Wykład IX

2024/25

Stw. 18. Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$. Istnieje niezwyrodniała forma hermitowska

$$(\cdot|\cdot) : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$$

o własności $(\cdot|\cdot)\restriction_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}} : \mathfrak{k}\times\mathfrak{k} \longrightarrow \mathbb{R}\ (\subset \mathbb{C})_{\otimes\mathbb{C}}$ $\left(\text{dla } \mathfrak{k} \equiv \mathfrak{k}\otimes 1 \subset \mathfrak{g}''\right)$

i takiej, że działanie dołączone $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\cdot} : \mathfrak{k}''' \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$
$\equiv \mathrm{ad}_{\cdot} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$
jest unitarne w sensie wyrażonym przez

$$\forall X\in\mathfrak{k},\ Y,Z\in\mathfrak{g} : \quad (\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(Y)|Z) = -(Y|\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(Z)).$$

$\left(\overset{\cap}{\mathfrak{g}}\right)$

Zdefiniujmy anty-$\mathbb{C}$-liniową inwolucję:

$$* \ : \ \mathfrak{g} \circlearrowleft \ : \ X \otimes 1 + Y \otimes i \longmapsto -X \otimes 1 + Y \otimes i \ ,$$

$$(X, Y \in \mathfrak{k}) \qquad \equiv " \left(- \left(\overline{X \otimes 1 + Y \otimes i} \right) \right)$$

a równocześnie przyjęta forma hermitowska spełnia

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} \ : \ \left(\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_X (Y) \middle| Z \right) = \left(Y \middle| \mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{X^*} (Z) \right), \qquad (*)$$

↑ obejmuje poprzedni przypadek

czyli $\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})\dagger}_X = \mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{X^*}$.

D: Rozważmy wyróżnioną strukturę hermitowską na $\mathfrak{k}$ otrzymaną z konstruktywnego dowodu Tw. 1. dla $(V, R) \equiv (\mathfrak{k}, T_e \mathrm{Ad}.)$, względem której $dR \equiv \mathrm{ad}$ jest unitarna. Strukturę tę możemy rozszerzyć na $\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ w naturalny sposób:

$$(\cdot|\cdot)^G_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$$

$$: (X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i, X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i) \longmapsto (X_1|X_2)^G + (Y_1|Y_2)^G + i\left((X_1|Y_2)^G - (Y_1|X_2)^G\right)$$

Bez trudu przekonujemy się, że $(\cdot|\cdot)^{G}_{\mathbb{C}}$ jest niezwyrodniałą formą hermitowską na $\mathfrak{g}$. W rzeczy samej,

$$\forall\, \lambda=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}\ :\ \left(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i \,\middle|\, \lambda\triangleright(X_2\otimes 1+Y_2\otimes i)\right)^{G}_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv\left(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i \,\middle|\, (\alpha\triangleright X_2-\beta\triangleright Y_2)\otimes 1+(\alpha\triangleright Y_2+\beta\triangleright X_2)\otimes i\right)^{G}_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv\left(X_1\,\middle|\,\alpha\triangleright X_2-\beta\triangleright Y_2\right)^{G}+\left(Y_1\,\middle|\,\alpha\triangleright Y_2+\beta\triangleright X_2\right)^{G}$$

$$+\,i\left(\left(X_1\,\middle|\,\alpha\triangleright Y_2+\beta\triangleright X_2\right)^{G}-\left(Y_1\,\middle|\,\alpha\triangleright X_2-\beta\triangleright Y_2\right)^{G}\right)$$

$$= \alpha\Big((X_1|X_2)^G + (Y_1|Y_2)^G + i\big((X_1|Y_2)^G - (Y_1|X_2)^G\big)\Big)$$

81

$$+\beta\Big((Y_1|X_2)^G - (X_1|Y_2)^G + i\big((X_1|X_2)^G + (Y_1|Y_2)^G\big)\Big)$$

$$= (\alpha + i\beta)\cdot(X_1\otimes 1 + Y_1\otimes i \,|\, X_2\otimes 1 + Y_2\otimes i)^G_{\mathbb{C}}$$, e vedo

$$(X_2\otimes 1 + Y_2\otimes i \,|\, X_1\otimes 1 + Y_1\otimes i)^G_{\mathbb{C}} = (X_2|X_1)^G + (Y_2|Y_1)^G + i\big((X_2|Y_1)^G - (Y_2|X_1)^G\big)$$

$$= (X_1|X_2)^G + (Y_1|Y_2)^G - i\big((X_1|Y_2)^G - (Y_1|X_2)^G\big)$$

$x = 0 = y$?

