GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA

I ; II VARIETÉ

25/2 ; 4/3

2025/26

Chapter I

STRUKTURA LINIOWA NA ZBIORACH $\mathbb{R}^{n}$, $n \in \mathbb{N}^{*}$ CZYNI Z NICH WDZIĘCZNY OBIEKT ANALIZY:

- MNOGOŚĆ NATURALNYCH WYBORÓW WSPÓŁRZĘDNYCH (NIEMAL) GLOBALNYCH;
- PROSTOTA RÓŻNICZKOWANIA FUNKCJI $\mathbb{R}^{m} \to \mathbb{R}^{n}$ I POKREWNEGO POJĘCIA GŁADKOŚCI;
- KANONICZNY OPIS RUCHU (PRĘDKOŚCI), JEGO PRZYCZYN (SIŁY) I OGÓLNYCH FORM I GĘSTOŚCI;
- ELEMENTARNA TEORIA CAŁKOWANIA;
- KANONICZNA (EUKLIDESOWA) STRUKTURA METRYCZNA...

Powyższe przykłady są naturalnie pojedyncze przez sub-geometrie zanurzone w $\mathbb{R}^{\times n}$,

- k-powierzchnię sparametryzowane

$$x : \mathcal{P}_k \to \mathbb{R}^{\times n}, \quad n > k$$
$$\hat{\mathbb{R}}^{\times k} \quad \sigma_k T x = k$$

- k-powierzchnię więzów

$$W^{-1}(\{0\}), \quad W : \mathbb{R}^{\times n} \to \mathbb{R}^{\times n-k}, \quad n > k$$
$$\dim_{\mathbb{R}} \ker TW = k$$

Pożądana wydaje się wszakże możność abstrahowania od geometrii zanurzenia – ot, choćby po to, by móc opisać... WSZECHŚWIAT.

Znajdujący nieznaczną lekkość bytu w $\mathbb{R}^n$, zasadnym wydaje się przyjęcie zasady przybliżającej:

LOKALNIE WSZYSTKO, CO ISTOTNE, WYGLĄDA JAK (w) $\mathbb{R}^n$.

Trzeba jeszcze „tylko" nadać sens formalny słowom „LOKALNIE", „ISTOTNE" i „WYGLĄDA"...

Właśnie TO będzie przedmiotem naszych rozważań.

1° NAJBARDZIEJ ELEMENTARNEGO POJĘCIA „LOKAL"-NOŚCI DOSTARCZA TOPOLOGIA ...

KATEGORIA Top :

DEF. 1. PRZESTRZEŃ TOPOLOGICZNA TO PARA $(X, \mathcal{T}(X))$ ZŁOŻONA ZE

* ZBIORU X
* PODZBIORU $\mathcal{T}(X) \subset 2^X$, ZW. TOPOLOGIĄ NA X,

O WŁASNOŚCIACH

(T1) $\mathcal{T}(X) \ni \emptyset, X$;

(T2) $\forall\, \tau \subset \mathcal{T}(X) : \bigcup_{\sigma \in \tau} \sigma \in \mathcal{T}(X)$;

(T3) $\forall\, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{T}(X) : \sigma_1 \cap \sigma_2 \in \mathcal{T}(X)$.

ELEMENTY $\mathcal{T}(X)$ NAZYWAMY ZBIORAMI OTWARTYMI w X.

MORFIZMEM PRZESTRZENI TOPOLOGICZNYCH $(X_\alpha, \mathcal{T}(X_\alpha))$, $\alpha \in \{1,2\}$, ALBO INACZEJ ODWZOROWANIEM CIĄGŁYM, NAZYWAMY ODWZOROWANIE MIĘDZY ZBIORAMI $f : X_1 \to X_2$ O WŁASNOŚCI $\forall\, \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_2) : f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}(X_1)$.

IZOMORFIZM NOSI W TYM PRZYPADKU NIANO HOMEOMORFIZMU.

PRZESTRZENIE TOPOLOGICZNE WRAZ Z ODWZOROWANIAMI CIĄGŁYMI POMIĘDZY NIMI TWORZĄ KATEGORIĘ TOPOLOGICZNĄ

Top.

E.G. 1 NA $\mathbb{R}^{xn}$ ISTNIEJE NATURALNA TOPOLOGIA GENEROWANA PRZEZ KULE OTWARTE $B_n(x_0, r) := \{ x \in \mathbb{R}^{xn} \mid d_E(x, x_n) < r \}$, ZDEFINIOWANE PRZY UŻYCIU STANDARDOWEJ ODLEGŁOŚCI EUKLIDESOWEJ $d_E(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$ DLA $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

POWYŻSZE ZDANIE OZNACZA, ŻE $\mathcal{O} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{xn})$ JEST SUMĄ DOWOLNEJ KOLEKCJI PRZECIĘĆ SKOŃCZONYCH KOLEKCJI KUL OTWARTYCH.

ODTĄD BĘDZIEMY ZAKŁADAĆ TEN WŁAŚNIE WYBÓR TOPOLOGII NA $\mathbb{R}^{xn}$.

CELEM UNIKNIĘCIA ROZMAITYCH PATOLOGII NA TOPOLOGIĘ FORMALIZUJĄCĄ POJĘCIE „LOKAL"-NOŚCI NARZUCAMY PEWNE OGRANICZENIA, KTÓRE PRECYZUJĄ PONIŻSZE

DEF. 2. NIECH $(X, \mathcal{T}(X)) \in \mathrm{Top}$. TOPOLOGIĘ $\mathcal{T}(X)$ NAZYWAMY HAUSDORFFOWSKĄ, JEŚLI DOWOLNE DWA NIETOŻSAME PUNKTY ZAWIERAJĄ SIĘ W PEWNYCH ROZŁĄCZNYCH ZBIORACH OTWARTYCH,

$$\forall x, y \in X : \left(x \neq y \Rightarrow \exists\, \mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y \in \mathcal{T}(X) : \begin{cases} (x,y) \in \mathcal{O}_x \times \mathcal{O}_y \\ \mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \emptyset \end{cases} \right)$$

E.G., $(\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R})_{\sim}$, $(x,1) \sim (x,2)$ DLA $x \neq 0$

Z TOPOLOGIĄ DZIEDZICZONĄ Z $\mathbb{R}$.

DEF. 3. PRZESTRZEŃ TOPOLOGICZNĄ $(X, \mathcal{T}(X))$ NAZYWAMY PARAZWARTĄ, JEŚLI KAŻDE JEJ POKRYCIE OTWARTE

$$\mathcal{O} \subset \mathcal{T}(X) : \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U = X$$

MA ROZDROBNIENIE $\mathcal{O}' \subset \mathcal{T}(X)$:

$$\begin{cases} \bigcup_{U' \in \mathcal{O}'} U' = X \\ \forall U' \in \mathcal{O}' \; \exists U \in \mathcal{O} : U' \subset U \end{cases}$$

KTÓRE JEST LOKALNIE SKOŃCZONE, TJ.

$$\forall x \in X \; \exists \mathcal{O}_x \in \mathcal{T}(X) : \left(\mathcal{O}_x \ni x \wedge \left| \{ U' \in \mathcal{O}' \mid U' \cap \mathcal{O}_x \neq \emptyset \} \right| < \infty \right)$$

PRZYKŁADY SĄ ZAZWYCZAJ DOŚĆ „DZIKIE", WIĘC NIE BĘDZIEMY ICH ROZWIJAĆ.

DRUGIE ZE SŁÓW PODDAWANYCH FORMALIZACJI:

„WSZYSTKO"

JEST WYGŁUWANIE POJEMNE, PRZEJDZIEMY PRZETO DO SŁOWA TRZECIEGO, KTÓREGO DOPRECYZOWANIU WYZNACZY NATURALNE RAMY TEJ POJEMNOŚCI...

3° WYBÓR 3 PUNKTU 1° PODPOWIADA — PRZY BRAKU DODATKOWEJ STRUKTURY A PRIORI - NATURALNY SENS „WYGLĄDA"-NIA: DO MODELOWANIA UŻYWAMY IZOMORFIZMÓW Z KATEGORII, DO KTÓREJ NALEŻY I TO, CO MODELOWANE, I TO, CO MODELUJE, CZYLI Top.

