Matematyka mechaniki kwantowej metody przestrzeni Hilberta, wykład 2

Wydział Fizyki UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr zimowy 2026/2027

- Dla mierzalnej $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ definiujemy

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f| = \inf_{\substack{\Delta\subset\Omega \\ \mu(\Omega\setminus\Delta)=0}} \sup_{x\in\Delta} \big|f(x)\big|.$$

- Zauważmy, że $\big\{f \,\big|\, \|f\|_\infty = 0\big\} = \big\{f \,\big|\, f \doteq 0\big\} = \mathscr{N}$.
- Ponadto $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ dla dowolnych f i g i $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$ dla wszystkich f oraz $\lambda \in \mathbb{C}$
- Kładziemy $\mathscr{L}^\infty(\Omega,\mu) = \big\{f \,\big|\, \|f\|_\infty < +\infty\big\}$ i definiujemy

$$L^\infty(\Omega,\mu) = \mathscr{L}^\infty(\Omega,\mu)/\mathscr{N}.$$

Fakt

$L^\infty(\Omega,\mu)$ z normą $\|\cdot\|_\infty$ jest przestrzenią Banacha.

- Niech I będzie dowolnym zbiorem.
- Rozważając na I miarę liczącą μ, możemy utworzyć przestrzenie $L^p(I,\mu)$ ($p \in [1,+\infty]$). W tej sytuacji przestrzeń tę oznaczamy symbolem $\ell_p(I)$.
- Gdy I jest zbiorem d elementowym, przestrzeń $\ell_p(I)$ jest izomorficzna z $\mathbb{C}^d$ z normą

$$\left\| \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{bmatrix} \right\| = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{d} |\lambda_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} & p \in [1,+\infty[\\ \max_i |\lambda_i| & p = +\infty \end{cases}.$$

Stwierdzenie

Niech X i Y będą przestrzeniami z normą i niech $T\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem liniowym. Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. odwzorowanie T jest ciągłe,
2. odwzorowanie T jest ciągłe w 0,
3. mamy $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < +\infty$.

Definicja

Odwzorowanie liniowe $T\colon X \to Y$ spełniające powyższe warunki nazywamy **ograniczonym**. Zbiór wszystkich ograniczonych operatorów $X \to Y$ oznaczamy symbolem $B(X, Y)$, a w przypadku $Y = X$ piszemy $\mathrm{B}(X)$.

- Funkcja
$$\|\cdot\|\colon \mathrm{B}(X,Y) \ni T \longmapsto \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \in [0,+\infty[$$
jest normą.
- Ponadto jeśli Y jest zupełna, to przestrzeń $\mathrm{B}(X,Y)$ z normą $\|\cdot\|$ jest przestrzenią Banacha.
- Gdy $Y = \mathbb{C}$, przestrzeń $\mathrm{B}(X,Y)$ oznaczamy symbolem X^* i nazywamy **przestrzenią sprzężoną** do X.
- Z twierdzenia Hahna-Banacha wynika, że odwzorowanie $\kappa\colon X \to X^{**}$ zadane wzorem
$$\kappa(x)(\phi) = \phi(x), \qquad x \in X,\ \phi \in X^*$$
jest izometrią. Obraz κ może być właściwą podprzestrzenią X^{**}.

Przykład

Niech $p \in [1, +\infty[$ i niech $q \in]1, +\infty]$ będzie takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wówczas

1. dla każdego $b \in \ell_q$ ciąg ab jest sumowalny i odwzorowanie

$$\varphi_b \colon \ell_p \ni a \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n \in \mathbb{K}$$

   należy do ℓ_p^*,
2. każdy element ℓ_p^* jest postaci φ_b dla jedynego $b \in \ell_q$,
3. odwzorowanie $\ell_q \ni b \mapsto \varphi_b \in \ell_p^*$ jest izometrią.

Twierdzenie

Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią z normą.

