

Seria 1: CIAŁO DOSKONAŁE CZARNE

Grzegorz Jaczewski

Niniejsza notatka może zawierać błędy i nieścisłości. Zachęcam do dzielenia się wszelkimi uwagami.

Zadanie 1

Żarówka o mocy $P = 100 \text{ W}$ znajduje się na wysokości $d = 30 \text{ cm}$ nad stołem.

(a) Jakie jest natężenie promieniowania w kierunku pionowym pod żarówką?

Jako, że zakładamy, że żarówko promieniuje w każdym kierunku tak samo, a natężenie promieniowania I wyraża się w W/m^2 , to natężenie w odległości d od źródła wyraża się wzorem

$$I = \frac{P}{4\pi d^2}. \quad (1)$$

Po podstawieniu do wzoru otrzymujemy zaokrąglony wynik

$$I = 88,42 \text{ W/m}^2 \quad (2)$$

(b) Ile fotonów pada na 1 cm^2 powierzchni stołu w ciągu 1 s ? Załóż dla uproszczenia, że każdy foton ma energię $E_f = 2 \text{ eV}$.

Liczba fotonów N_f padająca w czasie t na powierzchnię S dana jest wzorem

$$N_f = \frac{ISt}{E_f}, \quad (3)$$

gdzie dzielimy całkowitą energię docierającą w czasie t do powierzchni S przez energię pojedynczego fotonu.

$$N_f = 2,8 \cdot 10^{16} \quad (4)$$

Zadanie 2

Wyprowadzenie wzoru Plancka metodą Einsteina. Pokaż zależności między współczynnikami Einsteina absorpcji, emisji spontanicznej oraz emisji wymuszonej.

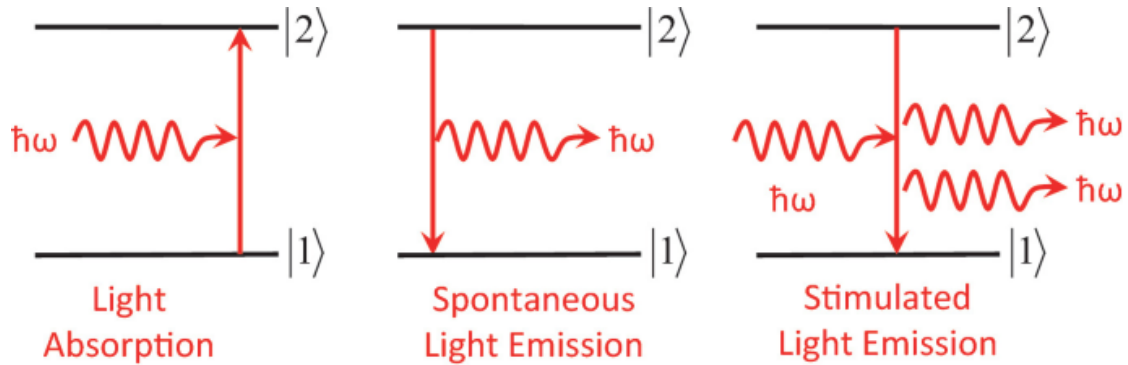
Chcemy wyprowadzić wzór Plancka

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}, \quad (5)$$

gdzie wielkość $\rho(\nu)d\nu$ mówi nam o gęstości energii związanej z obecnością promieniowania o częstotliwościach między ν a $\nu + d\nu$ dla ciała doskonale czarnego. Całkowita gęstość energii dana jest zatem wzorem

$$u(T) = \int_0^\infty \rho(\nu, T) d\nu. \quad (6)$$

Einstein w celu wyprowadzenia wzoru na ρ zapostulował uproszczony model oddziaływania promieniowania z materią. W ramach tego modelu mamy do czynienia z trzema możliwymi procesami: absorpcją fotonu, spontaniczną emisją oraz emisją wymuszoną. Elektron absorbując foton wskakuje z poziomu o energii E_1 na poziom o wyższej energii E_2 . Elektron może również spontanicznie spaść z poziomu 2 na poziom 1, emitując foton lub zrobić to pod wpływem innego przelatującego obok fotonu (emitując przy tym kolejny foton). Zakładamy, że jedynie fotony o energii $h\nu = E_2 - E_1$ mogą zostać zaabsorbowane i wyemitowane.



