Materiały do wykładu



Fizyka w doświadczeniach

Krzysztof Korona

Uniwersytet Warszawski
Wydział Fizyki

2010-26

Materiały do celów dydaktycznych przeznaczone dla studentów Uniwersytetu Warszawskiego,
Wykorzystanie ich w innych celach jest możliwe pod warunkiem uzyskania zgody autora.

11. Dźwięki i fale

11.1 Wstęp



Fale w pierwszym rzędzie kojarzą nam się z falami na wodzie, a ci którzy pamiętają, co to jest dźwięk, wiedzą że muzyka to też fale. Falową naturę ma jednak także światło, a po odkryciach związanych z mechaniką kwantową wiemy, że falami są również elektrony i inne cząstki.

Już starożytni wiedzieli, że wszystko się zmienia, mówili, że wszystko płynie. Dziś stosowniej byłoby powiedzieć, że wszystko faluje.

Wykład ten poświęcony jest zarówno falom w muzyce, jak i w mechanice kwantowej. Wspomniane jest też, że łączące fizykę i muzykę, pojęcie harmonii wywodzi się jeszcze z czasów starożytnych. Zostało wprowadzone przez Pitagorasa.

Plan wykładu

1. Wstęp
2. Rezonatory akustyczne
3. Analiza drgań
4. Fale
5. Rezonatory wielowymiarowe
6. Drgania elektronów w atomach
7. Oddziaływanie elektronów ze światłem
8. Podsumowanie

11.2 Rezonatory akustyczne

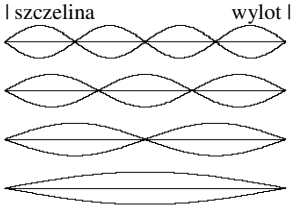
Flet prosty jako rezonator

Fujarkę pewnie każdy kiedyś zrobił, ale zrobić pięknie grający instrument to sztuka. Gdy analizowaliśmy na wykładzie częstości drgań dla dźwięku c wydawanego przez flet okazało się, że składał się on z częstości podstawowej 528 Hz oraz słabszych drgań o częstościach 1056 Hz, 1584 Hz, 2112 Hz i 2640 Hz.

Jak łatwo zauważyć, kolejne mody drgań fletu miały częstości będące iloczynami częstości podstawowej i kolejnych liczb naturalnych (1056 = 2*528, 1584 = 3*528 itd). Można to zapisać przy pomocy równania:

$$f_n = f_1 * n, \qquad n = 1, 2, 3, 4, \qquad (11.1)$$

Gdy grający na flecie muzyk dmie w ustnik, cześć powietrza opuszcza instrument przez szczelinę wytwarzając drgania. Drgania te wzmacniane są w komorze rezonansowej mającej kształt prostej rury otwartej na końcu. Ponieważ z obu końców flet jest otwarty i powietrze będzie miało ciśnienie atmosferyczne, dlatego można przyjąć, że na obu końcach będą węzły ciśnienia. W takim wypadku kolejne mody drgań będą miały kształty jak na rysunku 11.1.



Rys. 11.1 Rozkład ciśnienia powietrza dla kolejnych modów drgań fletu

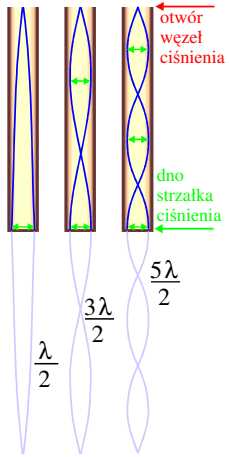
W oczywisty sposób wysokość dźwięków wydawanych przez flet zależy od jego długości. Na przykład: flet sopranowy – 280 mm - zakres dźwięków c^1 do d^3, a flet altowy – 420 mm - zakres dźwięków f do g^2.

Fletnia Pana

Drugim badanym na wykładzie instrumentem jest fletnia Pana. Fletnia składa się z drewnianych piszczałek, mających postać rurek zamkniętych z jednej strony. Dźwięki wydobywa się, dmuchając w otwarte końce piszczałek.



Rys. 11.2 Fletnia Pana



Rys. 11.3 Mody drgań fletni

Gdy analizowaliśmy na wykładzie częstości drgań dla dźwięku e

wydawanego przez fletnię, okazało się, że składał się on z częstości podstawowej 660 Hz oraz słabszych drgań o częstościach 1980 Hz i 3300 Hz, a więc stosunek częstości wynosił jak 1:3:5, a więc kolejne liczby nieparzyste.

Zatem obserwujemy tylko nieparzyste harmoniczne.

$$f_n = f_1 * (2n-1), \quad n = 1, 2, 3, 4, \qquad (11.2)$$

W akustyce używane jest pojęcie tonu, czyli dźwięku prostego (harmonicznego – czyli sinusoidalnego) o jednej częstości.

Tony używane w muzyce zapisujemy w postaci nut.

Tabela 11.1 Skala muzyczna: tony wyrażone poprzez częstości (oktawa razkreślna)

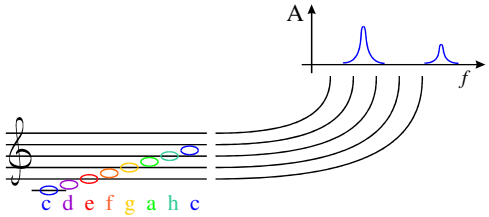
nazwa dźwięku	f [Hz]	f/f_0	nazwa interwału
c^1	264	1	prima (tonika)
d^1	297	9/8	sekunda w.
e^1	330	5/4	tercja wielka
f^1	352	4/3	kwarta
g^1	396	3/2	kwinta
a^1	440	5/3	seksta
h^1	495	15/8	septyma w.
c^2	528	2	oktawa

Widmo częstości (!)

