Matematyka mechaniki kwantowej metody przestrzeni Hilberta, wykład 4

Wydział Fizyki UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr zimowy 2026/2027

Przykład

Rozważmy układ $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ w przestrzeni Hilberta $\ell^2(\mathbb{N})$ zdefiniowany tak:

$$\delta_n(k) = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}.$$

Jest jasne, że $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest układem ortonormalnym oraz że $\operatorname{span}\{\delta_n | n \in \mathbb{N}\}$ jest przestrzenią ciągów o skończenie wielu niezerowych wyrazach.

Ponieważ każdy element $\xi \in \ell^2(\mathbb{N})$ jest normową granicą ciągu $(\xi^N)_{N\in\mathbb{N}}$, gdzie

$$\xi^N(k) = \begin{cases} \xi(k) & k \leqslant N \\ 0 & k > N \end{cases}.$$

Oznacza to oczywiście, że podprzestrzeń $\operatorname{span}\{\delta_n | n \in \mathbb{N}\}$ jest gęsta w $\ell^2(\mathbb{N})$, a więc układ $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest bazą ortonormalną $\ell^2(\mathbb{N})$.

Wniosek

Każda przestrzeń Hilberta jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią $\ell_2(I)$ dla pewnego I.

Dowód w szczególnym przypadku.

Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i przypuśćmy, ze $\mathscr{H}$ ma przeliczalną bazę ortonormalną $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zdefiniujmy odwzorowanie $U\colon \mathscr{H} \to \ell_2(\mathbb{N})$ definiując $U\xi$ jako ciąg skalarów $\big(\langle\phi_n|\xi\rangle\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Tak zdefiniowane odwzorowanie U jest liniowe, a równość

$$\|U\xi\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \big|\langle\phi_n|\xi\rangle\big|^2 = \|\xi\|^2$$

wynika z równości Parsevala. W końcu jeśli $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest dowolnym elementem $\ell_2(\mathbb{N})$, to $\boldsymbol{\alpha} = U\xi$ dla $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\phi_n$, czyli U jest izomorfizmem. □

Uwagi

1. Baza ortonormalna nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta nie jest jej bazą w sensie algebraicznym.
2. Dowolne dwie bazy ortonormalne przestrzeni tej samej przestrzeni Hilberta są równoliczne (ćwiczenia).
3. Moc dowolnej bazy ortonormalnej przestrzeni Hilberta $\mathscr{H}$ nazywamy **wymiarem Hilberta** $\mathscr{H}$ i oznaczamy symbolem $\dim \mathscr{H}$.
4. Przestrzeń Hilberta jest ośrodkowa (zawiera przeliczalny podzbiór gęsty) wtedy i tylko wtedy, gdy dowolna jej baza ortonormalna jest przeliczalna lub skończona.

Twierdzenie Łuzina

Niech X będzie przestrzenią lokalnie zwartą i niech μ będzie regularną miarą borelowską na X. Niech $A \subset X$ będzie podzbiorem borelowskim skończonej miary i $f\colon X \to \mathbb{C}$ funkcją mierzalną równą zero poza A. Wówczas dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $g \in \mathrm{C_c}(X)$ taka, że

$$\mu\Big(\big\{x \in X \,\big|\, f(x) \neq g(x)\big\}\Big) < \varepsilon.$$

Wniosek

Niech X będzie przestrzenią lokalnie zwartą i niech μ będzie regularną miarą borelowską na X. Wówczas dla każdego $p \in [1, +\infty[$ przestrzeń $\mathrm{C_c}(X)$ jest gęsta w $L^p(X, \mu)$.

Lemat

Niech (Ω, μ) będzie przestrzenią z miarą i niech S będzie zbiorem funkcji mierzalnych $\Omega \to \mathbb{C}$ o skończonym obrazie i równych zero poza zbiorem skończonej miary. Wówczas S jest gęstą podprzestrzenią $L^p(\Omega, \mu)$ dla każdego $p \in [1, +\infty[$.

Dowód

Na początek zauważmy, że zbiór S jest ewidentnie zawarty w $L^p(\Omega, \mu)$ dla wszystkich p.

Ustalmy p i niech $f \in L^p(\Omega, \mu)$ będzie nieujemna. Istnieje ciąg $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nieujemnych funkcji prostych taki, że $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ punktowo i $s_n \leqslant s_{n+1} \leqslant f$ dla każdego n. W szczególności $|s_n|^p \leqslant f^p$, a więc $s_n \in S$ dla wszystkich n.

Co więcej $|f - s_n|^p = (f - s_n)^p \leqslant f^p$, a zatem na mocy twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej

$$\|f - s_n\|_p^p = \int_\Omega |f - s_n|^p \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Oznacza to, że $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ w $L^p(\Omega, \mu)$.

