Matematyka mechaniki kwantowej metody przestrzeni Hilberta, wykład 5

Wydział Fizyki UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr zimowy 2026/2027

Przykład

Funcję $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ nazywamy **falką**, jeśli rodzina funkcji $\{\psi_{n,k} | n, k \in \mathbb{Z}\}$ skonstruowana w następujący sposób:

$$\psi_{n,k}(x) = 2^{n/2}(2^n x - k), \qquad x \in \mathbb{R}$$

jest bazą ortonormalną przestrzeni $L^2{}^2(\mathbb{R})$.

Rozważmy funkcję $\psi = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}[} - \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1[}$. Wówczas

- układ $\{\psi_{n,k} | n, k \in \mathbb{Z}\}$ jest ortonormalny w $L^2(\mathbb{R})$,
- podprzestrzeń $\operatorname{span}\{\psi_{n,k} | n, k \in \mathbb{Z}\}$ jest równa $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} S_n$, gdzie S_n jest przestrzenią funkcji z $L^2(\mathbb{R})$ stałych na wszystkich przedziałach postaci $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$

(oba te fakty będą wykazane na ćwiczeniach).

Przykład

Pokażemy teraz, że podprzestrzeń $S = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} S_n$ jest gęsta w $L^2(\mathbb{R})$. W tym celu wystarczy wykazać, że dla dowolnej funkcji $g \in C_c(\mathbb{R})$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje element $s \in S$ taki, że $\|g - s\|_2 < \varepsilon$.

Ustalmy więc $g \in C_c(\mathbb{R})$ i $\varepsilon > 0$. Niech $[a, b]$ będzie zwartym przedziałem zawierającym nośnik g i niech $\delta \in]0, \varepsilon[$ będzie taka, że ilekroć $|x - y| < \delta$, mamy $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{b+\varepsilon-a}}$.

Weźmy n takie, że $\frac{1}{2^n} < \delta$ i zdefiniujmy

$$s = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g\left(\tfrac{k}{2^n}\right) \mathbf{1}_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[}$$

(suma jest skończona, gdyż nośnik g jest zwarty). Wówczas $s \in S_n$ i $\|s_\varepsilon - g\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{b+\varepsilon-a}}$. Ponadto $\operatorname{supp} s \subset [a, b + \varepsilon]$.

Przykład

Mamy

$$\|g-s\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |g(x)-s(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^{b+\varepsilon} |g(x)-s(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant (b+\varepsilon-a)\tfrac{\varepsilon^2}{b+\varepsilon-a} = \varepsilon^2,$$

a więc $\|g-s\|_2 \leqslant \varepsilon$.

Powyżej wykazaliśmy, że $\psi = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}[} - \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1[}$ jest falką. Jest ona znana pod nazwą **falki Haara**.

Warto wreszcie wspomnieć, że układ $\{\psi_{n,k}\}_{n\in\mathbb{Z}_+,\,k=0,\ldots,2^n-1}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta $L^2([0,1])$.

- Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i niech $\varnothing \neq S \subset \mathscr{H}$.
- **Dopełnieniem ortogonalnym** S nazywamy zbiór

$$S^{\perp} = \{\eta \in \mathscr{H} \mid \forall\, \xi \in S \, \langle \xi | \eta \rangle = 0\}.$$

- Symbolem $S^{\perp\perp}$ oznaczać będziemy zbiór $(S^{\perp})^{\perp}$.
- Dla porządku przyjmijmy, że dopełnieniem ortogonalnym zbioru pustego jest $\mathscr{H}$.

Stwierdzenie

1. $S^{\perp}$ jest domkniętą podprzestrzenią $\mathscr{H}$,
2. mamy $S \subset S^{\perp\perp}$,
3. jeśli $S_1 \subset S_2$, to $S_1^{\perp} \supset S_2^{\perp}$.

Dowód

Punkt ❶ wynika natychmiast z ciągłości i liniowości (względem drugiego argumentu) iloczynu skalarnego.

Ad ❷. Jeśli $\xi \in S$, to ξ jest ortogonalny do każdego $\eta \in S^{\perp}$, a więc $\xi \in S^{\perp\perp}$.

Ad ❸. Jeśli $S_1 \subset S_2$, to każdy $\eta \in S_2^{\perp}$ jest ortogonalny do wszystkich elementów S_1, a więc $\eta \in S_1^{\perp}$. □

Lemat

Niech $S \subset \mathscr{H}$. Wówczas $S \cap S^{\perp} \subset \{0\}$.