Poszczególne dźwięki składają się z tonu podstawowego oraz tonów o wyższych częstościach lub pewnych pasm częstości. Te dodatkowe częstości decydują o barwie dźwięku.

Widmo częstości drgań lub fal to zależność (wykres lub tabela)

amplitudy lub natężenia drgań od częstości. Można też przedstawić widmo drgań w funkcji długości fali, energii, liczby falowej itp.



Rys. 11.4 Zapis dźwięku przy pomocy nut i widma drgań.

Gdy zapisujemy utwór muzyczny w postaci nut, to także przedstawiamy coś w rodzaju widma, bowiem położenie nut na pięciolinii odpowiada częstościom granych dźwięków.

Widmo częstości na oscyloskopie komputerowym

Przyrządy i materiały

- komputer z kartą muzyczną,
- mikrofon komputerowy,
- program emulujący oscyloskop z analizą furierowską (FFT). Na przykład Oscilloscope 2.51

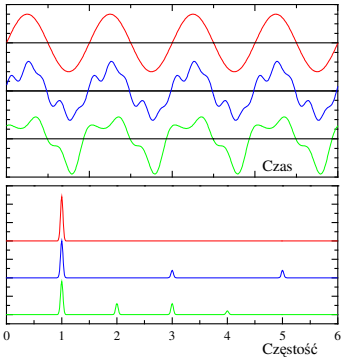
Przebieg doświadczenia

Komputer wyposażony w kartę muzyczna możemy użyć w roli oscyloskopu. Wystarczy zainstalować na nim odpowiedni program emulujący oscyloskop.

Oscyloskop potrafi przedstawić przebieg sygnału w funkcji czasu, jak również przedstawić widmo drgań. Ciekawe obrazy uzyskuje się analizując widma instrumentów muzycznych, a także wypowiadanych (lub wyśpiewywanych) samogłosek. Można zauważyć, że głoska 'i' jest

w zasadzie czystym dźwiękiem o przebiegu sinusoidalnym. Pozostałe głoski składają się z wielu częstości (najwięcej ma chyba 'a'), przy czym częstość podstawowa czasem jest bardzo słaba np. dla 'y'.

Przykłady widm można obejrzeć na rysunku 11.11. Czerwony wykres przedstawia czysty dźwięk (głoska 'i', generator, kamerton). Niebieski zawiera tylko nieparzyste składowe harmoniczne (jak dla fletni Pana). Zielony zawiera wszystkie wielokrotności częstości podstawowej (struna, flet)

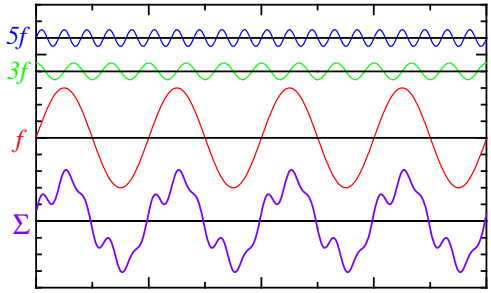


Rys. 11.5 Przebiegi sygnałów (u góry) i ich widma (na dole)

11.3 Analiza drgań

Rozkładanie drgań na składowe harmoniczne

Można wykazać w sposób ścisły, że każde drganie okresowe można przedstawić jako sumę drgań harmonicznych (wyrażonych funkcjami sinus i cosinus).



Rys. 11.6 Składowe harmoniczne i ich suma

Przykład przedstawiony jest na rysunku 11.6. Dolny wykres jest sumą trzech dźwięków o częstościach *f*, 3*f* i 5*f*, (przedstawionych w górnej części rysunku.

Rozkładu drgań na składowe harmoniczne można dokonać przy pomocy operacji matematycznej zwanej transformatą Fouriera. Transformata zamienia przebiegi drgań na ich widmo.

Transformata Fouriera wykorzystywana jest do zmniejszenia objętości (kompresji) zapisu muzyki i dźwięku. Na przykład, często stosowany zapis JPEG polega na zamianie obrazu na składowe fourierowskie. Powoduje to kilkakrotne zmniejszenie zajmowanej pamięci. Przy dalszej kompresji wyrzucane są najmniej znaczące składowe.

Ultradźwięki i infradźwięki

Zakres czułości ucha ludzkiego wynosi od 20 Hz do 20 kHz.
Dźwięki o częstości poniżej 20 Hz nazywamy infradźwiękami, a powyżej 20 kHz – ultradźwiękami.

Infradźwięki: f < 20 Hz, Wytwarzane są przez rezonatory o dużych rozmiarach: trzęsienia ziemi, fale oceaniczne, wieloryby. Infradźwięków nie słyszymy, ale możemy odczuwać je całym ciałem jako wibracje.

Ultradźwięki: f > 20 kHz, Ponieważ fale ultradźwiękowe są krótkie, $\lambda < 17$ mm, ultradźwięki używane są do echolokacji przez nietoperze i przez ludzi w echosondach. Przy pomocy ultradźwięków wykonujemy też badania USG wykorzystując fakt rozchodzenie się ultradźwięków z różnymi prędkościami w różnych organach ciała..

Funkcja i skala logarytmiczna

Gdy mówimy o skali muzycznej, to podajemy, ile razy jedna częstość jest większa od drugiej, a nie o ile herców. Posługujemy się na przykład pojęciem oktawy. Oktawa to interwał prosty zawarty między ośmioma kolejnymi stopniami skali muzycznej.



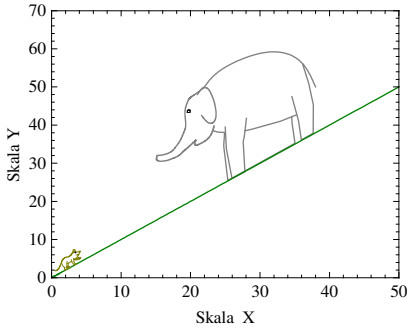
Rys. 11.7 Zakres częstości dźwięków wyrażony w hercach zapisany w skali logarytmicznej. Znaczone są dźwięki c z kolejnych oktaw.

