Matematyka mechaniki kwantowej metody przestrzeni Hilberta, wykład 3

Wydział Fizyki UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr zimowy 2026/2027

Wnioski

Niech V będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Wówczas

1. funkcja $V \ni v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle} \in [0, +\infty[$ jest normą,
2. jeśli $v, w \in V$ spełniają $\left|\langle v|w\rangle\right| = \|v\|\|w\|$, to są proporcjonalne,
3. iloczyn skalarny jest ciągły względem metryki wyznaczonej przez normę i jednostajnie ciągły na zbiorach ograniczonych,
4. dla dowolnego $v \in V$ mamy $\|v\| = \sup_{\|w\|=1} \left|\langle w|v\rangle\right|$,
5. jeśli v_1 i v_2 spełniają $\langle w|v_1\rangle = \langle w|v_2\rangle$ dla wszystkich $w \in V$, to $v_1 = v_2$.

Dowód

Ad ❶. Jest jasne, że $\|\alpha v\|^2 = \langle \alpha v | \alpha v \rangle = |\alpha|^2 \langle v | v \rangle = |\alpha|^2 \|v\|^2$ dla wszystkich $v \in V$ i $\alpha \in \mathbb{C}$. Dalej, na mocy nierówności Schwarza

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w | v + w \rangle = \langle v | v \rangle + \langle v | w \rangle + \langle w | v \rangle + \langle w | w \rangle \\ &= \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle v | w \rangle + \|w\|^2 \leqslant \|v\|^2 + 2 \big| \langle v | w \rangle \big| + \|w\|^2 \\ &\leqslant \|v\|^2 + 2 \|v\| \|w\| + \|w\|^2 = \big(\|v\| + \|w\| \big)^2. \end{aligned}$$

Ad ❷. Niech $\big| \langle v | w \rangle \big| = \|v\| \|w\|$. Tak jak w dowodzie nierówności Schwarza, możemy wybrać θ tak, aby $\big\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} v \big| w \big\rangle = \big| \langle v | w \rangle \big|$. Wtedy wyróżnik wielomianu

$$\Big\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} v + tw \Big| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} v + tw \Big\rangle = \langle w | w \rangle t^2 + 2 \big| \langle v | w \rangle \big| t + \langle v | v \rangle = \|w\|^2 t^2 + 2 \big| \langle v | w \rangle \big| t + \|v\|^2$$

jest równy zero.

Dowód

Tak więc istnieje $t_0 \in \mathbb{R}$ takie, że $\left\langle e^{i\theta} v + t_0 w \middle| e^{i\theta} v + t_0 w \right\rangle = 0$, czyli $e^{i\theta} v + t_0 w = 0$, a więc v i w są proporcjonalne.

Ad ❸. Jeśli $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$ i $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} w$, to

$$\begin{aligned}
\left|\langle v_n | w_n \rangle - \langle v | w \rangle\right| &\leqslant \left|\langle v_n | w_n \rangle - \langle v_n | w \rangle\right| + \left|\langle v_n | w \rangle - \langle v | w \rangle\right| \\
&\leqslant \left|\langle v_n | w_n - w \rangle\right| + \left|\langle v_n - v | w \rangle\right| \\
&\leqslant \|v_n\| \|w_n - w\| + \|v_n - v\| \|w\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

ponieważ ciąg $\left(\|v_n\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony. Powyższy wzór pokazuje również, że iloczyn skalarny jest jednostajnie ciągły na ograniczonych podzbiorach $V \times V$.

Dowód

Ad ❹. Wzór $\|v\| = \sup_{\|w\|=1} \left|\langle w|v\rangle\right|$ jest oczywisty dla $v = 0$. Jeśli $v \neq 0$, to z nierówności Schwarza wnioskujemy, że

$$\sup_{\|w\|=1} \left|\langle w|v\rangle\right| \leqslant \sup_{\|w\|=1} \|w\|\|v\| = \|v\|,$$

a z drugiej strony, biorąc $w = \frac{v}{\|v\|}$ otrzymujemy

$$\left|\langle w|v\rangle\right| = \tfrac{1}{\|v\|}\langle v|v\rangle = \tfrac{1}{\|v\|}\|v\|^2 = \|v\|.$$

Ad ❺. Rozważmy $v = v_1 - v_2$. Wówczas dla dowolnego $w \in V$ mamy $\langle w|v\rangle = \langle w|v_1\rangle - \langle w|v_2\rangle = 0$, a więc $\|v\| = 0$ na mocy punktu ❹. □

Stwierdzenie (reguła równoległoboku)

Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Wówczas dla dowolnych $v, w \in \mathbb{V}$ mamy $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\big(\|v\|^2 + \|w\|^2\big)$.