$$= \overline{(X_1\otimes 1 + Y_1\otimes i \,|\, X_2\otimes 1 + Y_2\otimes i)^G_{\mathbb{C}}}$$

Pensato

$$(X\otimes 1 + Y\otimes i \,|\, X\otimes 1 + Y\otimes i)^G_{\mathbb{C}} = (X|X)^G + (Y|Y)^G + i\big((X|Y)^G - (Y|X)^G\big)$$

W kolejnym kroku sprawdzimy też, że kompleksyfikacja ad., dana jawnym wzorem

$$\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(Y\otimes 1 + Z\otimes i) := \mathrm{ad}_X(Y)\otimes 1 + \mathrm{ad}_X(Z)\otimes i\,, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{k}\,,$$

spełnia pożądany warunek:

$$\left(\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(X_1\otimes 1 + Y_1\otimes i) \,\middle|\, X_2\otimes 1 + Y_2\otimes i\right)^{G}_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv \left(\mathrm{ad}_X(X_1)\otimes 1 + \mathrm{ad}_X(Y_1)\otimes i \,\middle|\, X_2\otimes 1 + Y_2\otimes i\right)^{G}_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv \left(\mathrm{ad}_X(X_1) \middle| X_2\right)^{G} + \left(\mathrm{ad}_X(Y_1) \middle| Y_2\right)^{G} + i\Big(\left(\mathrm{ad}_X(X_1) \middle| Y_2\right)^{G} - \left(\mathrm{ad}_X(Y_1) \middle| X_2\right)^{G}\Big)$$

$$= -\big(X_1 \,|\, \mathrm{ad}_X(X_2)\big)^G - \big(Y_1 \,|\, \mathrm{ad}_X(Y_2)\big)^G$$

$$-i\Big(\big(X_1 \,|\, \mathrm{ad}_X(Y_2)\big)^G - \big(Y_1 \,|\, \mathrm{ad}_X(X_2)\big)^G\Big)$$

$$= -\big(X_1\otimes 1 + Y_1\otimes i \,|\, \mathrm{ad}_X(X_2)\otimes 1 + \mathrm{ad}_X(Y_2)\otimes i\big)^G_{\mathbb{C}}$$

$$= -\big(X_1\otimes 1 + Y_1\otimes i \,|\, \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(X_2\otimes 1 + Y_2\otimes i)\big)^G_{\mathbb{C}} ,$$

co pozwala nam zapostulować (w odniesieniu do tego drugiego str.)

$$(\cdot|\cdot) \equiv (\cdot|\cdot)^G_{\mathbb{C}} .$$

Pozostaje sprawdzić tożsamość (*) (str. 78).

W tym celu liczymy – dla potrzeb $\mathbb{C}$-liniowego rozszerzenia $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\cdot}$ z $\mathfrak{k}$ do $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$, danego wzorem

$$\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{X\otimes 1+Y\otimes i} \equiv \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{X} + i \triangleright \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{Y}$$

– skośność powiązanej formy:

$$\left(\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{X\otimes 1+Y\otimes i}(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i) \,\middle|\, X_2\otimes 1+Y_2\otimes i\right)^{\sigma}_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv \left(\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{X}(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i) + i\triangleright \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{Y}(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i) \,\middle|\, X_2\otimes 1+Y_2\otimes i\right)^{\sigma}_{\mathbb{C}}$$

$$= -\left(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i \,\middle|\, \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{X}(X_2\otimes 1+Y_2\otimes i)\right)^{\sigma}_{\mathbb{C}}$$

$$-i\left(\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{Y}(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i)\,\middle|\,X_2\otimes 1+Y_2\otimes i\right)^{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$$

$$=\left(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i\,\middle|\,\left(-\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{X}+i\,\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{Y}\right)(X_2\otimes 1+Y_2\otimes i)\right)^{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv\left(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i\,\middle|\,\mathrm{ad}^{(\tau)}_{(X\otimes 1+Y\otimes i)^*}(X_2\otimes 1+Y_2\otimes i)\right)^{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}\,,$$

co kończy dowód. □

Nim wywiedziemy z powyższego daleko idące wnioski, wysłowimy jeszcze ...

Str. 19. Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$.

Niech $(\cdot|\cdot) : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ będzie jak w Str. 18.

Jeżeli $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ jest ideałem, to wtedy $\mathfrak{h}^{\perp}$ jest ideałem i $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$ jako algebra Liego.