Częstość najwyższego tonu oktawy jest dwukrotnie większa od częstości najniższego tonu, dla kolejnej oktawy znowu jest dwukrotnie większa. Odległość wyrażona w poprzez różnicę częstości jest więc zmienna. Lepiej jest podawać stosunki częstości.
Aby zamienić wielkości, które zwiększają się ileś razy, na wielkości równoodległe, albo aby zamienić mnożenie na dodawanie stosujemy funkcję logarytmiczną.
Funkcja logarytmiczna dziesiętna przyjmuje wartości całkowite dla kolejnych potęg 10:
$\log(1) = 0,\ \log(10) = 1,\ \log(100) = 2,\ \log(1000) = 3, \ldots$

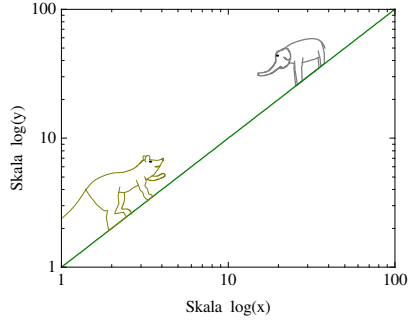
Dla innych liczb przyjmuje wartości ułamkowe, na przykład:
$\log(2) \approx 0{,}3,\ \log(20) \approx 1{,}3,\ \log(3) \approx 0{,}5,\ \log(5) \approx 0{,}7, \ldots$

Skali logarytmicznej używamy, gdy dana wielkość fizyczna zmienia się wiele razy, o wiele rzędów wielkości (pojęcie "rząd wielkości" oznacza zakres liczb zmieniających się do 10 razy).

Przykłady użycia skali logarytmicznej:
- Częstość - skala muzyczna.
- Natężenie - skala w belach [B] poziomu dźwięku, $S = \log(I/I_0)$.
- Stężenie - skala pH = $\log([H]/[H]_0)$.



Rys. 11.8A Mysz i słoń narysowane w skali liniowej



Rys. 11.8B Mysz i słoń narysowane w skali logarytmicznej

Jak widać na rysunku 11.8, skala logarytmiczna uwypukla niższe zakresy w stosunku do wyższych.

Natężenie dźwięku

Natężenie dźwięku w zasadzie powinniśmy mierzyć w watach, ale często posługujemy się poziomem natężenia dźwięku mierzonym w belach [B] lub decybelach [dB]. Powodem tego jest sposób w jaki dźwięk jest odczuwany przez nasze uszy. Jeżeli w parku słuchamy śpiewu ptaka i przyłączy się do niego drugi ptak, to odczucie wzrostu głośności jest takie, jak gdy do hałasu wydawanego przez jeden samochód przyłączy się drugi. W obydwu przypadkach dostrzeżemy, że nastąpił dwukrotny wzrost natężenia. Zatem natężenie dźwięku odczuwamy w skali logarytmicznej.

Poziom natężenia dźwięku obliczamy jako logarytm natężenia I w stosunku do natężenia odniesienia I_0:

$$S[dB] = 10 \log(I/I_0), \qquad (11.3)$$

Natężenie jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy, jeśli zatem obliczamy poziom dźwięku na podstawie amplitudy musimy wzór (11.3) pomnożyć dodatkowo przez 2.

$$S[dB] = 20 \log(p/p_0) \text{ lub } S[dB] = 20 \log(U/U_0) \qquad (11.4)$$

Przykłady poziomów głośności podane są w tabeli 11.3.

Natężenie dźwięku spada proporcjonalnie do kwadratu odległości.

Zakres słyszalności (!)

Jakie najcichsze dźwięki może usłyszeć ludzkie ucho?

Przyjmuje się, że granicą słyszalności jest natężenie $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2, co odpowiada ciśnieniu: $p_0 = 2*10^{-5}$ Pa.

Przy zbyt dużym ciśnieniu (i natężeniu) ucho może ulec uszkodzeniu. Przyjmuje się, że granicą wytrzymałości uszy jest 130 dB,

czyli I = 10 W/m^2, p = 60 Pa.

W zasadzie zakres czułości ucha ludzkiego wynosi od 20 Hz do 20 kHz i od 0 do 130 dB. Należy jednak pamiętać, że czułość zależy od częstości. Zakres największej czułości ucha to 1000-3000 Hz.

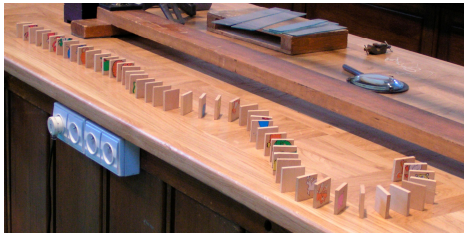
Tabela 11.2 Przykłady źródeł dźwięków o różnym poziomie natężenia.

0 dB	- granica słyszalności
20 dB	- szept, cichy ogród
40 dB	- darcie papieru
60 dB	- cichy odkurzacz
80 dB	- klakson, pobocze ruchliwej drogi
100 dB	- silnik spalinowy bez tłumika
120 dB	- młot pneumatyczny
130 dB	- granica bólu
140 dB	- silnik odrzutowy z odl. 50 m
160 dB	- pistolet, wybuch petardy
190 dB	- prom kosmiczny

Wartości podane w tabeli 11.2 dotyczą poziomu natężenia w pewnej standardowej odległości. Należy je traktować jako przybliżone.