1. Niech Y będzie przestrzenią z normą i niech $T\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem liniowym. Wówczas T jest ciągłe.
2. Niech $\|\cdot\|'$ będzie inną normą na X. Wówczas istnieją stałe $c_1, c_2 > 0$ takie, że $c_1\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant c_2\|x\|, \qquad x \in X.$
3. Każdy domknięty i ograniczony podzbiór X jest zwarty.
4. X jest przestrzenią Banacha.

Wniosek

Niech X będzie przestrzenią z normą, a Y jej skończenie wymiarową podprzestrzenią. Wtedy Y jest skończenie wymiarową przestrzenią z normą, a więc jest zupełna i w konsekwencji domknięta w X. Innymi słowy każda skończenie wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni z normą jest domknięta.

Stwierdzenie

Niech X będzie skończenie wymiarową przestrzenią z normą nad ciałem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ i niech $\{e_1, \ldots, e_d\}$ będzie bazą X. Wówczas izomorfizm

$$\Lambda \colon \mathbb{K}^d \ni \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{bmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^{d} \lambda_i e_i \in X$$

jest homeomorfizmem, przy czym na $\mathbb{K}^d$ rozważamy metrykę pochodzącą od normy

$$\left\| \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{bmatrix} \right\| = \max\{|\lambda_1, \ldots, |\lambda_d|\}.$$

Dowód

Odwzorowanie Λ jest ciągłe, jako że

$$\left\| \Lambda \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{bmatrix} - \Lambda \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_d \end{bmatrix} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{d} (\lambda_i - \mu_i) e_i \right\|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{d} |\lambda_i - \mu_i| \|e_i\| \leqslant \max\{|\lambda_1 - \mu_1|, \ldots, |\lambda_d - \mu_d|\} \sum_{i=1}^{d} \|e_i\|,$$

czyli $\|\Lambda\| \leqslant \sum_{i=1}^{d} \|e_i\|$.

Dowód

Przypuśćmy teraz, że Λ^{-1} nie jest ciągłe. Wtedy Λ^{-1} jest nieciągłe w punkcie $0 \in X$, a więc istnieje ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów X taki, że $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ale ciąg $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów $\mathbb{K}^d$ zdefiniowany jako

$$u_n = \Lambda^{-1}x_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

nie jest zbieżny do zera. Innymi słowy istnieje stała $\delta > 0$ taka, że $\|u_n\| \geqslant \delta$ dla nieskończenie wielu n. Przechodząc do podciągu możemy przyjąć, że

$$\|u_n\| \geqslant \delta, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{♣}$$

Dowód

Położmy $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. Wektory $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są elementami $(d-1)$-wymiarowej sfery o środku w zerze i promieniu 1 w $\mathbb{K}$, która jest zbiorem zwartym (jest domkniętym i ograniczonym podzbiorem $\mathbb{K}^d$). Stąd istnieje podciąg $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ciągu $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $v_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} v$ dla pewnego v ze sfery jednostkowej ($\|v\| = 1$).

Mamy

$$\Lambda v_n = \frac{1}{\|u_n\|}\Lambda u_n = \frac{1}{\|u_n\|}x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

bo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega do zera a ciąg współczynników $\left(\frac{1}{\|u_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony (por. (♣)).

Przechodząc do podciągu dostajemy

$$0 \neq v \xleftarrow[\infty\leftarrow k]{} v_{n_k} \overset{\Lambda}{\longmapsto} \frac{1}{\|u_{n_k}\|}x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

jako że Λ jest ciągłe. Ale to stoi w sprzeczności z injektywnością Λ i w efekcie pokazuje, że Λ^{-1} musi być ciągłe. □

Dowód twierdzenia

Ad ❶. Niech $\{e_1, \dots, e_d\}$ będzie bazą X i niech $\Lambda\colon \mathbb{K}^d \to X$ będzie homeomorfizmem opisany w poprzednim stwierdzeniu. Dalej niech

$$\Gamma\colon \mathbb{K}^d \ni \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{bmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^{d} \lambda T e_i \in X.$$

Tak samo jak w przypadku Λ pokazujemy, że odwzorowanie Γ jest ciągłe. Jest też jasne, że $T = \Gamma \circ \Lambda^{-1}$, a więc T jest ciągłe.