D: Bycie ideałem oznacza, że

$$\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h},$$

w szczególności więc $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{h}) \equiv \mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{\mathfrak{k}\otimes 1}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$.

W takim jednak razie

$$\left(\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{h}^{\perp}) \,\middle|\, \mathfrak{h}\right) = -\left(\mathfrak{h}^{\perp} \,\middle|\, \underset{\subset\, \mathfrak{h}}{\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{h})}\right) = 0 ,$$

czyli $\mathfrak{h}^{\perp}$ jest $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}$-niezmiennicze,

a zatem także $\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{\mathfrak{g}} \equiv \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}} + i \cdot \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}$ -niezmiennicze.

Jako przestrzeń $\mathbb{C}$-liniowa $\mathfrak{g}$ rozkłada się na sumę prostą $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$, a ponieważ

$\Rightarrow \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp} = \{0_{\mathfrak{g}}\}$

zarówno $\mathfrak{h}$, jak i $\mathfrak{h}^{\perp}$ są ideałami w $\mathfrak{g}$, przeto $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^{\perp}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp} = \{0_{\mathfrak{g}}\}$, co oznacza właśnie, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$ jako algebra Liego. $\square$

Relacje między algebrami reduktywnymi i półprostymi precyzuje ...

Str. 20. Niech $\mathfrak{g}$ będzie reduktywną zespoloną algebrą Liego o centrum $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Wówczas istnieje półprosta algebra Liego $\delta\mathfrak{g}$ o własności $\mathfrak{g} \simeq \delta\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (jako algebry Liego).

D: Jako że $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$, przeto także $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$ (wzgl. struktury hermitowskiej $i(u)$) jest ideałem w $\mathfrak{g}$ na mocy str. 19, a przy tym $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Pokażemy, że $\delta\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp}$ jest półprosta.

Oczywiście $\mathfrak{z}(\delta\mathfrak{g}) = 0$, albowiem $[Z, \delta\mathfrak{g}] = 0$ z def.

bo to centrum

$\forall Z \in \mathfrak{z}(\delta\mathfrak{g}) : Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (wobec $[Z, \mathfrak{z}(\mathfrak{g})] = 0$,

a $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp}$)

czyli $Z \in \delta\mathfrak{g} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$.

Pozostaje wskazać zwartą formę rzeczywistą algebry Liego $\delta\mathfrak{g}$.

W tym celu zauważmy, że $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$

$\Longleftrightarrow Z \in \mathrm{Ker}\, \mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{\mathfrak{g}} \Longleftrightarrow Z \in \mathrm{Ker}\, \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{K}$, a zatem

$Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \iff Z^* \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Istotnie $Z = X \otimes 1 + Y \otimes i \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$

$$\iff \forall u \in \mathfrak{k} : \quad 0 = \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_u (X \otimes 1 + Y \otimes i)$$

$$= \mathrm{ad}_u(X) \otimes 1 + \mathrm{ad}_u(Y) \otimes i$$

$$\iff \forall u \in \mathfrak{k} : \quad \mathrm{ad}_u(X) = 0 = \mathrm{ad}_u(Y)$$

$$\iff \quad \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_u(Z^*) = \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_u (-X \otimes 1 + Y \otimes i) =$$

$$= -\mathrm{ad}_u(X) \otimes 1 + \mathrm{ad}_u(Y) \otimes i = 0.$$

Ponieważ zaś $*$ jest inwolucją, ⑨②
przeto także $\delta\mathfrak{g}^* = \delta\mathfrak{g}$, to z kolei
implikuje $\delta\mathfrak{g} = \mathbb{C}\triangleright(\delta\mathfrak{g}\cap\mathfrak{k}^{\otimes 1}) \equiv (\delta\mathfrak{g}\cap\mathfrak{k}^{\otimes 1})^{\mathbb{C}}$ ← elementy rzeczywiste

Istotnie, niech $\delta\mathfrak{g} \ni v = X\otimes 1 + Y\otimes i \Rightarrow \frac{1}{2i}\triangleright(v+v^*) = X\otimes 1$ i $\frac{1}{2}(v-v^*) = X\otimes 1$ generują $\delta\mathfrak{g}$!
(bo $v\in\delta\mathfrak{g} \Rightarrow v^*\in\delta\mathfrak{g}$!)

podobnie jak $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}\triangleright(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{k}^{\otimes 1}) \equiv (\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{k}^{\otimes 1})^{\mathbb{C}}$.