11.4 Fale

Fala jest zaburzeniem rozchodzącym się w przestrzeni.
Fala rozchodzi się niezależnie od ruchu tworzących ją ciał. Przykładem może być tu szereg ułożony z kostek domina.



Rys. 11.9 Fala może przejść po krzywej ułożonej z kostek domina.

Przewracając pierwszą z kostek domina powodujemy przejście fali, jednak każda z kostek praktycznie pozostaje w miejscu. Podobnie elementy drgającej struny poruszają się na boki, a nie w kierunku rozchodzenia się fali.
Fala rozchodząca się na strunie jest falą jednowymiarową. Analiza takiej fali jest prosta. Ma ona określony kierunek i amplitudę. Rozważając obiekty wielowymiarowe, choćby falę na powierzchni wody zauważamy, że sytuacja staje się bardziej złożona. Fala może być wzbudzona w punkcie i rozbiec się we wszystkich kierunkach, a także może być skupiona do punktu, zyskując na amplitudzie.

Równanie falowe

W przypadku drgań pojedynczego ciała można zapisać równanie

oscylatora harmonicznego w postaci wzoru (10.4) lub w formie różniczkowej (10.5). Rozwiązując równanie oscylatora można wyznaczyć zależność wychylenia od czasu $y(t)$. Przy pomocy podobnego równania możemy opisać także fale. Potrzebujemy w nim porównać dwie wielkości:

1) Przyspieszenie mówiące o prędkości zmian prędkości. Matematycznie jest to druga pochodna wychylenia y po czasie t.

oraz

2) Zakrzywienie mówiące jak gwałtownie w funkcji położenia x zmienia się pochylenie linii opisującej wychylenie y w funkcji położenia x. Ta skomplikowana w opisie wielkość, matematycznie zapisywana jest jako druga pochodna wychylenia y po położeniu x.

W efekcie otrzymujemy równanie:

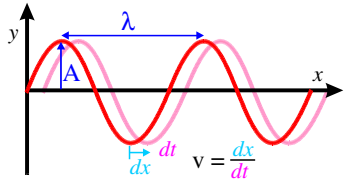
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (11.5)$$

Współczynnik v jest prędkością fali.

Rozwiązaniem tego równania są funkcje sinus lub cosinus. Na przykład:

$$y(x, t) = A*\sin(k(x - v\,t)) \qquad (11.6A)$$

gdzie k to liczba falowa, czyli liczba fal na drodze 2π metrów.



Rys. 11.10 Wielkości opisujące fale

Przedstawiona równaniem (11.6A) funkcja falowa ma trzy parametry:

A - amplitudę fali,
k - liczbę falową,
v - prędkość fali.

Do opisu fal używa się też innych wielkości, jak częstość kołowa ω, częstość $f = \omega/2\pi$, okres drgań $T = 1/f$ oraz długość fali λ. Długość fali to odległość między kolejnymi punktami o tej samej fazie (np. maksimami).

Jeśli z jakichś przyczyn wygodniej nam posługiwać się częstością niż wektorem falowym, wzór 11.6A możemy zapisać w postaci:

$$y(x, t) = A*\sin(\omega(x/v - t)) \qquad (11.6B)$$

Prędkość i długość fali (!)

Prędkość fali wiąże się z jej długością, λ, i okresem drgań, T:

$$v = \lambda/T. \qquad (11.7)$$

Okres fali to czas potrzebny do przebycia jej długości. Możemy go obliczyć dzieląc drogę, λ, przez prędkość: $T = \lambda/v$.

Ponieważ częstość fal jest odwrotnością okresu, otrzymujemy:

$$f = v/\lambda. \qquad (11.8)$$

Podobnie jak częstość oscylatora zależy od stałej siłowej i masy oscylatora, tak samo prędkość fali zależy od stałej siłowej i masy przypadającej na jednostkę długości, ρ.

Prędkość fali na strunie:

$$v = \sqrt{\frac{F_0}{\rho}} \qquad (11.9)$$

F_0 – siła naciągu struny.

Prędkość dźwięku w gazie zależy od gęstości gazu, ρ, oraz od jego ciśnienia:

$$v = \sqrt{\frac{p}{\rho}}\sqrt{\frac{c_p}{c_V}} \qquad (11.10)$$

Występujący w tym wzorze czynnik c_p/c_V jest bliski 1.

Prędkość dźwięku w helu (!)

Częstość fali w rezonatorze zmienialiśmy poprzednio zmieniając długość rezonatora (i długość fali). Jednak ze wzoru (11.8) wynika, że zwiększając prędkość fali w rezonatorze o ustalonej długości, zwiększamy częstość. Prędkość dźwięku możemy zmienić, na przykład, używając helu zamiast powietrza.

Przebieg doświadczenia

Wciągamy hel do płuc i mówimy.

Hel jest siedem razy lżejszy od powietrza, zatem zgodnie ze wzorem (11.10) otrzymujemy 2,64 razy większą prędkość. Gdy aparat głosowy wypełniony jest helem, to długość fali pozostaje niezmieniona (zależy od rozmiarów naszej krtani) natomiast większa prędkość dźwięku powoduje wzrost częstości. Zatem mając płuca i krtań wypełnione helem mówimy cienkim głosem.

Efekt Dopplera (!)

Efekt Dopplera polega na zmianie częstości fal emitowanych i odbieranych, gdy nadajnik lub odbiornik jest w ruchu. Akustyczny efekt Dopplera można usłyszeć, gdy źródło dźwięku zbliża się lub oddala. Np. na wykładzie uzyskaliśmy go przy pomocy małego głośniczka wprawionego w ruch.

