OPERACJA BINARNA

$$[\cdot, \cdot]_{TM} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM), (V_1, V_2) \mapsto [V_1, V_2]_{TM}$$

DANA WYJASNIENIEM $[V_1, V_2]_{TM} : C^\infty(M, \mathbb{R}) \ni f \mapsto V_1(V_2(f)) - V_2(V_1(f))$.

Skł. 19. $\forall M \in \text{Man}^\infty : (\Gamma(TM), [\cdot, \cdot]_{TM})$ JEST ALGEBRA LIEGO,

TJ. $(\Gamma(TM) \in \text{Vect}_{\mathbb{R}}$ ORAZ) $[\cdot, \cdot]_{TM}$ NA NASTĘPUJĄCE WŁAŚNOŚCI:

(i) JEST DWU-LINIOWA;

(ii) JEST SKAŁNÓ ;

(iii) SPĘŁNIA TOŻSAMOŚĆ JACOBIEGO, T.J.

ODWZOROWANIE Tędy - TR-LINIOWE

$$\text{Jac}_M : \Gamma(TM)^{\times 3} \rightarrow \Gamma(TM)$$

$$(V_1, V_2, V_3) \mapsto [V_1, V_2]_M, V_3 + [V_3, V_1]_M, V_2 + [V_2, V_3]_M, V_1$$

JEST ZEROWE, $\text{Jac}_M \equiv 0$;

(iv) SPĘŁNIA TOŻSAMOŚĆ LEIBNITZA, T.J.

$$\forall V_1, V_2 \in \Gamma(TM), f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : [V_1, f \circ V_2]_M = f \circ [V_1, V_2]_M + V_1(f) \circ V_2.$$

D: W ŚWIEŁE GL. 19. WYSTARCZY POKAZAĆ, ŻE $[V_1, V_2]_M \in \text{Der}(C^\infty(M, \mathbb{R}))$

NB: $V_1 \circ V_2$ NIE JEST W OGÓLNOŚCI RÓŻNICZKOWANIEM $C^\infty(M, \mathbb{R})$. (137)

AŻEBY DŁŻ O TYM PRZEKONAĆ, WYSTARCZY ROZWIAZYĆ KONTROPZYKŁAD:
 $V_1, V_2 \in \Gamma(T\mathbb{R}^{n,2})$; $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{n,2}, \mathbb{R})$; x, y - WSPÓŁRZĘDNE GLOB.
 NA $\mathbb{R}^{n,2}$

$V_1(x, y) := \partial_x$, $V_2(x, y) := x \partial_y$; $f(x, y) := x$, $g(x, y) := y$ DĄJĄ

$(V_1 \circ V_2)(f \cdot g) = \partial_x (x \partial_y (xy)) = \partial_x (x^2) = 2x$

$f(V_1 \circ V_2)(g) + g \cdot (V_1 \circ V_2)(f) = x \cdot (\partial_x (x \partial_y (y))) + y \cdot (\partial_x (x \partial_y (x)))$
 $= x(\partial_x(x)) = x \cdot 1 = x \neq 2x$

JEŚLI ZATEM ISTOTNIE $[V_1, V_2]_{\text{TH}} \in \Gamma(TM)$, TO MECHANIZM
 ZAPEWNIĄCYM SPEŁNIENIE REGUŁY LEIBNITZA JEST
 ANTYSYMETRYZACJA...

$$\begin{array}{ccc}
 C^\infty(M, \mathbb{R}) & \xrightarrow{V_2} & C^\infty(M, \mathbb{R}) \\
 V_1 \downarrow & / & \downarrow V_1 \\
 C^\infty(M, \mathbb{R}) & \xrightarrow{V_2} & C^\infty(M, \mathbb{R})
 \end{array}
 \quad ?$$

W ŚWIETLE **LEM. 17.** WYSTARCZY ZBADAC DZIAŁANIE $[V_1, V_2]_{TH} \upharpoonright_{\mathcal{O}}$ NA $C^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ DLA $\mathcal{O} \xrightarrow{\kappa = (x^\mu)} U \subset \mathbb{R}^{x^\mu}$ (OTOCZENIE WSPÓŁRZĘDNYCH),