and $\mathbb{C}$
$\delta\mathfrak{g} \subset (\delta\mathfrak{g}\cap\mathfrak{k}^{\otimes 1})^{\mathbb{C}}$

Wystarczy zatem okazać, że $\delta\mathfrak{g}\cap\mathfrak{k}^{\otimes 1}$! vice versa!
jest algebrą Liego zwartej grupy Liego.
Niechaj K będzie zwartą grupą Liego o algebrze

Liego $\mathfrak{k} \equiv \mathrm{Lie}\,K$. Oznaczmy

$$\delta K := T_e \mathrm{Ad}(K) \subset GL(\mathfrak{k}).$$

Jako ciągły obraz grupy zwartej δK jest zwarta, zatem domknięta. Na mocy Tw. Cartana 2-3-4-7.2 jest ona podgrupą Liego grupy Liego $GL(\mathfrak{k})$, więc w szczególności – grupą Liego.

Many pattern

$$0 \to \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{k} \hookrightarrow \mathfrak{k} \twoheadrightarrow \delta\mathfrak{g}\cap\mathfrak{k} \to 0 \quad (\mathfrak{k}\otimes 1)$$

$$\begin{array}{c}
\mathfrak{k} \overset{\text{conjok}}{\simeq} \mathfrak{k}\otimes 1 \\
\cup \\
\mathfrak{k}\otimes 1 \cap \mathfrak{g} \\
\parallel \\
\mathfrak{k}\otimes 1 \cap (\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \delta\mathfrak{g}) \\
\cup \\
(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{k}\otimes 1) \oplus (\delta\mathfrak{g}\cap\mathfrak{k}\otimes 1)
\end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[rr, "T_e\mathrm{Ad}."] \arrow[dr, two heads, "T_e\mathrm{Ad}|^*"'] & & GL(\mathfrak{k}) \\
 & & \delta K \arrow[ur, hook] & \\
 & & \delta\mathfrak{g}\cap\mathfrak{k} \simeq \mathrm{Lie}\,\delta K \arrow[u, "\exp^{\delta K}"'] \arrow[r] \arrow[dr, hook] & 0 \\
\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{k} \arrow[r] & \mathfrak{k} \arrow[uuu, "\exp^{K}"] \arrow[ur, two heads, "\mathrm{ad}"] \arrow[rr, "\mathrm{ad}"'] & & \mathfrak{gl}(\mathfrak{k}) \arrow[uuu, "\exp^{GL(\mathfrak{k})}"'] \\
0 \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}$$

Jorie $\delta\mathfrak{g}\cap\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{k}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{k}$

$\ker \mathrm{ad} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{k}\otimes 1$

Stąd pojedynczy wniosek

$$\delta\mathfrak{g}\cap\mathfrak{k} \equiv \mathrm{Lie}\,\delta K$$

δK - zwarte. □

Przechodząc do dyskusji algebr półprostych, zauważymy

Tw. 3. Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego. Istnieją podalgebry $\{\mathfrak{g}_i \subseteq \mathfrak{g}\}_{i\in\overline{1,N}}$, $N<\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$ będące prostymi algebrami Liego i jedyny rozkład prosty

$$\mathfrak{g} \simeq \bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{g}_i \quad (\text{jako algebry Liego}).$$

Podalgebry te są określone jednoznacznie z dokładnością do permutacji.

D: Jeśli $\mathfrak{g}$ ma nietrywialny ideał $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ rozkłada się jako algebra Liego na sumę prostą $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$ na mocy str. 19, przy czym $\mathfrak{h}^{\perp}$ także jest ideałem w $\mathfrak{g}$. Jeśli $\mathfrak{k}$ zawiera nietrywialny ideał (w $\mathfrak{k}$!) $\mathfrak{k}' \subsetneq \mathfrak{k}$, to oczywiście $[\mathfrak{k}^{\perp}, \mathfrak{k}']_{\mathfrak{g}} = \underset{\mathfrak{k}'}{\overset{0}{\cap}}$ oraz $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}']_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{k}'$, przeto $\mathfrak{k}'$ jest też ideałem w $\mathfrak{g}$. W takim razie

$$\mathfrak{k}'' := (\mathfrak{k}')^{\perp} \cap \mathfrak{k} \subsetneq \mathfrak{g}$$

jest ideałem w $\mathfrak{g}$ i otrzymujemy – ponownie na mocy str. 19 –

$$\mathfrak{g} \simeq (\mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{k}'') \oplus \mathfrak{k}^{\perp}.$$

Po skończonej liczbie kroków wyznaczymy tym sposobem rozkład prosty algebry Liego $\mathfrak{k}$ na sumę prostą algebr nieposiadających nietrywialnych ideałów, a następnie ten sam algorytm stosujemy do ideału $\mathfrak{k}^{\perp}$, otrzymując ostatecznie rozkład prosty $\mathfrak{g}$ na sumę prostą

$$\mathfrak{g} \cong \bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{g}_i$$

takich algebr. Pozostaje pokazać, że każdy jej ideał ma wymiar liniowy co najmniej 2.