Dowód

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 &= \langle v+w|v+w\rangle + \langle v-w|v-w\rangle \\ &= \big(\langle v|v\rangle + \langle v|w\rangle + \langle w|v\rangle + \langle w|w\rangle\big) + \big(\langle v|v\rangle - \langle v|w\rangle - \langle w|v\rangle + \langle w|w\rangle\big) \\ &= 2\langle v|v\rangle + 2\langle w|w\rangle.\end{aligned}$$

□

Uwaga

Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią z normą, w której

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\big(\|v\|^2 + \|w\|^2\big).$$

zachodzi dla wszystkich v i w. Wówczas istnieje iloczyn skalarny na $\mathbb{V}$ taki, że $\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$ dla wszystkich $v \in \mathbb{V}$.

- Niech V będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym.
- Dalej niech $(v_n)_{n\in I}$ będzie układem liniowo niezależnym (przy czym $I = \{1, \dots, N\}$ lub $I = \mathbb{N}$).
- Indukcyjnie definiujemy ciągi $(y_n)_{n\in I}$ i $(e_n)_{n\in I}$ w następujący sposób:
  - $y_1 = v_1$ i $e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$,
  - $y_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i | v_k \rangle e_i$ i $e_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$ dla $p \geqslant 1$.
- Otrzymane układy $(y_n)_{n\in I}$ i $(e_n)_{n\in I}$ spełniają
  - układ $(y_n)_{n\in I}$ jest liniowo niezależny,
  - układ $(e_n)_{n\in I}$ jest ortonormalny,
  - $\operatorname{span}\{v_n \mid n \in I\} = \operatorname{span}\{y_n \mid n \in I\} = \operatorname{span}\{e_n \mid n \in I\}$.
- Operację przejścia od układu $(v_n)_{n\in I}$ do $(y_n)_{n\in I}$ nazywamy **ortogonalizacją**, a od $(v_n)_{n\in I}$ do $(e_n)_{n\in I}$ – **ortonormalizacją Grama-Schmidta**.

Przykład

Niech (Ω, μ) będzie przestrzenią z miarą. Dzięki nierówności Höldera wiemy, ze dla dowolnych $\varphi, \psi \in \mathsf{L}^2(\Omega, \mu)$ całka

$$\int_{\Omega} \overline{\varphi}\psi \, \mathrm{d}\mu$$

jest dobrze zdefiniowana i nietrudno się przekonać, że $(\varphi, \psi) \mapsto \langle \varphi | \psi \rangle = \int_{\Omega} \overline{\varphi}\psi \, \mathrm{d}\mu$ jest iloczynem skalarnym na $\mathsf{L}^2(\Omega, \mu)$. Co więcej, mamy $\|\varphi\|_2 = \sqrt{\langle \varphi | \varphi \rangle}$ dla wszystkich $\varphi \in \mathsf{L}^2(\Omega, \mu)$. W szczególności $\mathsf{L}^2(\Omega, \mu)$ jest przestrzenią Hilberta.

Definicja

Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Układ wektorów $(\xi_i)_{i\in I}$ nazywamy **ortonormalnym**, jeśli $\langle \xi_i | \xi_j \rangle = \delta_{i,j}$ dla wszystkich $i,j \in I$.

- Każdy układ ortonormalny jest liniowo niezależny.
- W szczególności jeśli $(\xi_i)_{i\in I}$ jest układem ortonormalnym w przestrzeni $\mathscr{H}$, to możemy uważać $\{\xi_i\}_{i\in I}$ za podzbiór $\mathscr{H}$.