Dowód

Niech $\xi \in S \cap S^{\perp}$. Skoro $\xi \in S^{\perp}$, wektor ten jest ortogonalny do wszystkich elementów S, a więc $\|\xi\|^2 = \langle \xi | \xi \rangle = 0$. □

Twierdzenie

Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i niech $\mathscr{M}$ będzie domkniętą podprzestrzenią $\mathscr{H}$. Wówczas dla dowolnego $\varphi \in \mathscr{H}$ istnieją $\xi \in \mathscr{M}$ i $\eta \in \mathscr{M}^\perp$ takie, że $\varphi = \xi + \eta$. Ponadto rozkład ten jest jedyny.

Dowód w szczególnym przypadku

Weźmy $\varphi \in \mathscr{H}$ i niech $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie bazą ortonormalną $\mathscr{M}$. Kładziemy

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n | \varphi \rangle \phi_n \quad \text{oraz} \quad \eta = \varphi - \xi.$$

Powyższy szereg jest zbieżny. Ponadto $\xi \in \mathscr{M}$, a $\eta \in \mathscr{M}^\perp$.

Przypuśćmy, że φ ma inny rozkład $\varphi = \xi' + \eta'$ na $\xi' \in \mathscr{M}$ oraz $\eta' \in \mathscr{M}^\perp$. wtedy $\xi - \xi' = \eta' - \eta$ jest elementem $\mathscr{M} \cap \mathscr{M}^\perp$, a więc $\xi = \xi'$ i $\eta = \eta'$ na mocy lematu. □

- Powyżej wykazaliśmy, że jeśli $\mathscr{M}$ jest domkniętą podprzestrzenią $\mathscr{H}$, to $\mathscr{H} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{M}^\perp$.

Wniosek

Niech $\mathscr{M}$ będzie domkniętą podprzestrzenią $\mathscr{H}$. Wówczas $\mathscr{M}^{\perp\perp} = \mathscr{M}$.

Dowód

Wiemy, że $\mathscr{M}^{\perp\perp} \supset \mathscr{M}$. Z drugiej strony, jeśli $\varphi \in \mathscr{M}^{\perp\perp}$, to zapisując $\varphi = \xi + \eta$, gdzie $\xi \in \mathscr{M}$ i $\eta \in \mathscr{M}^{\perp}$ otrzymujemy

$$\mathscr{M}^{\perp} \ni \eta = \varphi - \xi \in \mathscr{M}^{\perp\perp} + \mathscr{M} \subset \mathscr{M}^{\perp\perp},$$

a więc $\eta \in \mathscr{M}^{\perp} \cap \mathscr{M}^{\perp\perp} = \{0\}$. □

Wniosek

Niech $S \subset \mathscr{H}$. Wówczas

1. $S^{\perp} = \overline{\operatorname{span}\{S\}}^{\perp}$,
2. $S^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{span}\{S\}}$.

Dowód.

Mamy $S \subset \overline{\operatorname{span}}\{S\}$, a więc $S^{\perp} \supset \overline{\operatorname{span}}\{S\}^{\perp}$. Biorąc dopełnienie ortogonalne obu stron otrzymujemy $S^{\perp\perp} \subset \overline{\operatorname{span}}\{S\}^{\perp\perp}$, a zatem $S^{\perp\perp} \subset \overline{\operatorname{span}}\{S\}$ na mocy poprzedniego wniosku (dla $\mathscr{M} = \overline{\operatorname{span}}\{S\}$).

Ale $S^{\perp\perp}$ jest domkniętą podprzestrzenią $\mathscr{H}$ zawierającą S, skąd wynika, że $S^{\perp\perp} \supset \overline{\operatorname{span}}\{S\}$, co dowodzi punktu ❷.

Biorąc dopełnienie ortogonalne obu stron równości $S^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{span}}\{S\}$ dostajemy $(S^{\perp\perp})^{\perp} = \overline{\operatorname{span}}\{S\}^{\perp}$. Ale

$$(S^{\perp\perp})^{\perp} = \big((S^{\perp})^{\perp}\big)^{\perp} = (S^{\perp})^{\perp\perp} = S^{\perp}$$

ponownie na mocy poprzedniego wniosku (dla $\mathscr{M} = S^{\perp}$). Tym samym wykazaliśmy punkt ❶. □

Definicja

Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta, a $\mathscr{M} \subset \mathscr{H}$ domkniętą podprzestrzenią. Rzut na $\mathscr{M}$ wzdłuż $\mathscr{M}^{\perp}$ nazywamy **rzutem ortogonalnym** na $\mathscr{M}$ i oznaczamy symbolem $P_{\mathscr{M}}$.

Uwaga

W dowodzie ostatniego twierdzenia użyliśmy bardzo wygodnego wzoru na $P_{\mathscr{M}}$: dla dowolnej ortonormalnej bazy $\{\phi_i\}_{i\in I}$ przestrzeni $\mathscr{M}$ mamy

$$P_{\mathscr{M}}\xi = \sum_{i\in I} \langle \phi_i | \xi \rangle \phi_i$$

dla wszystkich $\xi \in \mathscr{H}$.