A TAM $V_1 \upharpoonright_{\mathcal{O}} = V_1^\mu(\cdot) \partial_\mu$; $V_2 \upharpoonright_{\mathcal{O}} = V_2^\nu(\cdot) \partial_\nu$, WŁASZCZĄC TĘŻ

$$\begin{aligned}
 [V_1, V_2]_{TH} \upharpoonright_{\mathcal{O}} (f \upharpoonright_{\mathcal{O}}) &= \overset{\leftarrow \text{tu jest funkcja współrzędnych}}{V_1^\mu(\cdot) \partial_\mu (V_2^\nu(\cdot) \partial_\nu (f)) - V_2^\nu(\cdot) \partial_\nu (V_1^\mu(\cdot) \partial_\mu (f))} \\
 &= (V_1^\mu \partial_\mu V_2^\nu - V_2^\nu \partial_\nu V_1^\mu) \partial_\nu (f) \upharpoonright_{\mathcal{O}} + V_1^\mu V_2^\nu (\partial_\mu \partial_\nu (f) - \partial_\nu \partial_\mu (f)) \upharpoonright_{\mathcal{O}} \\
 &= (V_1^\mu \partial_\mu V_2^\nu - V_2^\nu \partial_\nu V_1^\mu) \partial_\nu (f) \upharpoonright_{\mathcal{O}} \in C^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R}) \quad \underbrace{\quad}_{= 0 \text{ dla } f \in C^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R})} \quad (139)
 \end{aligned}$$

JEST ZATEM $[V_1, V_2]_{TM} \in \Gamma(TM)$.

WŁASNOŚCI (i) i (ii) SĄ TRZYWIAŁNE, (iii) JAS - SPRAWDZAMY
POZOSTAŁYM RACJONALNIE.

WŁASNOŚCI (iv) DOWODZIMY DOKŁADNIE, WYKORZYSTUJĄC
WYPROWADZONĄ POWYŻEJ REPREZENTACJĘ DOKŁADNIE

$$[V_1, V_2]_{TM}|_0 = (V_1^\mu \partial_\mu V_2^\nu - V_2^\mu \partial_\mu V_1^\nu) \partial_\nu. \quad \square$$

TYM POBÓREM OTRZYMAŁYSMY PROTOTYP STRUKTURY
GEOMETRYCZNEJ O ISTOTNYM ZNACZENIU FIZYCZNYM
(W MODELOWANIU SYMETRII SYCINOŚCIOWYCH / INFINITESYMAŁNYCH
DYNAMIK), O KTOREJ MÓWI...

Def. 19. ALGEBROID LIEGO RZĘDU R NAD $M \in \text{Man}^\infty$

TO TRÓJKA $((\Sigma, M, \mathbb{R}^{xR}, \pi_\Sigma), \alpha_\Sigma, [\cdot, \cdot]_\Sigma)$ ZŁOŻONA Z

(*) WIĄZKI WEKTOROWEJ $(\Sigma, M, \mathbb{R}^{xR}, \pi_\Sigma)$ $\mathbb{R}^{xR} \hookrightarrow \Sigma$
 $\downarrow \pi_\Sigma$
 M ;

(**) WERTYKALNEGO (TJ. PORÓWNAJĄCEGO id_M)

MORFIZMU WIĄZKI WEKTOROWYCH, $\Sigma \xrightarrow{\alpha_\Sigma} TM$
 $\pi_\Sigma \downarrow \quad \quad \downarrow \pi_{TM}$
 $M \xlongequal[\text{id}_M]{} M$
 JW. KOTWICA ;

(***) OPERACJI BINARNEJ $[\cdot, \cdot]_\Sigma : \Gamma(\Sigma) \times \Gamma(\Sigma) \rightarrow \Gamma(\Sigma)$