Gdy źródło fal zbliża się, jego ruch powoduje skrócenie odległości między grzbietami fal. Skrócenie fal oznacza wzrost częstości:

$$f = f_0 \frac{c+v}{c}, \qquad (11.11)$$

Gdy obserwator zbliża się do źródła, mija grzbiety nadbiegających fal w krótszych odcinkach czasu, a więc odbiera wyższą częstość:

$$f = f_0 \frac{c}{c-v} \qquad (11.12)$$

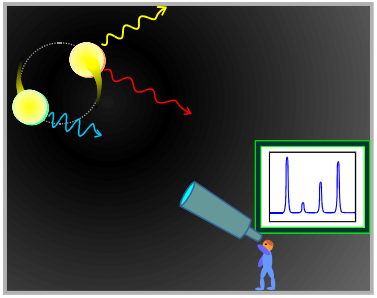
Dla fal elektromagnetycznych, nie ma znaczenia, czy porusza się źródło, czy obserwator. Gdy obserwator lub źródło zbliżają się do siebie, następuje wzrost częstości:

$$f = f_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}. \qquad (11.13)$$

Można zauważyć, że wzór (11.13) jest średnią geometryczna wzorów (11.11) i (11.12).

Jeśli obserwator lub źródło oddalają się, we wzorach (11.11) - (11.13) należy zmienić znak prędkości. Otrzymujemy wtedy spadek częstości.

Efekt Dopplera dla fal na wodzie opisał Christian Doppler w 1842 r.



Rys. 11.11 Efekt Dopplera w astronomii

Efekt ten wykorzystuje się do pomiarów prędkości. Na przykład w

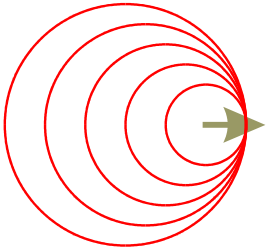
radarach dopplerowskich wykorzystujemy fakt, że wysłana z radaru wiązka mikrofal, odbijając się od poruszającego się obiektu, zmienia częstość. Radary takie wykorzystuje się do kontroli prędkości wiatru, a także na drogach do kontroli prędkości pojazdów.

Efekt Dopplera ma zastosowanie także w medycynie i w astronomii.

Gwiazdy w układach podwójnych krążąc po orbitach, na zmianę przybliżają i oddalają się od nas. Podobnie choć na mniejszą skalę poruszają się gwiazdy posiadające planety. Obserwując długości emitowanych fal możemy określić ich prędkości.

Przekraczanie prędkości dźwięku

Prędkość dźwięku w powietrzu (w temperaturze pokojowej) wynosi: v = 344 m/s ≈ 1200 km/h.

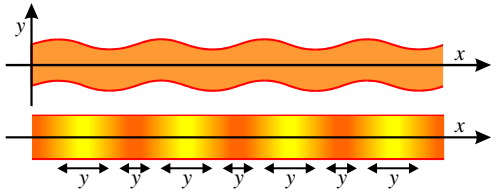


Rys. 11.12 Ciało poruszające się z prędkością równa prędkości fali w ośrodku, wytwarza falę uderzeniową.

Jeżeli jakiś obiekt porusza się z prędkością dźwięku, to wzbudzane przez niego fale nie mogą uciec od źródła (rys. 11.12). Zatem ich amplituda silnie rośnie przed dziobem poruszającego się obiektu. Taką falę o bardzo dużym ciśnieniu nazywamy falą uderzeniową.

Fale podłużne i poprzeczne

W przyrodzie występuje wiele rodzajów fal o różnym charakterze. W ogólności fale możemy podzielić ze względu na kierunek drgań na fale podłużne i poprzeczne.



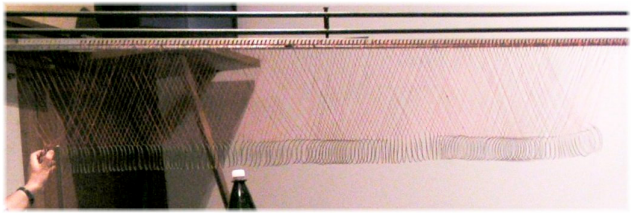
Rys. 11.13 Fale poprzeczne (u góry) i podłużne (u dołu)

Fale podłużne drgają w kierunku rozchodzenia się, biegnąc przez ośrodek (powietrze, sprężynę) ściskają i rozciągają go. Natomiast fale poprzeczne drgają w kierunku prostopadłym do swojego kierunku rozchodzenia się.

Na wykładzie fale podłużne i poprzeczne demonstrowane były na falownicy sprężynowej.

Fala podłużna i poprzeczna na falownicy (!)

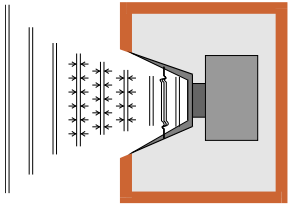
Falownica jest przyrządem do demonstracji właściwości fal mechanicznych. Na wykładzie używana była falownica w postaci sprężyny zawieszonej na nitkach.



Rys. 11.14 Fale podłużne na falownicy

Na takiej falownicy można pokazać, między innymi, fale podłużne i poprzeczne. Fale podłużne pobudzamy, poruszając sprężyną w kierunku jej osi. Nitki rozstawiamy przy tym szeroko, aby sprężyna nie mogła drgać na boki. Natomiast fale poprzeczne pobudzamy, poruszając sprężyną w poziomie, poprzecznie do kierunku osi sprężyny.

Przykładami fal poprzecznych są fale na strunie, na wodzie oraz światło. Z kolei ważnym przykładem fali podłużnej jest dźwięk.

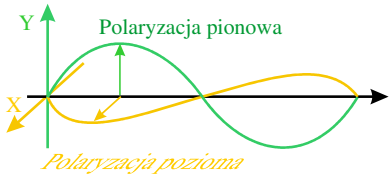


Rys. 11.15 Mechanizm wytwarzania fali dźwiękowej przez głośnik

Analizując np. budowę głośnika zauważymy, że membrana porusza się do przodu i do tyłu, a więc w kierunku emitowanego dźwięku.