Uwaga

W przypadku gdy podprzestrzeń $\mathscr{M}$ jest skończenie wymiarowa mamy też inny wzór na $P_{\mathscr{M}}$: niech $\{\xi_i\}_{i=1,\dots,n}$ będzie dowolną (niekoniecznie ortogonalną) bazą $\mathscr{M}$ i niech G będzie macierzą Gama układu $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$

$$G = \begin{bmatrix} \langle \xi_1 | \xi_1 \rangle & \dots & \langle \xi_1 | \xi_N \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_N | \xi_1 \rangle & \dots & \langle \xi_N | \xi_N \rangle \end{bmatrix}$$

Wtedy dla dowolnego $\eta \in \mathscr{H}$ mamy

$$P_{\mathscr{M}}\eta = \sum_{i,j} \left(G^{-1}\right)_{i,j} \langle \xi_j | \eta \rangle \xi_i.$$

Stwierdzenie

Niech $\mathscr{M}$ będzie niezerową podprzestrzenią $\mathscr{H}$. Wówczas $P_{\mathscr{M}}$ jest ograniczony i $\|P_{\mathscr{M}}\| = 1$. Ponadto $P_{\mathscr{M}^\perp} = \mathbb{1} - P_{\mathscr{M}}$.

Dowód

Weźmy $\varphi \in \mathscr{H}$ i niech $\varphi = \xi + \eta$ będzie rozkładem φ na komponenty w $\mathscr{H} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{M}^\perp$. Mamy $P_{\mathscr{M}}\varphi = \xi$ oraz $P_{\mathscr{M}^\perp}\varphi = \eta$, co pokazuje, że $P_{\mathscr{M}^\perp} = \mathbb{1} - P_{\mathscr{M}}$. Dalej

$$\|\varphi\|^2 = \langle\varphi|\varphi\rangle = \langle\xi+\eta|\xi+\eta\rangle = \langle\xi|\xi\rangle + \langle\xi|\eta\rangle + \langle\eta|\xi\rangle + \langle\eta|\eta\rangle = \langle\xi|\xi\rangle + \langle\eta|\eta\rangle = \|\xi\|^2 + \|\eta\|^2,$$

a więc $\|P_{\mathscr{M}}\varphi\| = \|\xi\| \leqslant \|\varphi\|$, czyli $\|P_{\mathscr{M}}\| \leqslant 1$. Z drugiej strony, skoro $\mathscr{M} \neq \{0\}$, istnieje niezerowy wektor $\psi \in \mathscr{M}$ o normie 1 i mamy $\|P_{\mathscr{M}}\| \geqslant \|P_{\mathscr{M}}\psi\| = \|\psi\| = 1$. □

Przykład

Rozważmy bazę $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ przestrzeni $\mathsf{L}^2([-\pi,\pi])$ i niech $\mathscr{M} = \operatorname{span}\{\phi_n \,|\, |n| < N\}$. Rzut ortogonalny $P_{\mathscr{M}}$ możemy opisać następującym wzorem:

$$P_{\mathscr{M}}\psi = \sum_{n=-N}^{N} \langle\phi_n|\psi\rangle\phi_n = \sum_{n=-N}^{N} \left(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau}\psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\phi_n.$$

Stąd

$$(P_{\mathscr{M}}\psi)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(t-\tau)}\psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t-\tau)\psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

gdzie

$$D_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Funkcję D_N nazywamy **jądrem Dirichleta**.

Przykład

Mamy

$$\begin{aligned} D_N(\theta) = \frac{e^{-iN\theta}}{2\pi} \sum_{n=0}^{2N} e^{in\theta} &= \frac{e^{-iN\theta}}{2\pi} \frac{1 - e^{i(2N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-iN\theta} - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i(N+\frac{1}{2})\theta} - e^{i(N+\frac{1}{2})\theta}}{e^{-i\frac{1}{2}\theta} - e^{i\frac{1}{2}\theta}} = \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})\theta\right)}{2\pi \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)} \end{aligned}$$

dla $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, natomiast $D_N(\theta) = \frac{2N+1}{2\pi}$ dla $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Twierdzenie

Niech C będzie niepustym domkniętym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Hilberta $\mathscr{H}$ i niech $\varphi \in \mathscr{H} \setminus C$. Wówczas istnieje jedyny wektor $\xi \in C$ minimalizujący funkcję $C \ni \zeta \mapsto \|\varphi - \zeta\| \in]0, +\infty[$. Ponadto ξ jest jedynym elementem C takim, że

$$\operatorname{Re}\langle \zeta - \xi | \varphi - \xi \rangle \leqslant 0, \qquad \zeta \in C.$$