D.a. Niech $\mathfrak{g}_i$ będzie jednym z ideałów i założymy, że $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_i = 1$. Wówczas $\mathfrak{g}_i$ jest komutatywna, a zatem $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (wynika $\forall j \in \overline{1,N} \setminus \{i\} : [\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_i]_{\mathfrak{g}} = 0$).
Ale $\mathfrak{g}$ półprosta, zatem $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$. ↯

Niechaj teraz $\bigoplus_{i=1}^{N_1} \mathfrak{g}_i^{(1)} \simeq \mathfrak{g} \simeq \bigoplus_{i=1}^{N_2} \mathfrak{g}_i^{(2)}$

będą dwoma takimi rozkładami.

Każda podalgebra $\mathfrak{g}_i^{(A)}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$,

a zatem podreprezentacją reprezentacji $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$.

Jako taka $\mathfrak{g}_i^{(A)}$ jest nieprzywiedlna,

bo w p.p. zawierałaby podprzestrzeń,

która byłaby $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-niezmiennicza, byłaby

w szczególności $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_i^{(A)}}$-niezmiennicza, czyli – nietrywialnym ideałem w $\mathfrak{g}^{(A)}_i$, w sprzeczności z prostotą $\mathfrak{g}^{(A)}_i$. Przy tym

$$i \neq j \implies \left(\mathfrak{g}^{(A)}_i, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction\right) \nsim \left(\mathfrak{g}^{(A)}_j, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction\right),$$

bo $\mathfrak{g}^{(A)}_i$ działa na $\mathfrak{g}^{(A)}_i$ nietrywialnie (wszak $\mathfrak{g}^{(A)}_i$ jest niekomutatywna), a na $\mathfrak{g}^{(A)}_j$ – trywialnie ($\Leftarrow \mathfrak{g} \cong \bigoplus_{i=1}^{N_A} \mathfrak{g}^{(A)}_i$ jako algebra Liego)

Rozważmy teraz ideał $\mathfrak{g}^{(2)}_i \subset \mathfrak{g}$. Jako je rzut kanoniczny $\mathrm{pr}_j : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}_j^{(1)}$ jest splotaczem między $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ i $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction_{\mathfrak{g}_j^{(1)}}$ (wszak $\mathfrak{g}_j^{(1)}$ jest ideałem), zatem

$\pi_{j,i} = \mathrm{pr}_j\restriction_{\mathfrak{g}_i^{(2)}} : (\mathfrak{g}_i^{(2)}, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction_{\mathfrak{g}_i^{(2)}}) \longrightarrow (\mathfrak{g}_j^{(1)}, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction_{\mathfrak{g}_j^{(1)}})$ (nieprzywiedlne obie!) jest albo 0, albo $\cong$ na mocy I Lematu Schura (Tw. 2.10). Skoro podział

$\mathfrak{g} \cong \bigoplus_{i=1}^{N_1} \mathfrak{g}_i^{(1)}$, to istnieje $j \in \overline{1,N_1}$: $\pi_{j,i}$ jest $\cong$. (inaczej $\equiv 0$)

Wtedy też jednak $\pi_{k \neq j,i} = 0$, bo reprezentacje

$$\left(\mathfrak{g}_k^{(1)}, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction_{\mathfrak{g}_k^{(1)}}\right) \not\simeq \left(\mathfrak{g}_j^{(1)}, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction_{\mathfrak{g}_j^{(1)}}\right) \text{ dla } k \neq j.$$

Jest zatem $\mathfrak{g}_i^{(2)} = \mathfrak{g}_j^{(1)}$ (równość, a nie tylko $\simeq$!).

□

Uzyskawszy nietrywialny wgląd w „anatomię" półprostych algebr Lie'go, przejdziemy obecnie do ich analizy pod kątem klasyfikacji ich reprezentacji. W tym celu wyróżnimy w $\mathfrak{g}$ (półprostej) elementy (wspól-) diagonalizowalne w każdej reprezentacji, więc w szczególności – w reprezentacji dołączonej $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$.