Na koniec zauważmy, że dowolny element $L^p(\Omega, \mu)$ jest kombinacją liniową nieujemnych funkcji z $L^p(\Omega, \mu)$. □

Dowód wniosku

Ustalmy $p \in [1, +\infty[$ i niech S oznacza przestrzeń zdefiniowaną w lemacie (dla przypadku $\Omega = X$). Wystarczy udowodnić, że każdy element S można przybliżać z dowolną dokładnością w $L^p(X, \mu)$ elementami przestrzeni $C_c(X)$.

Weźmy $s \in S$ oraz $\varepsilon > 0$. Z twierdzenia Łuzina wiemy, że istnieje $\tilde{g} \in C_c(X)$ taka, że zbiór

$$\Delta = \left\{ x \in X \,\middle|\, s(x) \neq \tilde{g}(x) \right\}$$

ma miarę mniejszą niż ε. Połóżmy $M = \sup |s|$ i niech

$$g(x) = \begin{cases} \tilde{g}(x) & |\tilde{g}(x)| \leqslant M \\ M \frac{\tilde{g}(x)}{|\tilde{g}(x)|} & |\tilde{g}(x)| > M \end{cases}, \qquad x \in X.$$

Dowód wniosku

Wówczas

- $g \in C_c(X)$, gdyż g jest złożeniem g i ciągłego odwzorowania $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$,
- $\sup |g| \leqslant M$.

Co więcej g różni się od $\tilde{g}$ tylko na zbiorze Δ, a wiec $s = g$ na $X \backslash \Delta$. Mamy też

$$\|g - s\|_p^p = \int_X |g - s|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_\Delta |g - s|^p \, \mathrm{d}\mu \leqslant \mu(\Delta) \sup |g - s|^p \leqslant \varepsilon (2M)^p,$$

co pokazuje, że w $L^p(X, \mu)$ możemy przybliżać dowolną funkcję $s \in S$ elementami przestrzeni $C_c(X)$ z dowolną precyzją. □

Twierdzenie Stone'a-Weierstrassa

Niech X będzie przestrzenią lokalnie zwartą i niech $\mathscr{A}$ będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathrm{C}_0(X)$ taką, że

1. dla dowolnych $f, g \in \mathscr{A}$ mamy $fg \in \mathscr{A}$,
2. dla dowolnej $f \in \mathscr{A}$ mamy $\overline{f} \in \mathscr{A}$,
3. dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ istnieje $f \in \mathscr{A}$ taka, że $f(x_1) \neq f(x_2)$,
4. dla każdego $x \in X$ istnieje $f \in \mathscr{A}$ taka, że $f(x) \neq 0$.

Wówczas $\mathscr{A}$ jest gęsta w $\mathrm{C}_0(X)$.

- Punkt 1 mówi, że $\mathscr{A}$ jest **algebrą**,
- Punkt 2 mówi, że $\mathscr{A}$ jest **algebrą z inwolucją** (**$*$-algebrą**),
- Punkt 3 mówi, że $\mathscr{A}$ **rozdziela punkty** X,
- Punkty 3 i 4 razem mówią, że $\mathscr{A}$ **mocno rozdziela punkty** X.
- Gdy X jest przestrzenią zwartą, 4 zamienia się zwykle na założenie, że $\mathbf{1}_X \in \mathscr{A}$ ($\mathscr{A}$ jest **algebrą z jedynką**).

Wniosek

Dla dowolnego $p \in [1, +\infty[$ przestrzeń $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ jest gęsta w $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Dowód

Wystarczy udowodnić, że każda $f \in \mathrm{C_c}(\mathbb{R}^d)$ jest granicą ciągu elementów $\mathrm{C_c^\infty}(\mathbb{R}^d)$ w normie $\|\cdot\|_p$. Ustalmy więc $f \in \mathrm{C_c}(\mathbb{R}^d)$ i niech K będzie zbiorem postaci

$$K = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$$

zawierającym nośnik f.

Teraz rozważmy zbiór funkcji wielomianowych na $\mathbb{R}^d$ obciętych do K. Na mocy twierdzenia Stone'a-Weierstrassa zbiór ten jest gęstą podprzestrzenią $\mathrm{C}(K)$ w normie $\|\cdot\|_{\infty,K}$ (norma jednostajna na $\mathrm{C}(K)$). Stąd dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje wielomian p_ε taki, że $\|p_\varepsilon - f\|_{\infty,K} < \varepsilon$. Teraz niech K' będzie zbiorem postaci

$$K' = [a_1', b_1'] \times \cdots \times [a_d', b_d'],$$

gdzie $a_i < a_i' < b_i' < b_i$ dla wszystkich i i miara Lebesgue'a zbioru $K \backslash K'$ jest mniejsza niż ε.