ABY MODELOWANIE TAKIE UCZYNIĆ EFEKTYWNYM, TJ. ABY UMODELOWAĆ CAŁĄ INTERESUJĄCĄ NAS PRZESTRZEŃ TOPOLOGICZNĄ, MUSIMY DOPUŚCIĆ NIEPUSTE PRZECIĘCIA OTWARTYCH DZIEDZIN MODELUJĄCYCH HOMEOMORFIZMEM. NATURALNYM WARUNKIEM SPÓJNOŚCI PROCEDURY MODELOWANIA STAJE SIĘ WÓWCZAS ZGODNOŚĆ (POD-) MODELI TYCHŻE PRZECIĘĆ W RAMACH STRUKTURY OBCZNEJ NA PRZESTRZENI MODELUJĄCEJ $\mathbb{R}^{xn}$ — TU POJAWIA SIĘ SWOBODA WYNIKAJĄCA Z BOGACTWA STRUKTURY NA $\mathbb{R}^{xn}$: MOŻEMY OTÓŻ ŻĄDAĆ IZOMORFICZNOŚCI O DOWOLNYM STOPNIU GŁADKOŚCI

PO TYCH ROZWAŻANIACH PRZYGOTOWUJĄCYCH MOŻEMY JUŻ WRESZCIE WYSTOWIĆ DEFINICJĘ STRUKTURY BĘDĄCEJ PRZEDMIOTEM NASZEGO ZAINTERESOWANIA:

DEF. 4. USTALMY $n \in \mathbb{N}$ ORAZ $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$.

n-WYMIAROWĄ ROZMAITOŚCIĄ RÓŻNICZKOWĄ KLASY (GŁADKOŚCI) C^k TO PARA $((X, \mathcal{T}(X)), [(\mathcal{O}, \kappa)])$ ZŁOŻONA Z

* PARAZWARTEJ PRZESTRZENI TOPOLOGICZNEJ $(X, \mathcal{T}(X))$ O TOPOLOGII HAUSDORFFOWSKIEJ $\mathcal{T}(X)$;
* KLASY RÓWNOWAŻNOŚCI PAR $(\mathcal{O}, \kappa)$, ZWANYCH ATLASAMI I ZŁOŻONYCH Z POKRYCIA OTWARTEGO $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ PRZESTRZENI $(X, \mathcal{T}(X))$ WRAZ Z RODZINĄ

HOMEOMORFIZMÓW $\{\kappa_i : \Theta_i \xrightarrow{\cong} U_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)\}_{i\in I}$, ZWANYCH LOKALNYMI MAPAMI LUB UKŁADAMI WSPÓŁRZĘDNYCH

I SPEŁNIAJĄCYMI WARUNKI ZGODNOŚCI:

$$\forall i,j\in I : \Theta_j \equiv \Theta_i \cap \Theta_j \neq \emptyset \Rightarrow \kappa_i \circ \kappa_j^{-1}\Big|_{\kappa_j(\Theta_{ij})} \in C^k(\kappa_j(\Theta_{ij}), \kappa_i(\Theta_{ij})), \quad (W3)$$

ODWZOROWANIA PRZEJŚCIA

PRZY CZYM RÓWNOWAŻNOŚĆ ATLASÓW KLASY C^k ZACHODZI WÓWCZAS, GDY ICH KONKATENACJA JEST ATLASEM TEJ SAMEJ KLASY C^k.

W PRZYPADKACH SZCZEGÓLNYCH MÓWIMY O

* ROZMAITOŚCIACH TOPOLOGICZNYCH, GDY $k=0$;
* ROZMAITOŚCIACH GŁADKICH, GDY $k=\infty$;
* ROZMAITOŚCIACH ANALITYCZNYCH, GDY $k=\omega$.

Uwagi: (1) Warunek (W3) implikuje C^k-gładką izomorficzność pod-modeli $\kappa_i(\theta_{ij})$ i $\kappa_j(\theta_{ij})$.

(2) Z relacji równoważności atlasów można wyabstrahować pojęcie **atlasu maksymalnego**, będącego formalną konkatenacją wszystkich atlasów równoważnych.

E.g., (i) 2-sfera jako rozmaitość gładka:

Pokrywamy $\mathbb{S}^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2-1=0\}$

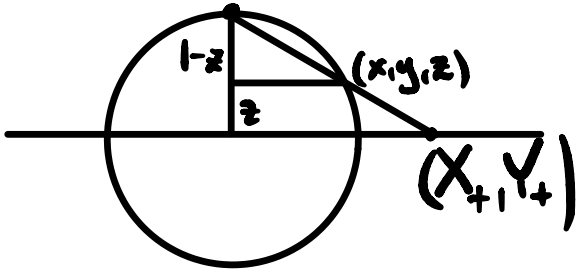
Dwoma zbiorami otwartymi:

$$\mathbb{S}^2_{\pm} := \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\}, \quad \mathbb{S}^2_+ \cup \mathbb{S}^2_- = \mathbb{S}^2$$

o przecięciu $\mathbb{S}^2_+ \cap \mathbb{S}^2_- = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1),(0,0,-1)\} \equiv \mathbb{S}^2_{+-}$

JAKO MODEL W OBU PRZYPADKACH WYBIERAMY $\mathbb{R}^2$, JAKO MAPY SAS – RZUTY STEREOGRAFICZNE NA PŁASZCZYZNĘ RÓWNIKOWĄ

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=0\} \equiv \mathbb{R}^2.$$



$$\kappa_+ : \mathbb{S}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

$$(z \mapsto -z) \Downarrow$$

NB: $\left(\frac{x}{1+z}\right)^2 + \left(\frac{y}{1+z}\right)^2 = \frac{1-z}{1+z}$

$$\kappa_- : \mathbb{S}^2_- \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \longmapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right)$$

$$\frac{X_+}{x} = \frac{1}{1-z} = \frac{Y_+}{y}$$

(PROPORCJE DŁUGOŚCI BOKÓW TRÓJKĄTÓW PODOBNYCH)

STĄD:

$$\kappa_+ \circ \kappa_-^{-1}\big|_{\mathbb{S}^2_{+-}} : \mathbb{D}^2_{+-} \ni (X_-,Y_-) \longmapsto \left(\frac{X_-}{X_-^2+Y_-^2}, \frac{Y_-}{X_-^2+Y_-^2}\right)$$

JAWNIE GŁADKIE I GŁADKO ODWRACALNE.

(ii) NIERÓWNOWAŻNE ATLASY NA $\mathbb{R}$:

(1) POKRYCIE $\mathcal{O} = \{\mathbb{R}\}$; MAPA $id_{\mathbb{R}} : \mathcal{O} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$

(2) —"— $\mathcal{O}' = \{\mathbb{R}\}$; —"— $\kappa : \mathcal{O}' \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$

ODWZOROWANIA PRZEJŚCIA $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}' = \mathbb{R}$

$$id_{\mathbb{R}} \circ \kappa^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt[3]{x}$$ NIE JEST KLASY C^∞!

CAŁEJ KLASY PRZYKŁADÓW DOSTARCZA

Stw. 1. NIECHAJ $((X_\alpha, \mathcal{T}(X_\alpha)), [(\mathcal{O}_\alpha, \kappa_\alpha)])$, $\alpha \in \{1,2\}$ BĘDĄ ROZMAITOŚCIAMI RÓŻNICZKOWYMI KLASY C^k. WÓWCZAS PRODUKT KARTEZJAŃSKI $X_1 \times X_2$ DZIEDZICZY W KANONICZNY SPOSÓB STRUKTURĘ ROZMAITOŚCI RÓŻNICZKOWEJ ZE SWYCH CZYNNIKÓW.