Polaryzacja fal

Fale podłużne mają jeden ustalony kierunek drgań, taki sam jak kierunek ruchu. Fale poprzeczne mogą drgać w różnych kierunkach, dzięki temu można polaryzować, czyli ustalać ich kierunek drgań.



Rys. 11.16 Fale spolaryzowane pionowo i poziomo

Jeżeli, na przykład, fala rozchodzi w poziomie w kierunku x, to możemy sobie wyobrazić dwie prostopadłe polaryzacje tej fali: poziomą (w kierunku y) i pionową (z). łatwo to sobie wyobrazić w przypadku fal na rozciągniętej poziomo gumie.

Oczywiście możliwa jest polaryzacja nie tylko pozioma i pionowa, ale pod dowolnym kątem. Jednak każdą taką polaryzację można przedstawić jako sumę tych dwóch podstawowych polaryzacji (poziomej i pionowej), tak jak przedstawiamy wektory w układzie współrzędnych.

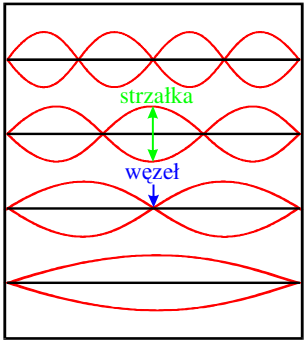
Fale biegnące i stojące

Fala opisana równaniem (11.6) porusza się w kierunku rosnących wartości x. Jeżeli wewnątrz wzoru (11.6) zamienimy minus na plus, to otrzymamy fale poruszającą się w przeciwnym kierunku $\sin(k(x-vt))$ i $\sin(k(x+vt))$. Równania te możemy zsumować pamiętając z trygonometrii, że $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin((\alpha+\beta)/2)\cos((\alpha-\beta)/2)$:

$$\sin(k(x-vt))+\sin(k(x+vt) = 2\sin(kx)*\cos(kvt) \qquad (11.14)$$

Otrzymujemy zatem wzór na falę, której kształt jest niezależny od czasu, y = sin*kx*, czyli falę, która drga w miejscu, ale nie porusza się. Takie zabawy matematyczne odpowiadają rzeczywistym zjawiskom.

Obserwacja fal na wężu gumowym (przeprowadzona na wykładzie) pokazuje, że suma dwóch fal biegnących w przeciwnych kierunkach daje falę stojącą.



Rys. 11.17 Fale stojące na gumie

Falę stojącą na gumowym wężu lub na strunie możemy wyobrażać sobie jako sumę dwóch fal biegnących w przeciwnych kierunkach i odbijających się od końców struny.

Częstość rezonansową, *f*, możemy policzyć wiedząc, że okres fali w rezonatorze, T = 1/*f*, to czas potrzebny do przebycia dwóch długości rezonatora L:

$$n*T = 2L/v, \qquad (11.15)$$

gdzie n to prędkość fali. Mnożymy przez n, bo fala może przebyć rezonator w ciągu n okresów. Liczba okresów musi być jednak całkowita, aby powracająca fala była w tej samej fazie, co fala

wychodząca.

Pokazaliśmy, że z fal biegnących możemy złożyć falę stojącą. Okazuje się, ze można też na odwrót. Jeżeli złożymy ze sobą dwie fale stojące, przesunięte w fazie, to otrzymamy falę biegnącą.

11.5 Rezonatory wielowymiarowe

W rezonatorach, którymi zajmowaliśmy się do tej pory, strunie czy flecie, kolejne częstości dawały się wyrazić przez liczby całkowite. Łatwo to było wytłumaczyć faktem, że pewna liczba fal (lub ich połówek) musi się mieścić w rezonatorze. Rezonatory te były w zasadzie jednowymiarowe, fala miała do wyboru tylko jeden kierunek rozchodzenia się i ściśle określoną długość. Jeżeli jednak spróbujemy pobudzić do drgań np. rurkę, dzwon lub membranę, to okaże się, że zależności między stanami rezonansowymi są bardziej skomplikowane.

Czym się różni rurka od naprężonej linki (struny)?

Nienapiętą strunę możemy swobodnie odkształcać. Dopiero, jeśli strunę napniemy, przykładając na jej końcach siły i spróbujemy odciągnąć w bok, to będziemy musieli użyć siły. Siła ta będzie proporcjonalna do wychylenia.

Rurka, nawet jeżeli nie jest napięta, przeciwstawia się zginaniu. Aby ją zgiąć należy jedną z jej ścianek ścisnąć, a druga rozciągnąć. Liczy się więc nie tylko rozkład sił wzdłuż rurki, ale też w poprzek. Siła w takim układzie nie jest już proporcjonalna do wychylenia.



Rys. 11.18 Dzwon i drgający kieliszek są przykładami 3-wymiarowych rezonatorów

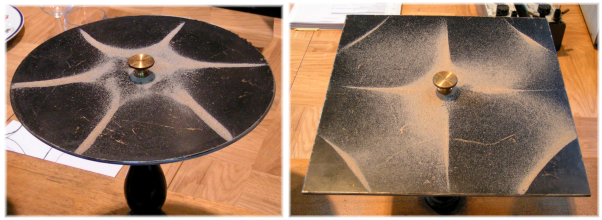
W rezonatorach wielowymiarowych kolejne częstości rezonansowe nie są na ogół wielokrotnościami częstości podstawowej.
Podobna sytuacja występuje w przypadku sprężystej płytki. Możemy wprawić ją w drgania, ale obraz drgań będzie bardziej złożony.

Rezonatory dwuwymiarowe

Figury Chladniego (!)