Def. 17. PODALGEBRA CARTANA

(półprostej) algebry Liego $\mathfrak{g}$ (nad $\mathbb{C}$) to podprzestrzeń (zespolona) $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ o własnościach:

(C1) $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} = 0$ (KOMUTATYWNOŚĆ)

(C2) $\forall X \in \mathfrak{g} : \left([\mathfrak{h}, X]_{\mathfrak{g}} = 0 \Rightarrow X \in \mathfrak{h} \right)$ (MAKSYMALNOŚĆ)

(C3) $\forall H \in \mathfrak{h}$: ad_H jest diagonalizowalny. (WSPÓŁDIAGONALIZOWALNOŚĆ).

mamy uspokajające

Tw. 4 [O istnieniu podalgebry Cartana]

Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$ i niech $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ będzie (dowolną) maksymalną podalgebrą komutatywną. Wtedy podalgebra

$$\mathfrak{h} := \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$$

jest podalgebrą Cartana $\mathfrak{g}$. W szczególności podalgebra Cartana istnieje.

D: Rozważmy dowolną 1-wym. podprzestrzeń $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{k}$ ($\neq \mathfrak{k}$, bo $\mathfrak{z}(\mathfrak{k}) = 0$). To jest podalgebra komutatywna. Niech teraz $S_{\mathfrak{h}_0}$ będzie zbiorem podalgebr komutatywnych w $\mathfrak{k}$ zawierających $\mathfrak{h}_0$. Wtedy maksymalny element tego zbioru, $\mathfrak{t} := \bigcup_{s \in S_{\mathfrak{h}_0}} s \subset \mathfrak{k}$ jest przykładem maksymalnej podalgebry komutatywnej.

Niech teraz $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ dla $\mathfrak{t}$ j/w.
Wówczas $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} = 0$ i musimy pokazać,
że jest maksymalna.

Niech $X \in \mathfrak{g} \equiv \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ spełnia $[X,\mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} = 0$
$\llcorner = X_1 \otimes 1 + X_2 \otimes i$, a wtedy także
$[X,\mathfrak{t}\otimes 1]_{\mathfrak{g}} = 0$, więc $[X_1,\mathfrak{t}]_{\mathfrak{k}} = 0 = [X_2,\mathfrak{t}]_{\mathfrak{k}}$!
ponieważ jednak $\mathfrak{t}$ maksymalna,
przeto nieodzownie $X_1, X_2 \in \mathfrak{t}$, czyli $X \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{h}$.

Jeśli teraz $(\cdot|\cdot)$ jest formą hermitowską,

o której mowa w Stw. 18, to

$$\forall H \in \mathfrak{t} \left(\subset \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}\right) : \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H}$$ jest skośnie

hermitowski, więc też diagonalizowalny, a ponadto dla dowolnych dwóch $H_1, H_2 \in \mathfrak{t}$ zachodzi

$$\left[\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_1}, \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_2}\right]_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})} = \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{[H_1, H_2]_{\mathfrak{t}}} = 0,$$

zatem operatory $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_1}$ i $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_2}$ są współ-diagonalizowalne. W takim przypadk więc także dowolny element

$H = H_1 \otimes 1 + H_2 \otimes i$ ma $\mathrm{ad}_H \equiv \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_1} + i \triangleright \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_2}$

diagonalizowalny i – znów –

$$\forall H, \tilde{H} \in \mathfrak{t} : [\mathrm{ad}_H, \mathrm{ad}_{\tilde{H}}]_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})} = \mathrm{ad}_{[H,\tilde{H}]_{\mathfrak{g}}} = 0 ,$$

więc $\{\mathrm{ad}_H\}_{H \in \mathfrak{t}}$ są współdiagonalizowalne.

NB: Dowodzi się, że dowolne dwie □
podalgebry Cartana są izomorficzne,
przy czym izomorfizm taki rozszerza się do automorfizmu $\mathfrak{g}$.

To uprawomocnia

Def. 18. **RZĄD** półprostej algebry Liego $\mathfrak{g}$ to wymiar jej (dowolnej) podalgebry Cartana.

x

W dalszej części wykładu zbadamy rozkład $\mathfrak{g}$ na podprzestrzenie własne $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$ ...