D: WYPOSAŻMY $X_1 \times X_2$ W TOPOLOGIĘ PRODUKTOWĄ, A WÓWCZAS $\{\mathcal{O}_{1i_1} \times \mathcal{O}_{2j_2}\}_{(i_1,j_2)\in I_1\times I_2}$ JEST POWYCIĘM WSPÓŁRZĘDNIOWYM $X_1 \times X_2$, NA KTÓRYM SĄ OKREŚLONE MAPY LOKALNE

$$\varkappa_{(i_1,j_2)} := \kappa_{i_1} \times \kappa_{j_2} : \mathcal{O}_{1i_1} \times \mathcal{O}_{2j_2} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{U}_{1i_1} \times \mathcal{U}_{2j_2} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{n_1}) \times \mathcal{T}(\mathbb{R}^{n_2}).$$

W NASTĘPNEJ KOLEJNOŚCI ROZPATRZYMY NATURALNE POJĘCIE MORFIZMU POMIĘDZY ROZMAITOŚCIAMI RÓŻNICZKOWYMI TEJ SAMEJ KLASY C^k, WYKORZYSTUJĄCE IZOMORFIZMY MODELUJĄCE I STRUKTURĘ MODELU.

DEF. 5.: NIECHAJ $((X_a, \mathcal{T}(X_a), [(\mathcal{O}_a, \kappa_a)]))$, $a \in \{1,2\}$ BĘDĄ ROZMAITOŚCIAMI RÓŻNICZKOWYMI KLASY C^k ODNOŚNYCH WYMIARÓW n_a I NIECH $f: X_1 \to X_2$ BĘDZIE ODWZOROWANIEM. WÓWCZAS POWIEMY, ŻE

f JEST KLASY C^k,

JEŚLI DLA KAŻDEJ LOKALNEJ MAPY $\kappa_{1\alpha}: \mathcal{O}_{1\alpha} \xrightarrow{\cong} U_{1\alpha} \subset \mathbb{R}^{n_1}$ ORAZ DOWOLNEJ —"— $\kappa_{2\beta}: \mathcal{O}_{2\beta} \xrightarrow{\cong} U_{2\beta} \subset \mathbb{R}^{n_2}$ O WŁASNOŚCI $\mathcal{O}_{\alpha\beta} := \mathcal{O}_{2\beta} \cap f(\mathcal{O}_{1\alpha}) \neq \emptyset$ SPEŁNIONY JEST WARUNEK:

$$\kappa_{2\beta} \circ f \circ \kappa_{1\alpha}^{-1} \Big|_{\kappa_{1\alpha}(f^{-1}(\mathcal{O}_{2\beta}))} \in C^k\left(\kappa_{1\alpha}(f^{-1}(\mathcal{O}_{2\beta})), U_{2\beta}\right)$$

ZBIÓR TAKICH ODWZOROWAŃ OZNACZAMY SYMBOLEM $C^k(X_1, X_2)$.

JEŻELI f JEST ODWRACALNE I $f^{-1} \in C^k(X_2, X_1)$, NAZYWAMY JĄ DYFEOMORFIZMEM KLASY C^k.

ZBIÓR DYFEOMORFIZMÓW KLASY C^k OZNACZAMY SYMBOLEM

$$Diff^k(X_1, X_2).$$

W PRZYPADKU $k=\infty$ MÓWIMY O ODWZOROWANIACH GŁADKICH, OZNACZANYCH JAKO $C^\infty(X_1, X_2)$, ORAZ DYFEOMORFIZMACH (GŁADKICH), OZNACZANYCH JAKO $Diff(X_1, X_2)$. JEŚLI ZBIÓR TEN JEST NIEPUSTY, PISZEMY $X_1 \simeq X_2$ I MÓWIMY, ŻE X_1 I X_2 SĄ DYFEOMORFICZNE.

E.g.: TAUTOLOGICZNIE $(\mathbb{R}, id_{\mathbb{R}}) \simeq (\mathbb{R}, \kappa)$, GDY BOWIEM $f := \sqrt[3]{\cdot}$ SPEŁNIA $\kappa \circ f \circ id_{\mathbb{R}}^{-1} \equiv id_{\mathbb{R}}$.

BARDZIEJ WYRAFINOWANE PRZYKŁADY ROZMAITOŚCI ORAZ ODWZOROWAŃ (NIE)GŁADKICH POMIĘDZY NIMI ZOSTANĄ PRZEDSTAWIONE NA ĆWICZENIACH.

MY TYMCZASEM PÓJDZIEMY DALEJ KU „WSZYSTKIEMU".

JEST OTO BOWIEM JASNE, ŻE DEF. 4 OTWIERA PRZED NAMI MOŻLIWOŚĆ LOKALNEGO INDUKOWANIA STRUKTUR NA X Z TYCH OBECNYCH NA MODELU. POZOSTAJE ZASTANOWIĆ SIĘ NAD ICH „ZSZYWANIEM"...

ಪರಿಷ್ಕರಣೆ II

W TEJ CZĘŚCI KURSU NASZĄ AMBICJĄ BĘDZIE KLEJENIE TOŻSAMOŚCI LOKALNYCH W TOŻSAMOŚĆ GLOBALNĄ / ZBIOROWĄ. W ŚRODOWISKU GEOMETRYCZNYM CEL TEN REALIZUJĄ ... GŁADKIE ROZMAITOŚCI. PRZEKONAMY SIĘ, ŻE NASZA DEFINICJA ROZMAITOŚCI – PO STOSOWNYM UZUPEŁNIENIU – GWARANTUJE ICH ISTNIENIE, CO ROLUJE JEJ DOBROĆ. DROGA DO PRZEKONANIA BIERZE SWÓJ POCZĄTEK W POGŁĘBIONYM STUDIUM TOPOLOGII... ZACZNIEMY OD ODROBINY NORMALNOŚCI, CZYLI WZMOCNIENIA WŁASNOŚCI HAUSDORFFA...

Def. 6. PRZESTRZEŃ TOPOLOGICZNĄ $(X, \mathcal{T}(X))$ NAZWIEMY NORMALNĄ, JEŚLI DOWOLNE DWA JEJ ROZŁĄCZNE PODZBIORY DOMKNIĘTE MAJĄ ROZŁĄCZNE OTOCZENIA OTWARTE, TJ.

HAUSDORFF MÓWI O SZCZEGÓLNYCH PUNKTACH

$$\forall D_1, D_2 \text{ - DOMKNIĘTE} : \left(D_1 \cap D_2 = \emptyset \Rightarrow \exists U_1, U_2 \in \mathcal{T}(X) : D_1 \subset U_1 \wedge D_2 \subset U_2 \wedge U_1 \cap U_2 = \emptyset \right)$$

, CO ZAPISUJEMY: $D_1 \mid D_2$

Tw. 1. [DIEUDONNÉ]

$(X, \mathcal{T}(X)) \in \mathrm{Top}$ PARAZWARTA O TOPOLOGII HAUSDORFFOWSKIEJ $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}(X))$ NORMALNA.

D: POKAŻEMY NAJSAMPIERW, ŻE

$\forall x \in X$, $D \subset X$ - DOMKNIĘTY : $D \mid \{x\}$.

W TYM CELU ROZWAŻYMY POKRYCIE OTWARTE

$\widetilde{\mathcal{O}}_D := \{\mathcal{O}_d\}_{d \in D} \cup \{X \setminus D\}$, $\bigcup_{d \in D} \mathcal{O}_d \cup (X \setminus D) = X$

UTWORZONE Z DOWOLNYCH OTOCZEŃ $\mathcal{O}_d \in \mathcal{J}(X)$

ROZDZIELAJĄCYCH x i d WRAZ Z ODPOWIEDNIMI $\mathcal{O}_{x,d} \ni x$, TJ.

$\forall d \in D: \mathcal{O}_{x,d} \cap \mathcal{O}_d = \emptyset$. POKRYCIE $\widetilde{\mathcal{O}}_D$ MA - Z RACJI PARAZWARTOŚCI (DEF. 3.)