Ad ❷. Rozważmy odwzorowanie identycznościowe $\mathbb{1}_X\colon X \to X$ jako odwzorowanie z $(X, \|\cdot\|)$ do $(X, \|\cdot\|')$. Na mocy punktu ❶ odwzorowanie to jest ciągłe, a więc jest ograniczone. Kładąc $c_2 = \|\mathbb{1}_X\|$ otrzymujemy

$$\|x\|' = \|\mathbb{1}_X x\|' \leqslant \|\mathbb{1}_X\|\|x\| = c_2\|x\|, \qquad x \in X.$$

Podobnie pokazujemy istnienie stałej $c_1 > 0$ takiej, że $\|x\| \leqslant \frac{1}{c_1}\|x\|'$ $(x \in X)$, co daje nam $c_1\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant c_2\|x\|$ dla wszystkich x.

Dowód twierdzenia

Ad ❸. Niech $K \subset X$ będzie domknięty i ograniczony. Odwzorowanie $\Lambda^{-1}\colon X \to \mathbb{K}^d$ z poprzedniego stwierdzenia jest ciągłe, a więc ograniczone. Wynika stąd, że $\Lambda^{-1}(K)$ jest ograniczonym podzbiorem X:

$$\sup\{\|\Lambda^{-1}k\| \mid k \in K\} \leqslant \|\Lambda^{-1}\| \sup\{\|k\| \mid k \in K\}.$$

Oczywiście $\Lambda^{-1}(K)$ jest także zbiorem domkniętym, jako że odwzorowanie Λ jest ciągłe.

Oznacza to, że zbiór $\Lambda^{-1}(K)$ jest zwarty, a stąd oczywiście $K = \Lambda\big(\Lambda^{-1}(K)\big)$ jest zwarty.

Ad ❹. Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w X i niech $K = \overline{\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$. Wówczas zbiór K jest domknięty i ograniczony, a więc na mocy punktu ❸ jest zwarty. Wynika stąd, że ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma podciąg zbieżny $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Ale ciąg Cauchy'ego, którego podciąg jest zbieżny, musi być zbieżny (do tej samej granicy). Oznacza to, że przestrzeń X jest zupełna. □

Definicja

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$. **Formą półtoraliniową na** V nazywamy odwzorowanie $F\colon V \times V$ takie, że

1. dla każdego $v \in V$ odwzorowanie $V \ni w \mapsto F(v,w) \in \mathbb{C}$ jest liniowe,
2. dla każdego $w \in V$ odwzorowanie $V \ni v \mapsto F(v,w) \in \mathbb{C}$ jest antyliniowe.

Forma półtoraliniowa F na V jest

1. **hermitowska**, jeśli $F(w,v) = \overline{F(v,w)}$ dla wszystkich $v, w \in V$,
2. **dodatnia**, jeśli $F(v,v) \geqslant 0$ dla wszystkich $v \in V$,
3. **ściśle dodatnia**, jeśli $F(v,v) > 0$ dla wszystkich $v \in V \backslash \{0\}$.

Iloczynem skalarnym na V nazywamy ściśle dodatnią formę półtoraliniową na V. Zazwyczaj oznaczamy ją symbolem $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Stwierdzenie (tożsamość polaryzacyjna)

Niech F będzie formą półtoraliniową na V. Wówczas

$$F(v,w) = \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k F(w+\mathrm{i}^k v, w+\mathrm{i}^k v), \qquad v,w \in \mathsf{V}.$$

Dowód

Mamy

$$\begin{aligned}
F(w+v,w+v) &= F(w,w)+F(w,v)+F(v,w)+F(v,v),\\
\mathrm{i}F(w+\mathrm{i}v,w+\mathrm{i}v) &= \mathrm{i}F(w,w)-F(w,v)+F(v,w)+\mathrm{i}F(v,v),\\
-F(w-v,w-v) &= -F(w,w)+F(w,v)+F(v,w)-F(v,v),\\
-\mathrm{i}F(w-\mathrm{i}v,w-\mathrm{i}v) &= -\mathrm{i}F(w,w)-F(w,v)+F(v,w)-\mathrm{i}F(v,v).
\end{aligned}$$