Wobec $\mathbb{C}$-liniowego charakteru odwzorowania $\mathrm{ad}_{\cdot} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ zależność wartości własnej operatora ad_H, $H \in \mathfrak{h}$ od H jest $\mathbb{C}$-liniowa. Ma zatem sens

Przyjmujemy dotychczasowe oznaczenia.

Def. 19 Jeżeli istnieje niezerowy wektor $X \in \mathfrak{g}$ o własności

$$\mathrm{ad}_H(X) = \alpha(H) \cdot X \quad , H \in \mathfrak{h},$$

funkcjonał $\mathbb{C}$-liniowy $\alpha : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ określamy mianem PIERWIASTKA $\mathfrak{g}$ dla $\mathfrak{h}$.

Istnienie niezwyrodniałej formy hermitowskiej na $\mathfrak{g}$, o której mowa w str. 18, wyznacza izomorfizm $\mathfrak{h}^* \cong \mathfrak{h}$, który pozwala ostatecznie zdefiniować pierwiastek jako taki $\alpha \in \mathfrak{h} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$, dla którego istnieje $X \in \mathfrak{g} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$ o własności

$$\forall H \in \mathfrak{h} : \mathrm{ad}_H(X) = (\alpha|H) \triangleright X .$$

Zbiór wszystkich pierwiastków będziemy oznaczać symbolem $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$.

Dla dowolnego pierwiastka $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ określamy **PRZESTRZEŃ PIERWIASTKOWĄ**

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall_{H \in \mathfrak{t}} : \mathrm{ad}_H(X) = (\alpha|H) \triangleright X \}.$$

Dowolny jej element $X \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0_\mathfrak{g}\}$ nazywamy **WEKTOREM PIERWIASTKOWYM** α.

Ozn.: Ogólniej oznaczamy – dla dowolnego $\alpha \in \mathfrak{t}$:

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall_{H \in \mathfrak{t}} : \mathrm{ad}_H(X) = (\alpha|H) \triangleright X \},$$

przy czym $\mathfrak{g}_0 \equiv \mathfrak{t}$ oraz $\alpha \notin Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \Rightarrow \mathfrak{g}_\alpha = 0$.

Mamy oczywiście

Przypomnijmy jeszcze dotychczasowe.

Str. 21. Dowolna półprosta algebra Liego $\mathfrak{g}$ o podalgebrze Cartana $\mathfrak{h}$ ma jako przestrzeń $\mathbb{C}$-liniowa rozkład

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha .$$

×

Przyjrzyjmy się bliżej przestrzeniom pierwiastkowym ...

Str. 22. Przypomnijmy zapis dotychczasowy.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{t} : \quad [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} .$$

W szczególności, ilekroć $\alpha+\beta \notin Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$,

$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]_{\mathfrak{g}} = 0$.

* * *

D: Tożsamość Jacobiego może być zreinterpretowana jako stwierdzenie:

$\forall X \in \mathfrak{g}$: ad_X jest różniczkowaniem

algebry $(\mathfrak{g}, \overset{\leftarrow \text{iloczyn}}{[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}})$,

$$\mathrm{ad}_X([Y,Z]_{\mathfrak{g}}) = [\mathrm{ad}_X(Y), Z]_{\mathfrak{g}} + [Y, \mathrm{ad}_X(Z)]_{\mathfrak{g}} .$$

W szczególności $\forall (X,Y) \in \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\beta$:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_H([X,Y]_{\mathfrak{g}}) &= [\mathrm{ad}_H(X), Y]_{\mathfrak{g}} + [X, \mathrm{ad}_H(Y)]_{\mathfrak{g}} \\ &= [(\alpha|H) \triangleright X, Y]_{\mathfrak{g}} + [X, (\beta|H) \triangleright Y]_{\mathfrak{g}} \\ &= (\alpha+\beta|H) \triangleright [X,Y]_{\mathfrak{g}} . \quad \square \end{aligned}$$

Uwagi dalej

118

Str. 23. Przyjmijmy dotychczasową notację:

$$Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \subset \mathfrak{t}\otimes i\,.$$

D: Jako że ad_H, $H\in\mathfrak{t}$ jest skośnie hermitowski, przeto $\mathrm{Sp}\,\mathrm{ad}_H \subset i\mathbb{R}\,(\subset\mathbb{C})$, ale to oznacza, że $\forall\alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}):\ (\alpha|H)\in i\mathbb{R}$.