O WŁASNOŚCIACH (A1) $[\cdot, \cdot]_\Sigma$ JEST NAWIĄZEM LIEGO ;

(A2) $[\cdot, \cdot]_\Sigma$ SPEŁNIA WARUNKIŁY TÓŻSAMOŚCI LEIBNITZA

$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \Gamma(\Sigma), f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : [\varepsilon_1, f \circ \varepsilon_2]_\Sigma = f \circ [\varepsilon_1, \varepsilon_2]_\Sigma + \alpha_\Sigma(\varepsilon_1)(f) \circ \varepsilon_2$. (141)

z.p., NA ĆWICZENIACH ZOSTANIE OKREŚLONY ALGEBROID
DZIAŁANIA

INDUKOWANY W OBECNOŚCI DZIAŁANIA GŁADKIEGO

$\lambda : G \rightarrow \text{Diff}(M)$ GRUPY LIEGO G NA $M \in \text{Man}^\infty$.

JEST TO $M \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\alpha \equiv \kappa} TM$, GDZIE κ JEST

$$\begin{array}{ccc} M \times \mathfrak{g} & \xrightarrow{\alpha \equiv \kappa} & TM \\ m_1 \downarrow & & \downarrow T\pi \\ M & \xlongequal{\quad} & M \end{array}$$

POLEM FUNDAMENTALNYM $\lambda :$

$$\kappa : M \times \mathfrak{g} \rightarrow TM, (m, X) \mapsto -T_{(e_m)} \tilde{\lambda}(X, \overset{0}{\underset{m}{\underset{TM}{\text{O}}}}_{\text{in } M})$$

DLA $\tilde{\lambda} : G \times M \xrightarrow{C^\infty} M, (g, m) \mapsto \lambda_g(m).$

NA ZACIOBNIE TEJ CZĘŚCI WYKŁADU ZAJMIEMY SIĘ TRANSPORTEM
 Pól WEKTOROWYCH WYPODNIOWYM ZE STRUKTURĄ ALGEBRAICZĄ
 WPROWADZONĄ POWIŻEJ...

W Def.10 WPROWADZILIŚMY TRANSPORT STYCZNOŚCIOWY
 WEKTORÓW (STYCZNYCH) WIDUJĄ ODWZOROWANIE CIĄDKICH

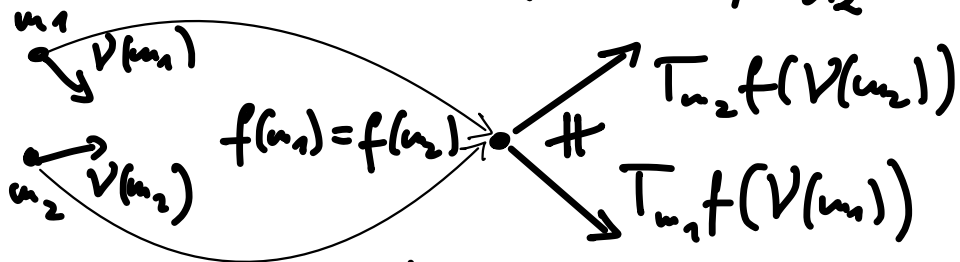
$$\begin{array}{ccc} TM_1 & \xrightarrow{Tf} & TM_2 \\ \pi_{TM_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{TM_2} \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

$$: \forall v \in T_m M_1 : T_m f(v) \in T_{f(m)} M_2.$$

PRZY PROBLE WYPODNIOWANIA TEJ OPERACJI NA PólA WEKTOROWE
 NAPOTYKAMY PROBLEMY DWÓJAKIEGO RODZAJU :

(i) f NIE JEST EPI $\Rightarrow$ NIE ISTNIEJE NATURALNY ^{KANONICZNY} SPOSÓB
 ROZSZERZENIA GŁADUEGO ROZWIĄZADU
 WEKTOROW STYCZNYCH NA $f(M_1) \not\subseteq M_2$
 DO POLA GŁADUEGO NA M_2 .