Przykłady

1. Niech J będzie dowolnym zbiorem. Dla $j \in J$ niech δ_j oznacza funkcję charakterystyczną singletonu $\{j\}$. Wówczas $(\delta_j)_{j\in J}$ jest układem ortonormalnym w przestrzeni $\ell_2(J)$.
2. Rozważmy przestrzeń Hilberta $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi])$ (domyślnie z miarą Lebesgue'a) i dla $n \in \mathbb{Z}$ niech
$$\phi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}, \qquad t \in [-\pi,\pi].$$
Wówczas układ $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jest ortonormalny. Układ ten nazywamy **układem trygonometrycznym**.

Twierdzenie

Niech $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathscr{H}$ i niech $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem slakarów sumowalnym z kwadratem. Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n$ jest zbieżny w $\mathscr{H}$.

Proof.

Dowód Rozważmy ciąg sum częściowych

$$n \mapsto s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k.$$

Dla $m > n$ mamy

$$\|s_m - s_n\|^2 = \left\langle \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k \phi_k \middle| \sum_{l=n+1}^{n} \alpha_l \phi_l \right\rangle = \sum_{k,l=n+1}^{m} \overline{\alpha_k} \alpha_l \langle \phi_k | \phi_l \rangle = \sum_{k=n+1}^{m} |\alpha_k|^2,$$

a ta wielkość jest dowolnie mała, jeśli tylko n jest dostatecznie duże, gdyż szereg $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ jest zbieżny. Innymi słowy ciąg $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny. □

Twierdzenie

Niech $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathscr{H}$ i niech $\xi \in \mathscr{H}$. Dla $n \in \mathbb{N}$ połóżmy $\alpha_n = \langle \phi_n | \xi \rangle$. Wówczas

1. $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty$,
2. wektor $\xi' = \xi - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n$ jest ortogonalny do ϕ_m dla wszystkich $m \in \mathbb{N}$.

Dowód

Ad ❶. Dla $N \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \left\| \xi - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \phi_n \right\|^2 &= \left\langle \xi - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \phi_n \middle| \xi - \sum_{m=1}^{N} \alpha_m \phi_m \right\rangle \\
&= \langle \xi | \xi \rangle - \left\langle \xi \middle| \sum_{m=1}^{N} \alpha_m \phi_m \right\rangle - \left\langle \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \phi_n \middle| \xi \right\rangle + \left\langle \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \phi_n \middle| \sum_{m=1}^{N} \alpha_m \phi_m \right\rangle \\
&= \|\xi\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \overline{\alpha_n} \langle \phi_n | \xi \rangle - \sum_{m=1}^{N} \alpha_m \langle \xi | \phi_m \rangle + \sum_{m,n=1}^{N} \overline{\alpha_n} \alpha_m \langle \phi_n | \phi_m \rangle \\
&= \|\xi\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2 - \sum_{m=1}^{N} |\alpha_m|^2 + \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2,
\end{aligned}$$

a więc $\sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2 \leqslant \|\xi\|^2$ dla wszystkich N. Stąd $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty$.

Dowód

Ad ❷. Skoro szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n$ jest zbieżny, możemy rozważać wektor

$$\xi' = \xi - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n$$

i dla każdego m mamy

$$\langle \phi_m | \xi' \rangle = \langle \phi_m | \xi \rangle - \left\langle \phi_m \middle| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n \right\rangle = \langle \phi_m | \xi \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle \phi_m | \phi_n \rangle = \alpha_m - \alpha_m = 0,$$

czyli ξ' jest ortogonalny do ϕ_m. □

Uwaga

W dowodzie ostatniego twierdzenia wykazaliśmy, że jeśli $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathscr{H}$ i $\xi \in \mathscr{H}$, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle \phi_n | \xi \rangle\right|^2 \leqslant \|\xi\|^2.$$

Nierówność ta znana jest pod nazwą **nierówności Bessela**.