X - ROZDROBNIENIE LOKALNIE SKOŃCZONE. ALE TEŻ... (22)

LEMAT 1.: NIECH $(X, \mathcal{T}(X)) \in \mathrm{Top}$. KAŻDE LOKALNIE SKOŃCZONE ROZDROBNIENIE $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ POKRYCIA $\mathcal{O} = \{O_i\}_{i \in I}$ PRZESTRZENI X INDUKUJE ROZDROBNIENIE $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ POKRYCIA $\mathcal{U}$ O TYM SAMYM ZBIORZE INDEKSÓW I CO $\mathcal{O}$, A ZARAZEM LOKALNIE SKOŃCZONE.

DL1: JAKO ŻE $\mathcal{U}$ JEST ROZDROBNIENIEM $\mathcal{O}$, PRZETO

$$\exists\, \iota : A \to I \quad \forall \alpha \in A : U_\alpha \subset O_{\iota(\alpha)}.$$

ZDEFINIUJMY

$$(\mathcal{T}(X) \ni)\ V_i := \bigcup_{\alpha \in \iota^{-1}(\{i\})} U_\alpha \quad (= \emptyset \in \mathcal{T}(X), \text{ GDY } \iota^{-1}(\{i\}) = \emptyset).$$

ZACHODZI $V_i \subset O_i$, GDYŻ $\forall \alpha \in \iota^{-1}(\{i\}) : U_\alpha \subset O_{\iota(\alpha)} = O_i$.

JEST WIĘC $\mathcal{V} := \{V_i\}_{i\in I}$ ROZDROBNIENIEM Θ. POZA TYM

$\forall x\in X\ \exists \underset{x}{\mathcal{U}_x}\in\mathcal{T}(x) : |\{\alpha\in A \mid \mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_x\neq\emptyset\}|<\infty$ Z RACJI

LOKALNEJ SKOŃCZONOŚCI $\mathcal{U}$, CZYLI

$\exists B\subset A : \big(|B|<\infty \wedge \forall \alpha\in A\setminus B : \mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_x=\emptyset\big)$, ZATEM TAKŻE

$\forall i\in I\setminus r(B) : V_i\cap\mathcal{U}_x \equiv \bigcup_{\alpha\in r^{-1}(\{i\})\subset A\setminus B} \mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_x=\emptyset.$

WOBEC SKOŃCZONOŚCI B, JEST $|r(B)|\leq|B|<\infty$,

CZYLI – ISTOTNIE – $\mathcal{V}$ LOKALNIE SKOŃCZONE. ◻

WRACAMY DO DOWODU Tw. 1. ...

MAMY W NIM POKRYCIE $\widetilde{\mathcal{O}}_D$, DLA KTÓREGO TERAZ WYBIERAMY LOKALNIE SKOŃCZONE ROZDROBNIENIE

$$\{V_d\}_{d\in D} \cup \{\hat{D}\} : \quad V_d \subset \mathcal{O}_d, \ \hat{D} \subset X \setminus D,$$

WIĘC TEŻ $\bigcup_{d\in D} V_d \supset X \setminus \hat{D} \supset D$, CZYLI $\{V_d\}_{d\in D}$ JEST POKRYCIEM ZBIORU DOMKNIĘTEGO D, PRZY CZYM (DLA $x\in X$ JAK W 1. LINIJCE DOWODU)

$$\exists\, \mathcal{U}_x \in \mathcal{S}(x) : |\{e\in D \mid V_e \cap \mathcal{U}_x\}| < \infty, \text{ CZYLI}$$

$$\exists\, D_0 \subset D : \Big(|D_0| < \infty \wedge \forall d \in D\setminus D_0 : V_d \cap \mathcal{U}_x = \phi\Big).$$

DEFINIUJEMY $V_x := \mathcal{U}_x \cap \bigcap_{d\in D_0} \mathcal{O}_{x,d}$, $x\in X$, WTEDY

$V_x \in J(X)$, BO $|D_0| < \infty$, I PONADTO $V_x \cap \bigcup_{d \in D} V_d = \phi$,

GDYŻ U_x PRZECINA SIĘ PUSTO Z WSZYSTKIMI V_d, $d \in D \setminus D_0$,

NATOMIAST $\bigcap_{d \in D_0} \Theta_{x,d}$ - JE WSZYSTKIMI $\Theta_d \supset V_d$ O DOPEŁNIAJĄCYCH

INDEKSACH $d \in D_0$. TO DOWODZI $D \setminus \{x\}$, BO $\bigcup_{d \in D} V_d$

JEST OTOCZENIEM D.

ROZWAŻMY NASTĘPNIE PARĘ ZBIORÓW DOMKNIĘTYCH

$D_1, D_2 \subset X$. WOBEC POWYŻSZEGO DLA KAŻDEGO $d_1 \in D_1$

MAMY $\underset{\{d_1\}}{U_{d_1}} \in J(X)$ I ODNOŚNY $\underset{D_2}{U_{D_2,d_1}} \in J(X)$

O WŁASNOŚCI $U_{d_1} \cap U_{D_2 d_1} = \phi$. JEST PRZETO

$$\{U_{d_1}\}_{d_1 \in D_1} \cup \{X \setminus D_1\}$$

POKRYCIEM X, DLA KTÓREGO WYBIERAMY - NA MOCY

LEMATU 1. - LOKALNIE SKOŃCZONE PODPOKRYCIE

$$\{V_{d_1}\}_{d_1 \in D_1} \cup \{\hat{V}\} : V_{d_1} \subset U_{d_1}, \hat{V} \subset X \setminus D_1,$$

PRZY CZYM $\bigcup_{d_1 \in D_1} V_{d_1} \supset D_1$. PUNKTOM $d_2 \in D_2$ PRZYPISZMY

$U_1 := \bigcup_{d_1 \in D_1} V_{d_1}$ OBECNIE OTOCZENIA OTWARTE $\overset{d_2}{\hat{V}}_{d_2} \in \mathcal{T}(X)$ O WŁASNOŚCI

$\forall d_2 \in D_2 : V_{d_2} \cap U_1 = \phi$, A WTEDY $\bigcup_{d_2 \in D_2} V_{d_2} =: U_2$

BĘDZIE POSZUKIWANYM OTOCZENIEM D_2. KONTYNUUJEMY POPRZEDNIE ROZUMOWANIE, KORZYSTAJĄC Z LOKALNEJ SKOŃCZONOŚCI $\{V_{d_1}\}_{d_1 \in D_1} \cup \{\hat{V}\}$:

$$\forall d_2 \in D_2 \; \exists \overset{d_2}{\overset{\Uparrow}{U}}_{d_2} \in \mathcal{J}(X), \underline{D}_{d_2} \subset D_1 : \left(|\underline{D}_{d_2}| < \infty \wedge \forall d_1 \in D_1 \setminus \underline{D}_{d_2} : V_{d_1} \cap U_{d_2} = \phi \right)$$

WYBIERAMY $V_{d_2} := U_{d_2} \cap \bigcap_{d_1 \in \underline{D}_{d_2}} U_{D_2, d_1} \in \mathcal{J}(X)$ (PATRZ: STR. 26.)

$\overset{\Uparrow}{d_2}$

I DOSTAJEMY $\begin{cases} V_{d_2} \cap V_{d_1 \in \underline{D}_{d_2}} \subset U_{D_2, d_1} \cap V_{d_1} = \phi \\ V_{d_2} \cap V_{d_1 \in D_1 \setminus \underline{D}_{d_2}} \subset U_{d_2} \cap V_{d_1} = \phi \end{cases}$ □

PRZEDSTAWIONY PONIŻEJ DOWÓD WYKORZYSTUJE CECHĘ ROZDROBNIENIA POKRYCIA, JAKĄ JEST LOKALNA SKOŃCZONOŚĆ. ZATRZYMAMY SIĘ NA CHWILĘ, BY PODKREŚLIĆ JEJ OBORLIWOŚĆ:

Stw. 2. NIECHAJ $(X, \mathcal{T}(X)) \in \mathrm{Top}$ I NIECH $\{V_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}(X)$ BĘDZIE RODZINĄ LOKALNIE SKOŃCZONĄ. WÓWCZAS CECHĘ TĘ MA TAKŻE $\{\overline{V_i}\}_{i\in I}$, A NADTO ZACHODZI TOŻSAMOŚĆ

$$\bigcup_{i\in I} \overline{V_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} V_i}.$$

D: NIECH $x \in X$. DOWOLNE OTOCZENIE $\mathcal{U}_x \in \mathcal{T}(X)$ SPEŁNIA WARUNEK: $\mathcal{U}_x \cap \overline{V_i} \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{U}_x \cap V_i \neq \emptyset$. W TAKIM JEDNAK

$\exists^{x}_{\mathcal{U}_x}$

RAZE PRZECINANIE ∞ WIELU $\overline{V_i}$ IMPLIKUJE PRZECINANIE ∞ WIELU V_i, TYMCZASEM ISTNIEJĄ U_x, KTÓRE PRZECINAJĄ SKOŃCZENIE WIELE V_i, WIĘC TEŻ – SKOŃCZENIE WIELE $\overline{V_i}$.