(ii) f NIE JEST MONO $\Rightarrow$ MOŻEMY NAPODROBIE $u_1, u_2 \in f^{-1}(f(u_1))$,
 W KOTÓRYCH $T_{u_1} f(V(u_1)) \neq T_{u_2} f(V(u_2))$



JEST JASNE, ŻE (ii) JEST TRUDNIEJSZY
 DO OBEJŚCIA, GDY PRÓBUJEMY NAKRYĆ...
 TO NIE REPREZENTUJE
 POLA WEKTOROWEGO
 W $f(u_1) = f(u_2)$. (144)

Def. 20. NIECHAJ $M_1, M_2 \in \text{Man}^\infty$, $f \in C^\infty(M_1, M_2)$ i $V_a \in \Gamma(TM_a)$
 $a \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

PARĘ (V_1, V_2) OKREŚLAMY MIANEM POL W f -RELACJI,

ILEUOĆ $\forall u_1 \in M_1: T_{u_1} f(V_1(u_1)) = V_2(f(u_1))$.

SZCZEGÓLNEGO RODZAJU f -RELACJE USTANAWIAMY DIFEOMORFIZM.

Skw. 20. $\forall M_1, M_2 \in \text{Man}^\infty$, $f \in \text{Diff}(M_1, M_2)$, $V \in \Gamma(TM_1)$ $\exists!$ $W \in \Gamma(TM_2)$:

(V, W) SĄ W f -RELACJI.

D: MAMY DIAGRAM PRZEMIENNY

ALÉ TEŻ $\exists f^{-1}: M_2 \xrightarrow{C^\infty} M_1$,

ZATEM TAKŻE ...

$$\begin{array}{ccc} TM_1 & \xrightarrow{Tf} & TM_2 \\ \downarrow T\pi_1 & * & \downarrow T\pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array} ,$$

$$\begin{array}{ccc}
 TM_1 & \xrightarrow{Tf} & TM_2 \\
 \pi_{TM_1} \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \pi_{TM_2} \\
 M_1 & \xleftarrow{f^{-1}} & M_2
 \end{array}
 , \text{ A STĄD }
 \begin{array}{ccc}
 TM_1 & \xrightarrow{Tf} & TM_2 \\
 \uparrow V & =: \uparrow W & \\
 M_1 & \xleftarrow{f^{-1}} & M_2
 \end{array}$$

CZYLI $W = Tf \circ V \circ f^{-1}: M_2 \rightarrow TM_2$, KĄDEG SPŁYNIA

$$\begin{aligned}
 \pi_{TM_2} \circ W &= (\pi_{TM_2} \circ Tf) \circ V \circ f^{-1} = f \circ (\pi_{TM_1} \circ V) \circ f^{-1} \\
 &= f \circ \text{id}_{M_1} \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = \text{id}_{M_2},
 \end{aligned}$$

CZYLI $W \in \Gamma(TM_2)$, A PRZY TYM TRZYWAŁOBY JEST
 CI f -RELACJI Z V . JEŚLI TAKŻE $\tilde{W} \in \Gamma(TM_2)$ JEST W f -RELACJI
 Z V , TO $\forall m_2 \in M_2: \tilde{W}(m_2) = \tilde{W}(f(f^{-1}(m_2))) = T_{f^{-1}(m_2)} f(V(f^{-1}(m_2))) = W(f(f^{-1}(m_2))) = W(m_2)$. $\square$ (46)

МАММ

8.10.20. $\forall M_1, M_2 \in \text{Man}^\infty, f \in C^\infty(M_1, M_2), V_a \in \Gamma(TM_1), W_a \in \Gamma(TM_2), a \in \{1, 2\} :$

$(V_a, W_a) \text{ w } f\text{-RELATION} \Rightarrow ([V_1, V_2]_{TM_1}, [W_1, W_2]_{TM_2}) \text{ w } f\text{-RELATION},$
 $\forall a \in \{1, 2\}$

