Teoria Cząstek Elementarnych - Zadania 1

1. Operator O_x, $x = 1, 2$, spełnia relacje komutacyjne:

$$[J_a\,,\,O_x] = O_y \frac{(\sigma_a)_{xy}}{2}. \tag{1}$$

Załóż, że $\langle 3/2, -1/2, \alpha | O_1 | 1, -1, \beta \rangle = A$ i znajdź $\langle 3/2, -3/2, \alpha | O_2 | 1, -1, \beta \rangle$.

2. Operator $(r_+)^2$ spełnia relację

$$[L_+, (r_+)^2] = 0. \tag{2}$$

Zatem jest on składową O_{+2} tworu o spinie 2. Znajdź pozostałe składowe operatora $O^{(2)}$.

3. $\Delta^{++}, \Delta^{+}, \Delta^{0}, \Delta^{-}$ są cząstkami o izospinie 3/2 ($T_3 = 3/2, 1/2, -1/2, -3/2$) z liczbą barionową 1. Produkują się one przez oddziaływania silne w zderzeniach πN. Porównaj prawdopodobieństwo produkcji Δ^{++} w procesie $\pi^+ p \to \Delta^{++}$ z produkcją Δ^0 w $\pi^- p \to \Delta^0$.

4. Załóżmy, że dla pewnej algebry Liego

$$[E_\alpha, E_\beta] = N E_{\alpha+\beta} \tag{3}$$

i $N \neq 0$. Oblicz $[E_\alpha, E_{-\alpha-\beta}]$.

5. Pokaż, że (A, B są macierzami kwadratowymi $n \times n$):

   (a)

$$e^{iA} B e^{-iA} = B + i[A, B] + \frac{i^2}{2}[A, [A, B]] + \frac{i^3}{6}[A, [A, [A, B]]] + \ldots\,, \tag{4}$$

   (b) jeżeli $[A, B] = B$, to B pozostaje niezmiennicze z dokładnością do fazy pod działaniem A zdefiniowanym w punkcie (a).

6. $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ jest wektorem złożonym z macierzy Pauliego. Pokaż, że

$$e^{i\vec{r}\vec{\sigma}} = \cos r + (\hat{r}\vec{\sigma}) \sin r, \tag{5}$$

gdzie $r = |\vec{r}|$ oraz $\hat{r} = \vec{r}/r$.

7. Zdefiniujmy obiekty

$$F^i = \int d^3x\; q^\dagger(x) \frac{\lambda^i}{2} q(x), \tag{6}$$

i załóżmy, że są one niezależne od czasu. Pola $q(x) = (q^1(x), q^2(x), q^3(x))$ spełniają relacje komutacyjne $\{q^a(x), q^b(y)\}|_{x^0=y^0} = \delta^{ab}\delta^3(x-y)$, zaś macierze λ^i relacje $[\lambda^i, \lambda^j] = 2if^{ijk}\lambda^k$. Pokaż, że

$$[F^i, F^j] = if^{ijk}F^k. \tag{7}$$