Matematyka mechaniki kwantowej metody przestrzeni Hilberta, wykład 1

Wydział Fizyki UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr zimowy 2026/2027

- Niech X będzie przestrzenią zwartą.
- Wówczas zbiór $\mathrm{C}(X)$ wszystkich ciągłych funkcji $X \to \mathbb{C}$ jest przestrzenią Banacha z normą
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \big|f(x)\big|, \qquad f \in \mathrm{C}(X).$$
- Teraz niech X będzie przestrzenią **lokalnie zwartą**, tj. taką, że każdy punkt $x \in X$ ma otoczenie o zwartym domknięciu.
- Wówczas dla $f \in \mathrm{C}(X)$ może być $\|f\|_\infty = +\infty$, ale norma ma skończone wartości na zbiorze $\mathrm{C_b}(X)$ funkcji ciągłych i ograniczonych na X.
- $\mathrm{C_b}(X)$ jest przestrzenią Banacha z normą $\|\cdot\|_\infty$.
- Niech $\mathrm{C_0}(X)$ oznacza zbiór $f \in \mathrm{C}(X)$ takich, że dla dowolnej liczby $\nu > 0$ zbiór
$$\Big\{ x \in X \,\Big|\, \big|f(x)\big| \geqslant \nu \Big\}$$
jest zwarty. Jest jasne, że $\mathrm{C_0}(X)$ jest podzbiorem $\mathrm{C_b}(X)$ i nietrudno się przekonać, że jest to podprzestrzeń wektorowa.

Stwierdzenie

$\mathrm{C}_0(X)$ jest domkniętą podprzestrzenią $\mathrm{C}_\mathrm{b}(X)$.

Dowód

Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów $\mathrm{C}_0(X)$ zbieżnym jednostajnie do f. Wówczas oczywiście f jest ciągła, a ponadto warunek

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

pociąga za sobą fakt, że dla dowolnej liczby $\nu > 0$ oraz x takiego, że $\big|f(x)\big| \geqslant \nu$ mamy

$$\big|f_{N_{\frac{\nu}{2}}}(x)\big| \geqslant \big|f(x)\big| - \big|f(x) - f_{N_{\frac{\nu}{2}}}(x)\big| \geqslant \nu - \big|f(x) - f_{N_{\frac{\nu}{2}}}(x)\big| \geqslant \nu - \tfrac{\nu}{2} = \tfrac{\nu}{2},$$

a więc $\Big\{x \in X \,\Big|\, \big|f(x)\big| \geqslant \nu\Big\} \subset \Big\{x \in X \,\Big|\, \big|f_{N_{\frac{\nu}{2}}}(x)\big| \geqslant \tfrac{\nu}{2}\Big\}$. Wynika stąd, że dla dowolnej liczby $\nu > 0$ zbiór $\Big\{x \in X \,\Big|\, \big|f(x)\big| \geqslant \nu\Big\}$ jest zwarty. □

- Przestrzeń $\mathrm{C}_0(X)$ nazywany **przestrzenią funkcji ciągłych znikających w nieskończoności** na X.
- Czasami na oznaczenie $\mathrm{C}_0(X)$ stosowana jest również notacja $\mathrm{C}_\infty(X)$.
- W przypadku gdy przestrzeń X jest dyskretna, piszemy $\mathrm{c}_\mathrm{b}(X)$ i $\mathrm{c}_0(X)$ zamiast $\mathrm{C}_\mathrm{b}(X)$ i $\mathrm{C}_0(X)$, a w przypadku $X = \mathbb{N}$ po prostu c_b (lub c) i c_0.
- Jeśli X ma skończenie wiele punktów, to $\mathrm{C}(X) = \mathrm{C}_\mathrm{b}(X) = \mathrm{C}_0(X)$ jest izomorficzna z przestrzenią $\mathbb{C}^{|X|}$ z normą

$$\left\| \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{|X|} \end{bmatrix} \right\|_\infty = \max_i |\lambda_i|.$$