Dodając stronami powyższe równości otrzymujemy $\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k F(w+\mathrm{i}^k v, w+\mathrm{i}^k v) = 4F(v,w)$. □

Przykłady innych form tożsamości polaryzacyjnej

1. $F(v,w) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^{-k} F(v+\mathrm{i}^k w, v+\mathrm{i}^k w)$,
2. $F(v,w) = \int_{\mathbb{T}} z\, F(w+zv, w+zv)\,\mathrm{d}\mu(z)$, gdzie μ jest borelowską miarą probabilistyczną na $\mathbb{T}$ taką, że $\int_{\mathbb{T}} z\,\mathrm{d}\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} z^2\,\mathrm{d}\mu(z) = 0$.

Uwaga

Funkcja $z \mapsto F(w+zv, w+zv)$ jest ciągła, a więc całka w punkcie 2 ma sens.

Stwierdzenie

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$ i niech F będzie formą półtoraliniową na V. Wtedy

1. jeśli F jest ściśle dodatnia, to F jest dodatnia,
2. jeśli F jest dodatnia, to F jest hermitowska.

Dowód punktu 2

Na mocy tożsamości polaryzacyjnej dla dowolnych $v, w \in V$ mamy

$$\overline{F(v,w)} = \overline{\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k F(w+\mathrm{i}^k v, w+\mathrm{i}^k v)} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^{-k}\overline{F(w+\mathrm{i}^k v, w+\mathrm{i}^k v)}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^{-k} F(w+\mathrm{i}^k v, w+\mathrm{i}^k v) = F(w,v). \quad \square$$

Stwierdzenie (nierówność Schwarza)

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$ i niech F będzie dodatnią formą półtoraliniową na V. Wtedy

$$\left|F(v,w)\right| \leqslant F(v,v)^{\frac{1}{2}} F(w,w)^{\frac{1}{2}}.$$

Dowód

Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R} \ni t \mapsto F(v+tw, v+tw)$. Funkcja ta przyjmuje wyłącznie nieujemne wartości, a ponadto

$$f(t) = F(w,w)t^2 + 2\operatorname{Re} F(v,w)t + F(v,v),$$

a wiec $\Delta = 4\big(\operatorname{Re} F(v,w)\big)^2 - 4F(w,w)F(v,v) \leqslant 0$, czyli

$$\big(\operatorname{Re} F(v,w)\big)^2 \leqslant F(w,w)F(v,v).$$

Nierówność ta zachodzi dla wszystkich v i w, a więc także dla par postaci $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}v, w)$, gdzie θ jest tak dobrana, że $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}F(v,w) \geqslant 0$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}\big|F(v,w)\big|^2 &= \big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}F(v,w)\big)^2 = \big(\operatorname{Re} F(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}v, w)\big)^2 \\ &\leqslant F(w,w)F(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}v, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}v) = F(w,w)F(v,v).\end{aligned}$$

□

Definicja

Przestrzenią Hilberta nazywamy przestrzeń z iloczynem skalarnym, która jest zupełna względem metryki wyznaczonej przez normę zdefiniowaną przez iloczyn skalarny.

Przykład

Każda skończenie wymiarowa przestrzeń z iloczynem skalarnym jest przestrzenią Hilberta.

Przykład

Niech V będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym i niech $\mathscr{H}$ będzie uzupełnieniem przestrzeni metrycznej (V, d), gdzie $d(v, w) = \|v - w\|$ (norma zdefiniowana przez iloczyn skalarny). Operacje algebraiczne, norma i iloczyn skalarny rozszerzają się jednoznacznie na całą przestrzeń $\mathscr{H}$, która wraz z tymi operacjami jest przestrzenią Hilberta.