Obrazek 1: Możliwe procesy wg. Einsteina. Obrazek pochodzi z książki Olaf Stenzel, *Light–Matter Interaction: A Crash Course for Students of Optics, Photonics and Materials Science*

Wpływ tych procesów na obsadzenie poziomów możemy opisać równaniem

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = -B_{12}\rho N_1 + A_{21}N_2 + B_{21}\rho N_2. \quad (7)$$

Widzimy, że prawdopodobieństwo zajścia absorpcji jest proporcjonalne do liczby elektronów na poziomie 1, gęstości promieniowania i nieznanego współczynnika B_{12} . Znak minus spowodowany jest tym, że absorpcja zmniejsza obsadzenie poziomu 1. Dla emisji wymuszonej są

to analogicznie liczba elektronów na poziomie 2, gęstość promieniowania i nieznany współczynnik B_{21} . W przypadku emisji spontanicznej nie mamy zależności od promieniowania, a jedynie od populacji poziomu 1 i nieznanego współczynnika A_{21} . Zakładamy, że liczba elektronów jest stała $N_1 + N_2 = N$. Interesuje nas promieniowanie po osiągnięciu równowagi termodynamicznej, wówczas mamy do czynienia z ustalonym obsadzeniem poziomów 1 i 2

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = 0. \quad (8)$$

Mamy zatem

$$-B_{12}\rho N_1 + A_{21}N_2 + B_{21}\rho N_2 = 0, \quad (9)$$

a po przekształceniu

$$\rho = \frac{A_{21}}{B_{21}} \cdot \frac{1}{\frac{B_{12}}{B_{21}} \cdot \frac{N_1}{N_2} - 1}. \quad (10)$$

W tym miejscu należy sięgnąć do rozkładu Boltzmanna, który daje nam wyrażenie na obsadzenie stanu o energii E_i

$$N_i = N \frac{g_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right)}{\sum_i g_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right)}, \quad (11)$$

gdzie g_i to degeneracja stanu i , a suma $\sum_i$ odbywa się po wszystkich możliwych stanach. Z tego wynika, że

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{E_2 - E_1}{kT}\right) = \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right). \quad (12)$$

Mamy zatem

$$\rho = \frac{A_{21}}{B_{21}} \cdot \frac{1}{\frac{B_{12}}{B_{21}} \cdot \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (13)$$

Dodatkowo żądamy, żeby dla $T \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow \infty$. Musi więc zachodzić

$$\frac{B_{12}}{B_{21}} \cdot \frac{g_1}{g_2} = 1. \quad (14)$$

Zakładając $g_1 = g_2$ mamy

$$B_{12} = B_{21} \quad (15)$$

oraz

$$\rho = \frac{A_{21}}{B_{21}} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (16)$$

W celu otrzymania stosunku $\frac{A_{21}}{B_{21}}$ porównujemy otrzymany wzór z prawem Rayleigha-Jeansa, stosując przybliżenie dla małych częstotliwości $\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{kT}{h\nu} = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3}, \quad (17)$$

i dostajemy

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}, \quad (18)$$

a ostatecznie

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (19)$$

Zadanie 3

Wyprowadź ze wzoru Plancka prawo Stefana-Boltzmann'a i prawo przesunięć Wiena wiedząc, że zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego związana jest z gęstością energii promieniowania wzorem: $e(\nu, T) = \rho(\nu, T) \cdot c/4$.