PONADTO, RZECZ JASNA, $\bigcup_{i\in I}\overline{V_i} \subset \overline{\bigcup_{i\in I} V_i}$, GDYŻ $\forall i\in I: V_i \subset \bigcup_{j\in I} V_j \subset \overline{\bigcup_{j\in I} V_j}$ I OSTATNI NADZBIÓR JEST DOMKNIĘTY, WIĘC TEŻ $\overline{V_i} \subset \overline{\bigcup_{j\in I} V_j}$. POZOSTAJE POKAZAĆ, ŻE TAKŻE $\overline{\bigcup_{i\in I} V_i} \subset \bigcup_{i\in I}\overline{V_i}$. OCZYWIŚCIE $\bigcup_{i\in I} V_i \subset \bigcup_{i\in I}\overline{V_i}$, ZATEM WYSTARCZY POKAZAĆ, ŻE $\bigcup_{i\in I}\overline{V_i}$ JEST DOMKNIĘTY, CZYLI – RÓWNOWAŻNIE – ŻE $X\setminus\bigcup_{i\in I}\overline{V_i}$ JEST OTWARTY. NIECH $x\in X\setminus\bigcup_{i\in I}\overline{V_i}$,

A WÓWCZAS WYBIERAMY OTOCZENIE $\mathcal{U}_x^{\exists x} \in \mathcal{T}(x)$ PRZECINAJĄCE SKOŃCZONĄ LICZBĘ V_i, WIĘC TEŻ – SKOŃCZONĄ LICZBĘ $\overline{V}_i$.

MAMY: $\exists J \subset I : \left(|J| < \infty \wedge \forall i \in I \setminus J : \mathcal{U}_x \cap \overline{V}_i = \emptyset\right)$.

WYBIERZMY $\mathcal{U}_j^{\exists x} \in \mathcal{T}(x)$: $\mathcal{U}_j \subset \left(X \setminus \overline{V}_j\right) \cap \mathcal{U}_x$, $j \in J$, A WTEDY

$x \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{U}_j \in \mathcal{T}(x)$ i $\bigcap_{j \in J} \mathcal{U}_j \subset X \setminus \bigcup_{j \in J} \overline{V}_j$ ORAZ $\bigcap_{j \in I} \mathcal{U}_j \subset \mathcal{U}_x$,

WIĘC $\bigcap_{j \in J} \mathcal{U}_j \cap \overline{V}_i = \emptyset$ DLA $i \in I \setminus J$. OSTATECZNIE ZATEM

$$\bigcap_{j \in J} \mathcal{U}_j \subset X \setminus \bigcup_{i \in I} \overline{V}_i$$

, CZYLI – ISTOTNIE – $X \setminus \bigcup_{i \in I} \overline{V}_i$ OTWARTY. $\square$

MOŻEMY WREszCIE ZBADAĆ, JAK ISTNIENIE LOKALNEGO MODELU $\mathbb{R}^{\infty}$ WPŁYWA NA TOPOLOGIĘ ROZMAITOŚCI. ZACZNIEMY OD PROSTEGO

Stw. 3. NIECH MAMY $(X, \mathcal{T}(X)) \in \mathrm{Top}$ LOKALNIE EUKLIDESOWĄ, CZYLI $\forall x \in X \; \exists \, U_x \in \mathcal{T}(X), \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^N : U_x \simeq \widetilde{U}$ w Top.

WÓWCZAS $(X, \mathcal{T}(X))$ JEST LOKALNIE ZWARTA i T_2.

$\forall x \in X \; \exists \, U_x \in \mathcal{T}(X) : \overline{U}_x$ ZWARTY (CZYLI U_x PRZEZWARTY).

D: OCZYWISTA KONSEKWENCJA ISTNIENIA LOKALNEGO MODELU $\mathbb{R}^{\infty}$, W KTÓRYM – W LOKALNEJ MAPIE $\kappa : \mathcal{O}_i \xrightarrow{\simeq} U_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^N)$ WYCENTROWANEJ NA $x \equiv \kappa^{-1}(0)$ – ZACHODZI: $\exists \varepsilon > 0 : \overline{B_N(0;\varepsilon)} \subset \kappa(U_x \cap \mathcal{O}_i)$.

KULA DOMKNIĘTA $\overline{B_N(0;\varepsilon)}$ JEST ZWARTA W MODELU $U_i \subset \mathbb{R}^N$, WIĘC TEŻ JEJ HOMEOMORFICZNY OBRAZ $\kappa^{-1}(\overline{B_N(0;\varepsilon)})$ JEST ZWARTY W $\kappa^{-1}(U_i)$, A W NIM $\kappa^{-1}(\overline{B_N(0;\varepsilon)}) \subset \mathcal{U}_x$. □

W NASTĘPNYM KROKU WYJAŚNIMY SENS POJĘCIA LOKALNEJ ZWARTOŚCI (WIĘC LOKALNEJ EUKLIDESOWOŚCI) I PARAZWARTOŚCI, CO STANOWI ISTOTNY KROK NA DRODZE DO KONSTRUKCJI GŁADKICH ROZKŁADÓW JEDNOŚCI I... CAŁKOWANIA.

Tw. 2. (ZA [C.T.C. WALLEM, Prop. A.2.8.(ii)])
ŁUKOWO SPÓJNA SKŁADOWA LOKALNIE ZWARTEJ PRZESTRZENI PARAZWARTEJ MA PRZELICZALNE, GWIAŹDZISTE SKOŃCZONE POKRYCIE ZBIORAMI ZWARTYMI, TJ. TAKIE, KTÓREGO KAŻDY ELEMENT MA NIEPUSTE PRZECIĘCIE ZE SKOŃCZONĄ LICZBĄ POZOSTAŁYCH.

D: LOKALNA ZWARTOŚĆ POZWALA POKRYĆ $(X, \mathcal{T}(X))$ ZBIORAMI PRZEZWARTYMI $\{U_x\}_{x\in X} \subset \mathcal{T}(X)$ ($\overline{U}_x$ ZWARTY). NA MOCY PRZEZWARTOŚCI OTRZYMUJEMY Z TEGO POKRYCIA JEGO LOKALNIE SKOŃCZONE ROZDROBNIENIE $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}(X)$, PRZY CZYM $\forall i\in I: \overline{\mathcal{O}_i} \subset \overline{U}_x$ JEST ZWARTY JAKO DOMKNIĘTY PODZBIÓR ZBIORU ZWARTEGO. WOBEC LOKALNEJ SKOŃCZONOŚCI $\mathcal{O}$ KAŻDY PUNKT $x\in\overline{\mathcal{O}_i}$ MA OTOCZENIE $V_x \in \mathcal{T}(X)$, KTÓRE PRZECINA SKOŃCZONĄ LICZBĘ ELEMENTÓW $\mathcal{O}$. OTOCZENIA TE SKŁADAJĄ SIĘ NA POKRYCIE $\overline{\mathcal{O}_i}$, Z KTÓREGO MOŻEMY WYBRAĆ PODPOKRYCIE SKOŃCZONE Z RACJI ZWARTOŚCI $\overline{\mathcal{O}_i}$. TO SKOŃCZONE POKRYCIE,

ZATEM i CAŁE Θ_i, PRZECINA SKOŃCZONĄ LICZBĘ ELEMENTÓW Θ, CO DOWODZI GWIAŹDZISTEJ SKOŃCZONOŚCI Θ. POZOSTAJE POZBYĆ SIĘ, JEŚLI JEST PRZELICZALNE.