Dowód

Niech φ będzie gładką funkcją $\mathbb{R}^d \to [0,1]$ o nośniku zawartym w K taką, że $\varphi \equiv 1$ na K' i połóżmy $g_\varepsilon = \varphi p_\varepsilon$. Zauważmy, że

$$\|g_\varepsilon - f\|_p^p = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |g_\varepsilon(x) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int\limits_{K\setminus K'} |g_\varepsilon(x) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x + \int\limits_{K'} |g_\varepsilon(x) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x.$$

Drugi składnik po prawej stronie szacujemy w następujący sposób:

$$\int\limits_{K'} |g_\varepsilon(x) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int\limits_{K'} |p_\varepsilon(x) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x \leqslant \big(\|p_\varepsilon - f\|_{\infty,K}\big)^p |K'| \leqslant \varepsilon^p |K|.$$

Dowód

Natomiast pierwszy składnik szacujemy tak:

$$\begin{aligned}\int\limits_{K\setminus K'} |g_\varepsilon(x)-f(x)|^p\,\mathrm{d}x &\leqslant \Big(\sup_{x\in K}|g_\varepsilon(x)-f(x)|\Big)^p |K\setminus K'| \leqslant \big(\|g_\varepsilon\|_{\infty,K}+\|f\|_{\infty,K}\big)^p |K\setminus K'| \\ &\leqslant \big(\|p_\varepsilon\|_{\infty,K}+\|f\|_{\infty,K}\big)^p |K\setminus K'| = \big(\|p_\varepsilon - f + f\|_{\infty,K}+\|f\|_{\infty,K}\big)^p |K\setminus K'| \\ &\leqslant \big(\|p_\varepsilon - f\|_{\infty,K}+2\|f\|_{\infty,K}\big)^p |K\setminus K'| < \big(\varepsilon+2\|f\|_{\infty,K}\big)^p \varepsilon.\end{aligned}$$

W konsekwencji

$$\|g_\varepsilon - f\|_p \leqslant \Big(\big(\varepsilon+2\|f\|_{\infty,K}\big)^p \varepsilon + \varepsilon^p |K|\Big)^{\frac{1}{p}},$$

a ta wielkość może być dowolnie mała przy odpowiednio małym ε. □

Uwaga

Powyższy dowód można przeprowadzić także bez użycia twierdzenia Stone'a-Weierstrassa. Przykładową techniką alternatywnego dowodu jest tak zwana **regularyzacja przez splot**.

Przykład

Zdefiniujmy funkcje $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ kładąc

$$\phi_n(z) = z^n, \qquad z \in \mathbb{T},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Łatwo się przekonać, że $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jest układem ortonormalnym w $L^2(\mathbb{T})$ (ze znormalizowaną miarą Lebesgue'a m). Zauważmy też, że podprzestrzeń

$$\mathscr{A} = \operatorname{span}\{\phi_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

jest $*$-podalgebrą z jedynką w $C(\mathbb{T})$, która rozdziela punkty, a więc na mocy twierdzenia Stone'a-Weierstrassa, $\mathscr{A}$ jest gęsta w $C(\mathbb{T})$ w normie $\|\cdot\|_\infty$. Wynika stąd, że $\mathscr{A}$ jest gęsta w $C(\mathbb{T})$ w normie $\|\cdot\|_2$, bo jeśli $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ jednostajnie, to

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{T}} |f_k - f|^2 \, \mathrm{d}m \leqslant \lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\infty^2 = 0.$$

Przykład

Skoro $C(\mathbb{T})$ jest gęstą podprzestrzenią $L^2(\mathbb{T})$, natychmiast widzimy, że $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jest bazą ortonormalną $L^2(\mathbb{T})$.

Teraz rozważmy przestrzeń $L^2([-\pi,\pi])$ i układ trygonometryczny $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Przestrzeń $L^2([-\pi,\pi])$ jest izometrycznie izomorficzna z $L^2(\mathbb{T})$ poprzez odwzorowanie $W\colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2([-\pi,\pi])$ zdefiniowane wzorem

$$(W\varphi)(t) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big), \qquad t \in \,]-\pi,\pi]\,,\ \varphi \in L^2(\mathbb{T}).$$

Istotnie: nietrudno się przekonać, że W jest odwzorowaniem izometrycznym, a z drugiej strony dla każdego $\psi \in L^2([-\pi,\pi])$ mamy $\psi = W\varphi$, gdzie

$$\varphi(z) = \sqrt{2\pi}\psi\big(\tfrac{1}{\mathrm{i}}\log(z)\big), \qquad z \in \mathbb{T}$$

przy czym $\frac{1}{\mathrm{i}}\log$ oznacza odwzorowanie odwrotne do $]-\pi,\pi] \ni t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in \mathbb{T}$.

Przykład

Ponadto dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ mamy $\phi_n = W\phi_n$. Skoro $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $L^2(\mathbb{T})$, podprzestrzeń $\operatorname{span}\{\phi_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ jest gęsta w $L^2([-\pi,\pi])$. Innymi słowy $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta $L^2([-\pi,\pi])$.