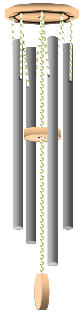
Przyrządy i materiały
- metalowe płytki zamocowane na środkach do podstawek,
- smyczek,
- piasek.

Przebieg doświadczenia
Metalowe płytki posypujemy piaskiem, a następnie pobudzamy smyczkiem do drgań. Jednocześnie do płytki dotykamy w jednym lub dwóch miejscach palcami. W miejscu, gdzie pocieramy smyczkiem znajduje się maksimum, czyli strzałka drgań, a tam gdzie dotykamy palcami tworzy się węzeł drgań. Należy zadbać o to, aby smyczek i palce tworzyły układ o odpowiedniej symetrii.



Rys. 11.19 Płytki z figurami Chladniego

Piasek ucieka z miejsc, gdzie płytka drga, a osiada w miejscach spokojnych (czyli w węzłach drgań). W ten sposób piasek uwidocznia linie węzłów.
W rezonatorach wielowymiarowych kolejne częstości rezonansowe nie są na ogół wielokrotnościami częstości podstawowej.
Ciekawym przypadkiem są drgania rur. W ich przypadku występuje proporcjonalność między częstością drgań a kwadratem długości rurki. Na wykładzie, badaliśmy częstość, f, dzwonków rurowych o różnych długościach, l, przy pomocy oscyloskopu. Otrzymaliśmy zależność $l^2 \cdot f = \text{const}$.



Rys 11.20 Dzwonki rurowe

11.6 Drgania elektronów w atomach

Świecenie atomów

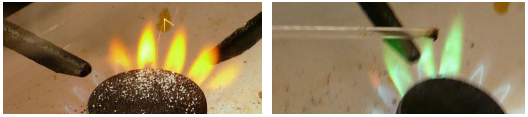
Światło emitowane przez rozgrzane ciała składające się z wielu różnych atomów zawiera wszystkie długości fal, czyli wszystkie barwy. Inaczej wygląda świecenie, gdy udaje nam się pobudzać pojedyncze atomy uzyskane przez odparowanie pierwiastków lub prostych soli. Okazuje się, że światło emitowane przez takie substancje ma ściśle określone barwy.

Piękne barwy możemy uzyskać rozgrzewając w płomieniu sole miedzi, potasu lub sodu.

Przyrządy i materiały

- rurki Plückera i zasilacz,
- palnik oraz sole: sodu (NaCl), miedzi ($NaCl_2$), potasu (KNO_3) i inne.

Przebieg doświadczenia



Rys. 11.21 Świecenie płomieni zawierających pary sodu (z lewej i miedzi (z prawej)

Sód, Na, świeci na żółto-pomarańczowo, potas, K, na czerwono, a miedź, Cu, na zielono.

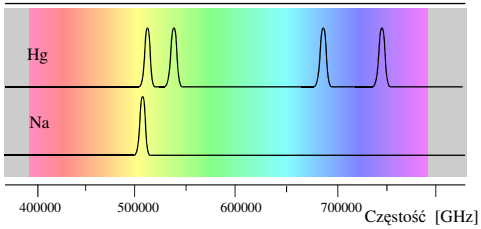
Świecenie innych gazów możemy obejrzeć przy pomocy rurek Plückera. Mają one elektrody umożliwiające przepuszczenie prądu przez zamknięty w środku gaz. Pobudzony prądem elektrycznym gaz

świeci.

Światło emitowane z rurek Plückera możemy rozłożyć na poszczególne składowe przy pomocy siatki dyfrakcyjnej, uzyskując widma świecenia gazów.

Okazuje się, że w przeciwieństwie do ciągłego widma świecenia gorących ciał, gazy świecą widmami liniowymi. Ich światło zawiera tylko pojedyncze, dobrze określone częstości (długości fal) czyli czyste barwy.

Oglądając sztuczne ognie lub sklepowe neony powinniśmy pamiętać, że ich barwne światło emitowane jest przez rozgrzane atomy gazu. Barwa zależy od rodzaju pierwiastka. Na przykład sód (Na) świeci na żółto, neon (Ne) na czerwono, a rtęć (Hg) na biało-niebiesko. Przykładowe widma znajdują się na rys. 11.22.



Rys. 11.22 Widma emisyjne rtęci (Hg) i sodu (Na)

Elektron w atomie jako fala

Fakt, że atomy emitują światło o ściśle określonych częstościach może nam się skojarzyć z instrumentami muzycznymi, które emitują dźwięki o ściśle określonych częstościach. Czyżby światło rezonowało wewnątrz atomów tak jak np. dźwięk w rurce fletu? Okazuje się, że jest to efekt drgań elektronów, które we wnętrzu atomów zachowują się jak fale w pudle rezonansowym.

Częstości drgań elektronów możemy obliczyć dzięki znajomości

mechaniki kwantowej. Mechanika kwantowa mówi, że materia zachowuje się jak fale. Fale te mają określone częstości rezonansowe zwane "częstościami własnymi", odpowiadające pewnym stanom (kształtom) fali, które nazywamy stanami własnymi. Emisja następuje, gdy elektron przechodzi z wyższego stanu do niższego. Częstość emitowanego światła odpowiada różnicy częstości fal elektronu.

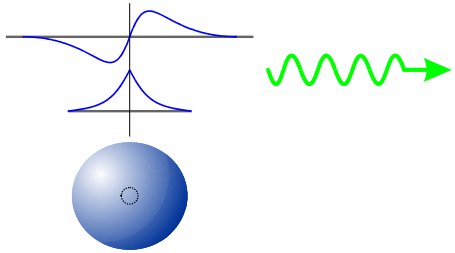
Na przykład, w sodzie widzimy przejście: $3p^1 \rightarrow 3s^1$,
odpowiadające częstości: $f = 509$ THz,
czyli fali o długości $\lambda = c/f = 589$ nm.