- Niech (Ω, μ) będzie przestrzenią z miarą i ustalmy $p \in [1, +\infty[$.
- Dla mierzalnej funkcji $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ definiujemy

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

  i kładziemy $\mathscr{L}^p(\Omega, \mu) = \{ f \mid \|f\|_p < +\infty \}$ oraz $\mathscr{N} = \{ f \mid \|f\|_p = 0 \}$.
- Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnej mierzalnej funkcji f i $\lambda \in \mathbb{C}$ mamy $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$.

Lemat

Mamy $\mathcal{N} = \{f \,|\, f \doteq 0\}$.

Dowód

Jeśli $\int\limits_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu = 0$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zbiór

$$A_n = \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, |f(x)|^p > \tfrac{1}{n} \right\}$$

jest miary zero (w przeciwnym razie $\int\limits_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu \geqslant \frac{1}{n}\mu(A_n) > 0$ dla pewnego n). Stąd

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = 0$$

i w konsekwencji $|f|^p = 0$ poza zbiorem miary zero. To oczywiście oznacza, że $f \doteq 0$. □

Twierdzenie (nierówność Minkowskiego)

Niech (Ω, μ) będzie przestrzenią z miarą i niech f i g będą funkcjami mierzalnymi $\Omega \to \mathbb{C}$. Wówczas

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p. \qquad (\star)$$

Dowód

Jeśli $\|f\|_p = +\infty$ lub $\|g\|_p = +\infty$, to nierówność $(\star)$ jest spełniona. Z drugiej strony, jeśli $\|f\|_p = 0$ to $f \doteq 0$, a więc $f + g \doteq g$ i mamy

$$\|f + g\|_p = \|g\|_p = \|0\| + \|g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p,$$

czyli $(\star)$ zachodzi również w tym przypadku. Podobnie jest gdy $\|g\|_p = 0$.

Udowodnimy teraz $(\star)$ w przypadku $0 < \|f\|_p, \|g\|_p < +\infty$. Wykorzystamy w tym celu wypukłość funkcji $t \mapsto t^p$ na $[0, +\infty[$.

Dowód

Obliczamy

$$\begin{aligned}\frac{\|f+g\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p} &= \left\| \frac{f}{\|f\|_p+\|g\|_p} + \frac{g}{\|f\|_p+\|g\|_p} \right\| \\ &= \left\| \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p}\frac{f}{\|f\|_p} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p}\frac{g}{\|g\|_p} \right\| = \left\| \alpha\frac{f}{\|f\|_p} + \beta\frac{g}{\|g\|_p} \right\|,\end{aligned}$$

gdzie $\alpha = \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p}$, a $\beta = \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p}$. Mamy $\alpha, \beta \geqslant 0$ oraz $\alpha + \beta = 1$.

Dowód

$$\frac{\|f+g\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p} = \left\|\alpha\frac{f}{\|f\|_p}+\beta\frac{g}{\|g\|_p}\right\| = \left(\int_\Omega \left|\alpha\tfrac{f}{\|f\|_p}+\beta\tfrac{g}{\|g\|_p}\right|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_\Omega \left(\alpha\tfrac{|f|}{\|f\|_p}+\beta\tfrac{|g|}{\|g\|_p}\right)^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \left(\int_\Omega \left(\alpha\tfrac{|f|^p}{\|f\|_p^p}+\beta\tfrac{|g|^p}{\|g\|_p^p}\right)\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{\alpha}{\|f\|_p^p}\int_\Omega |f|^p\,\mathrm{d}\mu + \frac{\beta}{\|g\|_p^p}\int_\Omega |g|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\|f\|_p^p}\|f\|_p^p + \frac{\beta}{\|g\|_p^p}\|g\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} = (\alpha+\beta)^{\frac{1}{p}} = 1,$$

co kończy dowód. □

Wnioski

1. $\mathscr{L}^p(\Omega, \mu)$ jest przestrzenią wektorową,
2. $\mathscr{N}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathscr{L}^p(\Omega, \mu)$.