W TYM CELU WYBIERAMY DOWOLNY JEGO ELEMENT Θ_{j_0} I USTALAMY WSZYSTKIE ELEMENTY $\Theta_{(1)} = \{\Theta_{j_1}\}_{j_1 \in J_1 \subset \mathbb{N}_{\neq 0}}$ O WŁASNOŚCI $\forall_{j_1 \in J_1}: \Theta_{j_1} \cap \Theta_{j_0} \neq \emptyset$. OCZYWIŚCIE $|J_1| < \infty$. NASTĘPNIE USTALAMY WSZYSTKIE ELEMENTY $\Theta_{(2)} = \{\Theta_{j_2}\}_{j_2 \in J_2}$ O WŁASNOŚCI $\forall_{j_2 \in J_2} \exists_{j_1 \in J_1}: \Theta_{j_2} \cap \Theta_{j_1} \neq \emptyset$ $|J_2| < \infty$ $J_2 \setminus J_1 \neq \emptyset$ (POZA TYCH DOTYCHCZAS WSKAZANYCH). W ANALOGICZNY SPOSÓB WYRÓŻNIAMY PODZBIORY $\Theta_{(3)}, \Theta_{(4)}, \ldots$

O MOCACH $|J_3| < \infty$ $|J_4| < \infty$

JEŚLI PRZEJŚCIE Z $\Theta_{(n)}$ DO $\Theta_{(n+1)}$ (DLA $n \in \mathbb{N}$ i $\Theta_{(0)} \equiv \{\Theta_{j_0}\}$) WYOBRAŻAĆ SOBIE JAKO „KROK" NA GRAFIE O WIERZCHOŁKACH INDEKSOWANYCH PRZEZ KOLEJNE J_n (DLA $J_0 \equiv \{j_0\}$), TO DOSTAJEMY TYM SPOSOBEM GRAF O WIERZCHOŁKACH O SKOŃCZONEJ WALENCJI, PRZY CZYM SPÓJNOŚĆ X IMPLIKUJE SPÓJNOŚĆ GRAFU, A TAKI MA PRZECIĘTNY ZBIÓR WIERZCHOŁKÓW, CO JEST ZNANYM FAKTEM.

AŻEBY TO SOBIE UZMYSŁOWIĆ, ZAUWAŻMY, ŻE ŁUKOWA SPÓJNOŚĆ X OZNACZA MOŻLIWOŚĆ POŁĄCZENIA DOWOLNEGO PUNKTU $x \in X$ Z USTALONYM PUNKTEM $x_0 \in \Theta_{j_0}$ KRZYWĄ ZWARTĄ, KTÓREJ POKRYWA SKOŃCZONA LICZBA ELEMENTÓW Θ,

CO OZNACZA SKOŃCZONĄ LICZBĘ UKŁADÓW (JW) POTRZEBNYCH NA DOTARCIE Z x_0 DO x. JEST ZATEM PRAWDĄ, ŻE $\forall x \in X \; \exists n \in \mathbb{N} : x \in \bigcup_{j_n \in J_n} \Theta_{j_n} \subset \bigcup_{j_n \in J_n} \overline{\Theta}_{j_n}$, CZYLI TEŻ

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{j_n \in J_n} \overline{\Theta}_{j_n} \right),$$

A PONIEWAŻ $\forall n \in \mathbb{N} : |J_n| < \infty$, PRZETO $\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} J_n \right| \leqslant \aleph_0$. □

WNIOSEK: DLA ZACHOWANIA POWYŻSZEJ WYGODNEJ WŁASNOŚCI I INNYCH, KTÓRE WYPROWADZIMY PONIŻEJ, WARTO ZAŁOŻYĆ – I BĘDZIEMY TO ODTĄD CZYNIĆ – ŻE PRZESTRZEŃ TOPOLOGICZNA Z DEF. 4. MA PRZEZNACZALNIE WIELE SKŁADOWYCH (ŁUKOWO) SPÓJNYCH

POPRZEDNIE TWIERDZENIE ODGRYWA KLUCZOWĄ ROLĘ W PROCEDURZE INDUKCJI STRUKTUR GLOBALNIE GŁADKICH NA ROZMAITOŚCI Z TAKICH, KTÓRE ISTNIEJĄ I SĄ GŁADKIE LOKALNIE (NP. FORM RÓŻNICZKOWYCH I INNYCH TENSORÓW). DALSZA NASZA ANALIZA ROZWIJA SIĘ W TYM WŁAŚNIE KIERUNKU...

Tw. 3. [O WYCZERPANIU ZWARTOŚCIĄ]

NIECH $(X, \mathcal{T}(X)) \in \mathrm{Top}$ LOKALNIE ZWARTA BĘDZIE SUMĄ MNOGOŚCIOWĄ PRZELICZALNEJ RODZINY ZBIORÓW ZWARTYCH. WÓWCZAS ISTNIEJĄ ZBIORY ZWARTE K_n, $n \in \mathbb{N}$ POKRYWAJĄCE $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ WRAZ Z OTWARTYMI $V_{n+\frac{1}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$ SPEŁNIAJĄCYMI WARUNKI

$$\forall_{n \in \mathbb{N}}: \; K_n \subset V_{n+\frac{1}{2}} \subset K_{n+1}.$$

D: NIECHAJ $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ BĘDZIE RODZINĄ ZBIORÓW ZWARTYCH, O KTÓREJ MOWA W TREŚCI TWIERDZENIA. DEFINIUJEMY

$$K_0 := B_0.$$

WOBEC LOKALNEJ ZWARTOŚCI X KAŻDY PUNKT $x \in K_0 \cup B_1$ MA OTOCZENIE $U_x \in \mathcal{T}(X)$: $\overline{U_x}$ ZWARTY. OTOCZENIA TAKIE POKRYWAJĄ $K_0 \cup B_1$, A PONIEWAŻ TEN JEST ZWARTY (JAKO SKOŃCZONA SUMA ZWARTYCH), PRZETO MOŻNA Z $\{U_x\}_{x\in K_0\cup B_1}$ WYBRAĆ PODPOKRYCIE $\{U_y\}_{y\in S_0 \subset K_0\cup B_1}$ SKOŃCZONE, $|S_0|<\infty$.

DEFINIUJEMY $V_1 := \bigcup_{y\in S_0} U_y$ I $K_1 := \overline{V_1} \equiv \bigcup_{y\in S_0} \overline{U_y}$ ($\Leftarrow |S_0|<\infty$, $\Rightarrow K_1$ - ZWARTY),

A NASTĘPNIE POWTARZAMY PROCEDURĘ W ODNIESIENIU DO $K_1 \cup B_2$ ITD., UZYSKUJĄC TYM SPOSOBEM RODZINY ZBIORÓW:

$$B_0 = K_0 \subset \underset{\cup}{V_{1/2}} \subset K_1 \subset \underset{\cup}{V_{3/2}} \subset K_2 \subset \underset{\cup}{V_{5/2}} \subset \dots \subset K_n \subset \underset{\cup}{V_{n+\frac{1}{2}}} \subset K_{n+1} \subset$$
$$B_1 \qquad B_2 \qquad B_3 \qquad B_{n+1}$$

O POŻĄDANYCH WŁASNOŚCIACH TOPOLOGICZNYCH, A PRZY TYM

$$X \equiv \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \subset X, \text{ czyli}$$

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n . \qquad \square$$

DZIĘKI POWYŻSZEMU MOŻEMY KONSTRUOWAĆ WYGODNE POKRYCIA ROZMAITOŚCI RÓŻNICZKOWYCH...