Twierdzenie

Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i niech $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie układem ortonormalnym w $\mathscr{H}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. układ $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest maksymalny,
2. podprzestrzeń $\operatorname{span}\{\phi_n \mid i \in \mathbb{N}\}$ jest gęsta w $\mathscr{H}$,
3. dla dowolnego $\xi \in \mathscr{H}$ warunek $\langle \phi_n | \xi \rangle = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ pociąga $\xi = 0$,
4. dla dowolnego $\xi \in \mathscr{H}$ mamy $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n | \xi \rangle \phi_n$,
5. dla dowolnych $\xi, \eta \in \mathscr{H}$ mamy $\langle \xi | \eta \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \eta \rangle$,
6. dla dowolnego $\xi \in \mathscr{H}$ mamy $\|\xi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle \phi_n | \xi \rangle \right|^2$.

Dowód

❶ $\Rightarrow$ ❷ Niech $\mathscr{M}$ oznacza domknięcie $\operatorname{span}\{\phi_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ (jest jasne, że $\mathscr{M}$ jest podprzestrzenią $\mathscr{H}$) i przypuśćmy, że $\mathscr{M} \neq \mathscr{H}$. Weźmy wektor $\xi \in \mathscr{H} \setminus \mathscr{M}$. Wtedy $\xi \neq 0$ i na mocy poprzedniego twierdzenia wektor

$$\xi' = \xi - \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n | \xi \rangle \phi_n$$

jest ortogonalny do wszystkich ϕ_m. Co więcej $\xi' \neq 0$, bo warunek $\xi' = 0$ oznacza $\xi \in \mathscr{M}$. Niech $\eta = \frac{\xi'}{\|\xi'\|}$. Wówczas η ma długość 1 i jest ortogonalny do wszystkich ϕ_m, a więc układ $\{\phi_m\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{\eta\}$ jest ortonormalny i ściśle większy niż $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Dowód

❷ $\Rightarrow$ ❸ Jeśli $\xi \in \mathscr{H}$ jest ortogonalny do ϕ_m dla wszystkich $m \in \mathbb{N}$, to ξ jest ortogonalny do $\operatorname{span}\{\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, tj.

$$\langle \eta | \xi \rangle = 0, \qquad \eta \in \operatorname{span}\{\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Na mocy ciągłości iloczynu skalarnego otrzymujemy więc $\langle \eta | \xi \rangle = 0$ dla każdego $\eta \in \mathscr{H}$, np. dla $\eta = \xi$, co daje $\|\xi\|^2 = \langle \xi | \xi \rangle = 0$.

❸ $\Rightarrow$ ❹ Połóżmy

$$\xi' = \xi - \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n | \xi \rangle \phi_n.$$

Skoro ξ' jest ortogonalny do wszystkich ϕ_m, otrzymujemy $\xi' = 0$.

Dowód

❹ $\Rightarrow$ ❺ Z ciągłości iloczynu skalarnego i jego antyliniowości względem pierwszego argumentu dostajemy

$$\langle \xi | \eta \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n | \xi \rangle \phi_n \middle| \eta \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\langle \phi_n | \xi \rangle} \langle \phi_n | \eta \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \eta \rangle.$$

❺ $\Rightarrow$ ❻ Kładziemy $\eta = \xi$.

❻ $\Rightarrow$ ❶ Przypuśćmy, że S jest układem ortonormalnym w $\mathscr{H}$ takim, że $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subsetneq S$ i weźmy $\xi \in S \backslash \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Wtedy $1 = \|\xi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle \phi_n | \xi \rangle\right|^2 = 0$. Sprzeczność ta pokazuje, że układ $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest maksymalny. □

Definicja

Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Układ ortonormalny $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w $\mathscr{H}$ spełniający równoważne warunki z poprzedniego twierdzenia nazywamy **bazą ortonormalną** przestrzeni $\mathscr{H}$.

- Niech $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta $\mathscr{H}$.
- Zapisanie dowolnego $\xi \in \mathscr{H}$ w postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n | \xi \rangle \phi_n$ nazywamy **rozwinięciem Fouriera** ξ w bazie $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Równość
$$\|\xi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle \phi_n | \xi \rangle \right|^2$$
nosi nazwę **równości Parsevala**.
- Każda przestrzeń Hilberta ma bazę ortonormalną.