Д. $\forall m \in M_1 : T_m f([V_1, V_2]_{TM_1}(m)) = [W_1, W_2]_{TM_2}(f(m)).$

Д: СПРАВЛЯЕМЫЕ СЛУЖИВ — В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МАР:

$\kappa = (x^\mu)$ НА ОТОБРАЖЕНИИ $\Theta \ni m \in M_1$
 $\tilde{\kappa} = (y^\alpha) \text{ — } | \text{ — } \tilde{\Theta} \ni f(m) \in M_2,$

В КООРИНАТАХ $V_a|_\Theta = V_a^\mu \partial_\mu ; W_a|_{\tilde{\Theta}} = W_a^\alpha \partial_\alpha$. ЗАКЛЮДИ
 $T_m f([V_1, V_2]_{TM_1}(m)) = T_m f((V_1^\nu \partial_\nu V_2^\mu - V_2^\nu \partial_\nu V_1^\mu)(m) \partial_\mu(m))$

$$\begin{aligned}
 &= (V_1^\nu \partial_\nu V_2^\mu - V_2^\nu \partial_\nu V_1^\mu)(m) \frac{\partial (y^a \circ f \circ \kappa^{-1})}{\partial x^\mu}(\kappa(m)) \partial_a (f(m)) \\
 &\equiv \left(V_1^\nu \partial_\nu \left(V_2^\mu \frac{\partial (y^a \circ f \circ \kappa^{-1})}{\partial x^\mu}(\kappa(\cdot)) \right) - V_2^\nu \partial_\nu \left(V_1^\mu \frac{\partial (y^a \circ f \circ \kappa^{-1})}{\partial x^\mu}(\kappa(\cdot)) \right) \right)(m) \partial_a (f(m)) \\
 &\quad - \underbrace{\left(V_1^\nu \frac{\partial^2 (y^a \circ f \circ \kappa^{-1})}{\partial x^\nu \partial x^\mu}(\kappa(\cdot)) V_2^\mu - V_2^\nu \frac{\partial^2 (y^a \circ f \circ \kappa^{-1})}{\partial x^\nu \partial x^\mu}(\kappa(\cdot)) V_1^\mu \right)(m) \partial_a (f(m))}_{= 0, \text{ bo } \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^\nu \partial x^\mu}}
 \end{aligned}$$

(V_a, W_a) w f-rezon

$$\begin{aligned}
 &\equiv \left(V_1^\nu \partial_\nu (W_2^a \circ f) - V_2^\nu \partial_\nu (W_1^a \circ f) \right) \partial_a (f(m)) \\
 &\stackrel{\text{REGULA LEIBNITSA}}{=} \left(V_1^\nu(\cdot) \partial_\nu W_2^a(f(\cdot)) \frac{\partial (y^a \circ f \circ \kappa^{-1})}{\partial x^\nu}(\kappa(\cdot)) - V_2^\nu(\cdot) \partial_\nu W_1^a(f(\cdot)) \frac{\partial (y^a \circ f \circ \kappa^{-1})}{\partial x^\nu}(\kappa(\cdot)) \right)(m) \partial_a (f(m))
 \end{aligned}$$

(148)

$$\begin{aligned}
 &= ((W_1^b \circ f)(x) \partial_\beta W_2^a(f(\cdot)) - (W_2^b \circ f)(\cdot) \partial_\beta W_1^a(f(\cdot)))(u) \partial_a(f(u)) \\
 &\equiv [W_1, W_2]_{TM_2}(f(u)) \quad \square
 \end{aligned}$$

W szczególności dostajemy przydatne

Cor. 2. Pchnięcie wzdłuż dyfeomorfizmu zachowuje komutatory pól wektorowych, tj.

$\forall M_1, M_2 \in \text{Man}^\infty, f \in \text{Diff}(M_1, M_2), V_1, V_2 \in \Gamma(TM_1)$:

$$f_* [V_1, V_2]_{TM_1} = [f_* V_1, f_* V_2]_{TM_2}.$$

D.: Oczwista.