TW. 4. [O KULAWYM POKRYCIU]

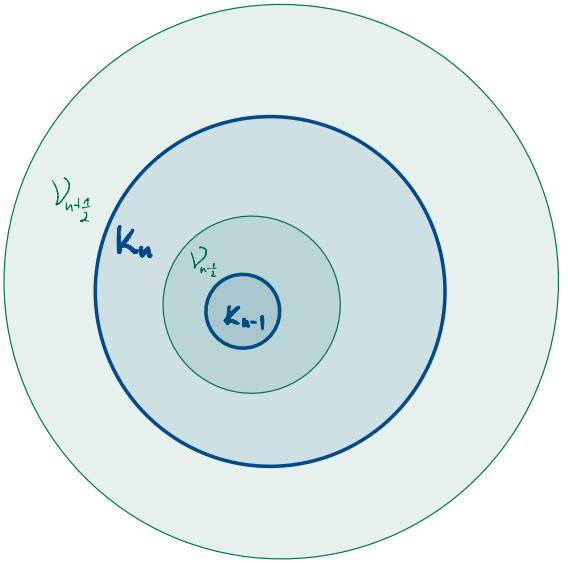
NA DOWOLNEJ N-WYMIAROWEJ ROZMAITOŚCI $(X, \mathcal{T}(X), [(\Theta, K)])$ MOŻNA WYBRAĆ ATLAS $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\cong} B_N \subset \mathbb{R}^{\times N}\}_{\alpha\in A}$ O LOKALNIE SKOŃCZONYM

POKRYCIU WSPÓŁRZĘDNIOWYM $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, PRZY CZYM $\mathcal{U}$ MOŻNA WYBRAĆ JAKO ROZDROBNIENIE DANEGO $\{\Theta_i\}_{i\in I}$.

D: MAJĄC NA UWADZE (DEF. 4. ORAZ) TW. 2. I TW. 3., WYBIERZMY RODZINY ZBIORÓW $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}^{\text{DEF.}}$ $K_{-1}=\emptyset$ (ZWARTE) I $\{V_{n+\frac{1}{2}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ (OTWARTE) JAK W TW. 3. DLA KAŻDEGO PUNKTU $x\in X$ ISTNIEJE INDEKS $n\in\mathbb{N}$ O WŁASNOŚCI $x\in K_n\setminus K_{n-1}\subset V_{n+\frac{1}{2}}\setminus K_{n-1}$, PRZY CZYM TEN OSTATNI ZBIÓR JEST OTWARTYM OTOCZENIEM x, WIĘC DOKONUJĄC EW. SKALOWANIA I TRANSLACJI (PRZECIWDZIEDZINY) LOKALNEJ MAPY $\kappa_i:\Theta_i\xrightarrow{\cong}U_i$ $\subset$ $V_{n+\frac{1}{2}}\setminus K_{n-1}$ NA OTOCZENIU $\Theta_i\ni x$ MOŻNA WYBRAĆ OTOCZENIE $\Theta_{i,x}=\kappa_i^{-1}(B_N)\ni x$ (POPRAWIONĄ MAPĘ, W OCZYWISTY SPOSÓB C^k-RÓWNOWAŻNĄ WYJŚCIOWEJ, OZNACZAMY DLA UPROSZCZENIA TYM SAMYM SYMBOLEM).

TAK SKONSTRUOWANE ZBIORY $\Theta_{i,x}$ POKRYWAJĄ $K_n \setminus V_{n-\frac{1}{2}}$ (WSZAK $V_{n-\frac{1}{2}} \supset K_{n-1}$), A PONIEWAŻ $K_n \setminus V_{n-\frac{1}{2}}$ JEST DOMKNIĘTY W ZWARTYM K_n, WIĘC JEST ZWARTY, CO OZNACZA, ŻE SPOŚRÓD $\Theta_{i,x}$ MOŻNA WYBRAĆ SKOŃCZONE PODPOKRYCIE. PRZEBIEGŁSZY WSZYSTKIE INDEKSY $n \in \mathbb{N}$ TWORZYMY TYM SPOSOBEM POKRYCIE OTWARTE $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ BĘDĄCE ROZDROBNIENIEM $\{\Theta_i\}_{i \in I}$ I ZŁOŻONE Z HOMEOMORFICZNYCH OBRAZÓW KUL OTWARTYCH.

PRZY TYM DOWOLNY PUNKT $y \in X$ MA OTOCZENIE $V_{m+\frac{1}{2}} \setminus K_{m-1}$ DLA PEWNEGO $m \in \mathbb{N}$. OTOCZENIE TO PRZECINA NIEPUSTO $V_{n+\frac{1}{2}} \setminus K_{n-1} \iff |m-n| \leq 1$, PATRZ: RYSUNEK (verte!)



WSKAZANE OTOCZENIE $V_{m+1/2} \setminus K_{m-1}$ PRZECINA ZATEM NIEPUSTO CO NAJWYŻEJ SKOŃCZONE PODPOKRYCIA $O_{i,x}$ ZAWARTE (!) W „PASACH" $V_{m+3/2} \setminus K_m$, $V_{m-1/2} \setminus K_{m-2}$ i $V_{m+1/2} \setminus K_{m-1}$. □

ZWIĘKSZENIE NASZYCH ROZWAŻAŃ (I ULGĘ) PRZYNOSZĄ ROZBIORY JEDNOŚCI ... (43)

DEF.7. NIECHAJ $(X, \mathcal{T}(X)) \in \mathrm{Top}$ I NIECH $\mathcal{O} = \{O_i\}_{i\in I}$ BĘDZIE POKRYCIEM (OTWARTYM) X. ROZKŁAD JEDNOŚCI PODPORZĄDKOWANY $\mathcal{O}$ TO RODZINA FUNKCJI CIĄGŁYCH $\{\varrho_i : X \to [0,1] \subset \mathbb{R}\}_{i\in I}$ O WŁASNOŚCIACH:

(RJ1) $\mathrm{supp}(\varrho_i) \equiv \overline{f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})} \subset O_i$, $i \in I$ $\quad =: P_i$

(RJ2) $\{\varrho_i\}_{i\in I}$ LOKALNIE SKOŃCZONA, CZYLI $\{\mathrm{supp}(\varrho_i)\}_{i\in I}$ LOKALNIE SKOŃCZONA TJ. $\forall x \in X\ \exists U_x \in \mathcal{T}(X) : |\{i \in I : P_i \cap U_x \neq \emptyset\}| < \infty$

(RJ3) $\sum_{i\in I} \varrho_i = 1$

MÓWIMY, ŻE ROZKŁAD JEDNOŚCI JEST TYPU $\mathcal{C} \subset C(X, \mathbb{R})$ (FUNKCJE CIĄGŁE), JEŻELI $\forall i \in I : \varrho_i \in \mathcal{C}$.

TW.5. [O ISTNIENIU GŁADKICH ROZKŁADÓW JEDNOŚCI]
NA DOWOLNEJ ROZMAITOŚCI $((X, \mathcal{T}(X)), [(O, k)])$ KLASY C^k ISTNIEJE ROZKŁAD JEDNOŚCI TYPU C^k PODPORZĄDKOWANY JEJ DOWOLNEMU POKRYCIU OTWARTEMU.

D: WYBIERZMY POKRYCIE KULOWE $\{\varphi_\alpha^{-1}(B_N) \equiv U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ PRZESTRZENI $(X, S(X))$ JAK W TEZIE TW. 4., PRZY CZYM ZAKŁADAMY ISTNIENIE $i: A \to I: U_\alpha \subset \bar{U}_\alpha \subset \Theta_{i(\alpha)}$. WYKORZYSTAJMY

LEMAT 2. USTALMY $N \in \mathbb{N}^*$. DLA DOWOLNEGO $r \in]0,1[$ NA $\mathbb{R}^{\times N}$ ISTNIEJE GŁADKA FUNKCJA KULOWA O PROMIENIU r

$$\Upsilon_r : \mathbb{R}^{\times N} \to [0,1], \quad x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{DLA } |x| \leq r \\ \in]0,1[& \text{DLA } r < |x| < 1 \\ 0 & \text{DLA } x \in \mathbb{R}^{\times N} \setminus B_N \end{cases},$$

PRZY CZYM $\Upsilon_r(x) = \Upsilon_r(|x|)$ i Υ_r ŚCIŚLE MALEJĄCA NA $]r,1[$.