Definicja

Przestrzeń $L^p(\Omega, \mu)$ jest to przestrzeń ilorazowa $\mathscr{L}^p(\Omega, \nu)/\mathscr{N}$.

- Elementami $L^p(\Omega, \mu)$ są **klasy funkcji** względem relacji równości prawie wszędzie.
- Mimo to, dla $f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mu)$ zamiast $f + \mathscr{N} \in L^p(\Omega, \mu)$ piszemy zwykle $f \in L^p(\Omega, \mu)$. Może to prowadzić do nieścisłości, ale zazwyczaj dbamy, aby uznając funkcję f za element przestrzeni $L^p(\Omega)$ nie wykonywać na niej żadnych operacji, które zależałyby od f a nie od klasy f względem relacji równości prawie wszędzie.
- Funkcja $L^p(\Omega, \mu) \ni f \longmapsto \|f\|_p \in [0, +\infty[$ jest normą.

Twierdzenie

Przestrzeń $L^p(\Omega, \mu)$ z normą $\|\cdot\|_p$ jest przestrzenią Banacha.

Dowód

Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $L^p(\Omega,\mu)$ i wybierzmy z niego podciąg $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ taki, że

$$\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < \tfrac{1}{2^j}, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Dalej niech $g_k = \sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$ oraz $g = \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| = \lim_{k\to\infty} g_k$.

Z nierówności Minkowskiego wynika, że $\|g_k\|_p \leqslant 1$ dla wszystkich k, a ponadto

$$\|g\|_p^p = \int_\Omega |g|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} |g_k|^p \,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |g_k|^p \,\mathrm{d}\mu \leqslant 1$$

na mocy lematu Fatou.

Dowód

W szczególności $|g(x)| < +\infty$ dla prawie wszystkich $x \in \Omega$, a w konsekwencji dla prawie wszystkich x szereg

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)|$$

Jest zbieżny. Zbieżny jest zatem także szereg

$$f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \big(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\big),$$

co oznacza, że ciąg $\big(f_{n_k}(x)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny dla prawie wszystkich x. Innymi słowy ciąg $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny punktowo prawie wszędzie na Ω.

Oznaczmy (prawie wszędzie zdefiniowaną) granicę ciągu $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ symbolem f i rozszerzmy f do funkcji mierzalnej na całym zbiorze Ω. Pokażemy, że f definiuje element $L^p(\Omega,\mu)$ oraz że $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ w $L^p(\Omega,\mu)$.

Dowód

Skoro

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, m, n \geqslant N_\varepsilon \quad \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon,$$

korzystając ponownie z lematu Fatou, możemy oszacować $\|f_n - f\|_p$:

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} |f_n - f_{n_k}|^p \,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |f_n - f_{n_k}|^p \,\mathrm{d}\mu = \liminf_{k\to\infty} \|f_n - f_{n_k}\|_p^p \leqslant \varepsilon^p,$$

jeśli tylko $n \geqslant N_\varepsilon$. W szczególności $f - f_n \in L^p(\Omega, \mu)$, a więc $f = f_n + (f - f_n) \in L^p(\Omega, \mu)$. Wreszcie skoro $f \in L^p(\Omega, \mu)$, oszacowanie

$$\|f_n - f\|_p \leqslant \varepsilon, \qquad n \geqslant N_\varepsilon$$

pokazuje, że $f_n - f \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ w $L^p(\Omega, \mu)$. □

Uwaga

Warto zapamiętać wykazany przez nas w powyższym dowodzie fakt, że dla $p \in [1, +\infty[$ każdy ciąg zbieżny w $L^p(\Omega, \mu)$ ma podciąg zbieżny punktowo prawie wszędzie.