Częstość fali elektronowej, f, możemy też przeliczyć na energię posługując się równaniem Plancka:

$$E = hf \qquad (11.16)$$

gdzie h to stała Plancka = $6{,}626\,070\,015 \cdot 10^{-34}$ Js.
W wypadku sodu otrzymujemy: E = 2,1 eV.

Miedź, Cu, świeci na zielono, ma wiele linii, np:
$3d^{10}4p^1 \rightarrow 3d^9 4s^2\ (^2P_{3/2} \rightarrow {}^2D_{5/2})$ $\lambda = 510{,}554$ nm



Rys. 11.23 Funkcje falowe Re($\Psi(r)$) elektronu w atomie

Mody drgań (stany kwantowe) cząstek i ich częstości (poziomy energetyczne cząstek) można obliczyć rozwiązując równanie Schrödingera. Dla cząstki swobodnej ma ono postać:

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \qquad (11.17)$$

gdzie: $\hbar = h/2\pi$ nazywamy zredukowaną stałą Plancka, lub stałą Diracka. Jak widać jest podobne do równania falowego opisującego dźwięk (11.7) lub fale elektromagnetyczne.

Kształt fal elektronów zamkniętych w atomie wodoru przedstawiony jest na rysunku 11.22.

Stany kwantowe elektronów w atomach opisywane są symbolami 1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d itd gdzie przednia cyfra oznacza numer powłoki n = 1, 2, 3 .. a litera związana jest z poboczną liczbą kwantową l.

Dla podpowłoki s: $l = 0$, dla p: $l = 1$, dla d: $l = 2$..

Częstość drgań elektronu w atomie wodoru zależy od głównej liczby kwantowej n, jak $1/n^2$.

$$f_n = f_1/n^2, \qquad n = 1, 2, 3, 4, \qquad (11.18)$$

Natomiast poboczna liczba kwantowa mówi o momencie pędu elektronu L.

$$L_l = \hbar * l, \qquad (11.19)$$

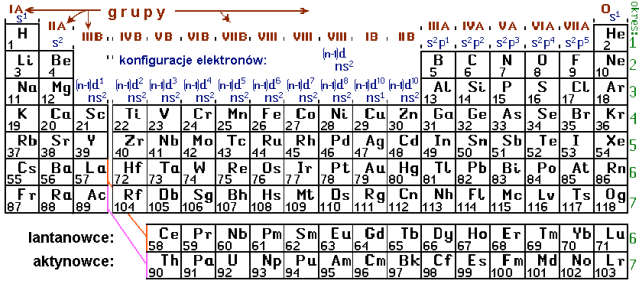
Zauważmy, że dla stanów s, moment pędu jest równy zero. Nie można więc mówić, że elektrony w tym stanie kręcą się dookoła jądra.

Ponadto stany numerowane są przez liczbę magnetyczną m = .., –1, 0, 1, .. oraz spinową s = ½ lub -½ .

Układ okresowy pierwiastków (!)

Falowa natura elektronów narzuca kolejne ograniczenia. Liczby l, m i s nie mogą przybierać dowolnych wartości, a zakaz Pauliego mówi, że w jednym stanie może przebywać tylko jeden elektron.

Na powłoce n = 1 możemy mieć tylko 2 elektrony (s = 1/2 i -1/2), a na n = 2 możemy mieć 6 elektronów (m = -1, 0, 1 × s = 1/2 i -1/2).



Rys. 11.24 Układ okresowy pierwiastków

Kolejne pierwiastki chemiczne różnią się liczbą elektronów. W efekcie ograniczeń narzucanych przez falową naturę elektronów pierwiastki chemiczne układają się w pewne okresy. Dostrzeżono to już w 1869 roku, jednak bez znajomości budowy atomów nie wiedziano, jak to wytłumaczyć.

Własności pierwiastków zmieniają się w sposób okresowy opisany prosta regułą. Okresy układu okresowego zawierają:

n = 1 → 2·1·1 = 2 pierwiastki (I okres),
n = 2 → 2·2·2 = 8 pierwiastków (II i III okres),
n = 3 → 2·3·3 = 18 pierwiastków (IV i V okres),
itd.

11.7 Podsumowanie

Rezonatory akustyczne mają na ogół wiele częstości drgań. W przypadku 'jednowymiarowych' rezonatorów częstości własne są zwykle wielokrotnościami częstości podstawowej. Rezonatory wielowymiarowe nie mają tej właściwości.

Dźwięki, złożone z kilku dobrze dobranych (czyli będących w stosunku małych liczb całkowitych) częstości odbieramy jako współbrzmiące, czyli harmonijne.

Zakres czułości ucha ludzkiego: 20 Hz - 20 kHz.

Drgania możemy rozkładać na funkcje harmoniczne i przedstawiać w postaci widma drgań. Widmo drgań lub fal to zależność amplitudy lub natężenia drgań lub fal od częstości (albo od długości fal, energii, czy liczby falowej).

Fale mogą być podłużne lub poprzeczne. Dźwięk jest falą podłużną, a światło jest falą poprzeczną.

Fala stojące możemy składać z biegnących (i na odwrót).

Pojedyncze atomy emitują światło o ściśle określonych częstościach, tak jak rezonatory. Jest to efekt drgań elektronów. Częstości drgań elektronów w atomach możemy obliczyć dzięki znajomości mechaniki kwantowej.

Własności pierwiastków zmieniają się w sposób okresowy opisany prostą regułą. Kolejne okresy zawierają: 2, 2·4, 2·9, 2·16 pierwiastków itd. Związane jest to z falowymi właściwościami elektronów.

W przypadku cząsteczek wieloatomowych, np. barwników, o częstości absorbowanego światła także decyduje układ stanów kwantowych w danej substancji chemicznej.