DL 2.: NA ĆWICZENIACH.

LEMAT 2. IMPLIKUJE ISTNIENIE NA $\mathcal{U}_\alpha$ FUNKCJI C^k-GŁADKIEJ $f_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to]0,1]$ GŁADKO ZBIEGAJĄCEJ DO 0 NA $\varphi_\alpha^{-1}(\{x \in \mathbb{R}^{nN} : |x| = 1\})$, ZATEM C^k-GŁADKO PRZEDŁUŻALNEJ PRZEZ 0 DO X. ZAUWAŻMY, ŻE $\forall x \in X \; \exists \alpha \in A : f_\alpha(x) > 0$, A PRZY TYM ZBIÓR INDEKSÓW O TEJ WŁASNOŚCI JEST SKOŃCZONY Z RACJI LOKALNEJ SKOŃCZONOŚCI $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$. WOBEC TEGO MOŻEMY ZDEFINIOWAĆ $f := \sum_{\alpha \in A} f_\alpha$ (SUMA JEST LOKALNIE SKOŃCZONA!) I ZACHODZI $f > 0$.

NASTĘPNIE DEFINIUJEMY

$$\varrho_i := \sum_{\alpha \in i^{-1}(1i)} \frac{f_\alpha}{f} \in C^k(X, \mathbb{R}), \quad i \in \Sigma$$

I SPRAWDZAMY: (0) $0 \leqslant \varrho_i \leqslant 1$

(1) $\operatorname{supp}(\varrho_i) \equiv \overline{\bigcup_{\alpha \in i^{-1}(1i)} U_\alpha} \overset{\text{Stw. 1.}}{=} \bigcup_{\alpha \in i^{-1}(1i)} \overline{U_\alpha} \subset \bigcup_{\alpha \in i^{-1}(1i)} \Theta_{\iota(\alpha)} \equiv \Theta_i$

(2) $\{\operatorname{supp}(\varrho_i)\}_{i \in \Sigma}$ LOKALNIE SKOŃCZONA W ŚWIETLE Stw. 1., GDYŻ PRZECINANIE PRZEZ DOWOLNE OTOCZENIE $U_x \in \mathcal{T}(X)$ NIESKOŃCZONEGO PODZBIORU NOŚNIKÓW OZNACZAŁOBY PRZECINANIE PRZEZ U_x NIESKOŃCZONEGO PODZBIORU $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, CO PRZECZYŁOBY LOKALNEJ SKOŃCZONOŚCI $\mathcal{U}$.

WRESZCIE TEŻ

$$(3)\quad \sum_{i\in I} \varrho_i \equiv \sum_{i\in I} \sum_{\alpha\in i^{-1}(\{i\})} \frac{f_\alpha}{f} = \sum_{\alpha\in A} f_\alpha / f \equiv f/f = 1.$$

□

JAKO PRZYKŁAD PRZYDATNEGO ZASTOSOWANIA POWYŻSZEGO PODAMY

TW. 6. [O SZYCIU I ROZSZERZANIU FUNKCJI GŁADKICH]

NIECHAJ $\big((X,\mathcal{T}(X)),[(O,k)]\big)$ BĘDZIE ROZMAITOŚCIĄ KLASY C^k, $k\in\mathbb{N}$ I NIECH $\{\varrho_i\}_{i\in I}$ BĘDZIE POZIOMEM JEDNOŚCI TYPU C^k PODPORZĄDKOWANYM POKRYCIU $\mathcal{O}=\{O_i\}_{i\in I}$. DLA KAŻDEJ RODZINY $\{f_i\in C^k(O_i,\mathbb{R})\}_{i\in I}$ FUNKCJA $f: X\to\mathbb{R}$, $x\longmapsto \sum_{i\in\{j\in I\mid O_j\ni x\}} \varrho_i(x)\cdot f_i(x)$ JEST KLASY C^k.

W SZCZEGÓLNOŚCI $\forall\, \mathcal{O}\in\mathcal{T}(X)\ \forall\, C\subset U\subset\mathcal{O}$, C - DOMKNIĘTY, $U\in\mathcal{T}(X)$

$\forall\, f\in C^k(\mathcal{O};\mathbb{R})\ \exists\, \tilde{f}\in C^k(X;\mathbb{R}) : \tilde{f}|_C = f|_C \wedge \operatorname{supp}(\tilde{f})\subset U.$

D: FUNKCJE $\varphi_i\cdot f_i$ MAJĄ GŁADKIE ROZSZERZENIA PRZEZ 0 NA $X\setminus\operatorname{supp}\varphi_i$ DO FUNKCJI $\tilde{f}_i\in C^k(X;\mathbb{R})$, $i\in I$.
ROZSZERZENIA TE MOŻNA WYBRAĆ PO I, GDYŻ W DOWOLNYM PUNKCIE $x\in X$ TYLKO SKOŃCZONY ZBIÓR SKŁADNIKÓW JEST $\neq 0$ NA MOCY (RJ2). OTRZYMANĄ W TEN SPOSÓB FUNKCJĘ

$$\tilde{f} := \sum_{i\in I} \tilde{f}_i$$

JEST KLASY C^k JAKO SUMA FUNKCJI TEJ SAMEJ KLASY.

NIECHAJ TERAZ $C \subset U \subset \mathcal{O}$ JAK W TEZIE TWIERDZENIA.
ROZWAŻAMY RODZINĘ OTOCZEŃ $\{U_x\}_{x\in C}$, $U_x \subset U$ PUNKTÓW
ZBIORU C, KTÓRĄ UZUPEŁNIAMY O $U_* \equiv X \setminus C$ DO POKRYCIA

$$\tilde{\mathcal{U}} \equiv \{U_x\}_{x\in C} \cup \{U_*\} \text{ PRZESTRZENI } X.$$

WRAZ Z NIĄ ROZPATRUJEMY RODZINĘ FUNKCJI KLASY C^k:

$$f_x := f\restriction_{U_x} \in C^k(U_x; \mathbb{R}) \text{ ORAZ } f_* \equiv 0 \in C^k(U_* \equiv X\setminus C; \mathbb{R}).$$

W ŚWIETLE Tw. 5. Z POKRYCIEM $\tilde{\mathcal{U}}$ MOŻEMY STOWARZYSZYĆ
ROZKŁAD JEDNOŚCI TYPU C^k $\{\varrho_x\}_{x\in C} \cup \{\varrho_*\}$,
KTÓRY NA MOCY UDOWODNIONEJ POWYŻEJ PIERWSZEJ CZĘŚCI
TEZY TWIERDZENIA DAJE NAM FUNKCJĘ $\tilde{f} = \sum_{x\in C} \tilde{f}_x + f_* \equiv \sum_{x\in C} \tilde{f}_x$ (50)

W OCZYWISTY SPOSÓB

$$\operatorname{supp}(\tilde{f}) \equiv \overline{\tilde{f}^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})} \subset \overline{\bigcup_{x\in C} \varphi_x^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})} \overset{\text{(RJ2) + Ctw. 1.}}{=} \bigcup_{x\in C} \overline{\varphi_x^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})}$$

$$= \bigcup_{x\in C} \operatorname{supp}(\varphi_x) \subset \bigcup_{x\in C} U_x \subset \mathcal{U},$$

A NADTO $\forall y \in C$:

$$\tilde{f}(y) = \sum_{x\in C} f_x(y)\cdot\varphi_x(y) \equiv \sum_{\substack{z\in C \\ \theta_z \ni y}} f_z(y)\cdot\varphi_z(y) \equiv \sum_{\substack{z\in C \\ \theta_z \ni y}} f(y)\cdot\varphi_z(y)$$

(suma skończona)

$$\equiv f(y)\cdot\sum_{\substack{z\in C \\ \theta_z \ni y}} \varphi_z(y) \equiv f(y)\cdot\left(\sum_{x\in C}\varphi_x(y) + \varphi_*(y)\right) = f(y).$$

□