Niech $\alpha=\alpha_1\otimes 1+\alpha_2\otimes i$, a wtedy – w świetle
$\alpha_1,\alpha_2\in\mathfrak{t}$

str. 18. –
$\left(\mathrm{Im}(\cdot|\cdot)\restriction_{\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}}\subset\mathbb{R}\right)$

$$\underset{i\mathbb{R}\ni}{(\alpha|H)}=\underset{\underset{\mathbb{R}}{\cap}}{(\alpha_1|H)}-i\cdot\underset{\underset{\mathbb{R}}{\cap}}{(\alpha_2|H)}\Rightarrow\alpha_1=0.$$

□

Mamy także

Str. 24. Przyjmijmy zapis dotychczasowy.

$$\forall \alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : \; X\in\mathfrak{g}_{\alpha} \Rightarrow X^{*}\in\mathfrak{g}_{-\alpha} ,$$

Zatem $\alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \Longleftrightarrow -\alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$.

Ponadto $\langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})\rangle_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}$.

D: Niech $H\otimes 1\in\mathfrak{t}\otimes 1$ i $\underset{\equiv X_1\otimes 1+X_2\otimes i}{X}\in\mathfrak{g}$, a wtedy

$$[H\otimes 1, X]_{\mathfrak{g}}^{*} = \left([H,X_1]_{\mathfrak{k}}\otimes 1 + [H,X_2]_{\mathfrak{k}}\otimes i\right)^{*}$$

$$= -[H,X_1]_{\mathfrak{k}}\otimes 1 + [H,X_2]_{\mathfrak{k}}\otimes i \equiv [H\otimes 1, X^{*}]_{\mathfrak{g}} .$$

Wobec anty-$\mathbb{C}$-liniowości $*$ i str. 23.

$\alpha \in Q \subset \mathfrak{t}\otimes i$

mamy – dla $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ –

$$[H\otimes 1, X^*]_{\mathfrak{g}} = [H\otimes 1, X]_{\mathfrak{g}}^{*} \qquad \big((\alpha|H)\cdot X\big)^* = \overline{(\alpha|H)}\cdot X^*$$

$$\overset{\shortparallel}{\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_H(X^*)} \qquad \equiv \quad \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_H(X)^* \overset{/\!/}{}$$

$$= -(\alpha|H)\cdot X^*.$$

Stąd też dla $H = H_1\otimes 1 + H_2\otimes i \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ i $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ zgodności

$$[H, X^*]_{\mathfrak{g}} \doteq \mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_H(X^*) = \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_1}(X^*) + i\,\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_2}(X^*)$$

$$= -(\alpha|H_1)\cdot X^* - i\cdot(\alpha|H_2)\cdot X^*$$

$$= -(\alpha|H_1\otimes 1 + H_2\otimes i)\cdot X^* \equiv (-\alpha|H)\cdot X^*.$$

Przypominajmy: $(\mathfrak{h}, (\cdot|\cdot)\restriction_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}})$ – niezdegenerowana (wszak $(\cdot|\cdot)$ ma tę własność i $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$), przeto $\mathfrak{h} = \langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\rangle_{\mathbb{C}} \oplus \langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\rangle_{\mathbb{C}}^{\perp}$. Rozważmy $H \in \langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\rangle_{\mathbb{C}}^{\perp}$, tj. $\forall \alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) : (\alpha|H)=0$, ale wtedy $\forall \alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\ \forall X\in\mathfrak{g}_\alpha : [H,X]_{\mathfrak{g}} = (\alpha|H)\triangleright X = 0$, co w połączeniu z $\forall \tilde{H}\in\mathfrak{h} : [H,\tilde{H}]_{\mathfrak{g}} = 0$ i rozkładem $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$ daje $[H,\mathfrak{g}]_{\mathfrak{g}} = 0$, czyli $H \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. □

Mamy kluczowe

Tw. 5. Przyjmijmy zapis dotychczasowy.

$$\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})\ \exists\ (F_\alpha, H_\alpha, E_\alpha) \in (\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_\alpha) \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\} :$$

$$[H_\alpha, E_\alpha]_{\mathfrak{g}} = 2E_\alpha \qquad \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_{(\alpha)} = \langle E_\alpha, F_\alpha, H_\alpha \rangle_{\mathbb{C}}$$

$$[H_\alpha, F_\alpha]_{\mathfrak{g}} = -2F_\alpha \quad \wedge \quad H_\alpha \in \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}} .$$

$$[E_\alpha, F_\alpha]_{\mathfrak{g}} = H_\alpha$$

Przy tym można wybrać $F_\alpha = E_\alpha^*$.