Prawo Stefana-Boltzmann'a

Prawo Stefana-Boltzmann'a wiąże strumień energii wypromieniowanej przez ciało doskonale czarne z jego temperaturą. Strumień ten jest całką po wszystkich częstotliwościach ze zdolności emisyjnej

$$\Phi(T) = \int_0^\infty e(\nu, T) d\nu = \frac{c}{4} \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu. \quad (20)$$

Dla ułatwienia wprowadzamy nową zmienną całkowania $x = \frac{h\nu}{kT}$ i otrzymujemy

$$\Phi(T) = \frac{c}{4} \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx. \quad (21)$$

Dalej możemy przekształcić

$$\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}} = e^{-x} \sum_{m=0}^\infty e^{-mx} = \sum_{m=1}^\infty e^{-mx}. \quad (22)$$

Obliczamy całkę

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^3 \sum_{m=1}^\infty e^{-mx} dx &= \sum_{m=1}^\infty \int_0^\infty x^3 e^{-mx} dx = \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^4} \int_0^\infty y^3 e^{-y} dy = \\ &= \sum_{m=1}^\infty \frac{\Gamma(4)}{m^4} = 3! \cdot \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^4} = 6 \cdot \zeta(4) = 6 \cdot \frac{\pi^4}{90} = \\ &= \frac{\pi^4}{15}. \end{aligned} \quad (23)$$

Ostatecznie dostajemy

$$\Phi(T) = \sigma T^4, \quad (24)$$

gdzie σ to stała Stefana-Boltzmann'a

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \quad (25)$$

Prawo Wiena

Prawo przesunięć Wiena mówi, że długość fali dla której jest emitowane najwięcej energii jest proporcjonalna do odwrotności temperatury

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}. \quad (26)$$

Żeby zapisać prawo Plancka jako funkcję długości fali λ korzystamy z następującej zależności:

$$|\rho(\lambda, T)d\lambda| = |\rho(\nu, T)d\nu|, \quad (27)$$

a zatem

$$\rho(\lambda, T) = \rho(\nu, T) \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right|. \quad (28)$$

Wartość bezwzględna jest konieczna jako, że

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}, \quad (29)$$

a oczekujemy, że ρ jest dodatnie. Dostajemy zatem

$$\rho(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}. \quad (30)$$

Aby znaleźć λ_{max} musimy znaleźć maksimum ρ jako funkcji λ

$$\frac{d\rho}{d\lambda} = 0. \quad (31)$$

Po starannym obliczeniu pochodnej dostajemy równanie

$$5 \left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1 \right] - \frac{hc}{\lambda kT} \exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) = 0. \quad (32)$$

Dla ułatwienia wprowadzamy zmienną $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ i dostajemy

$$5(e^x - 1) - xe^x = 0. \quad (33)$$

Równanie te rozwiązujemy numerycznie i otrzymujemy

$$x_{max} \approx 4,9651, \quad (34)$$

oraz

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{x_{max}kT} = \frac{b}{T}, \quad (35)$$

gdzie b to stała Wiena

$$b = 2,89 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}. \quad (36)$$

Zadanie 4

Dla zakresu fal radiowych, czyli dla małych wartości ułamka $h\nu/kT$, prawo Plancka można z bardzo dobrą dokładnością aproksymować przybliżając funkcję wykładniczą zgodnie ze wzorem: $e^x \approx 1 + x$. Korzystając z tego przybliżenia określ, jaki ułamek całkowitej energii promieniowanej przez Słońce jest emitowany w zakresie fal radiowych o częstotliwościach od 0 do $\nu_0 = 1$ GHz. Potraktuj Słońce jako ciało doskonale czarne o temperaturze $T = 6000$ K.

Ostatnie zadanie z tej serii jest prostym zadaniem obliczeniowym. Przybliżamy prawo Plancka przez rozwinięcie eksponensa w szereg

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \approx \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3}, \quad (37)$$

co odtwarza prawo Rayleigha-Jeansa. Następnie obliczamy strumień od 0 do ν_0

$$\Phi_{\nu_0} = \int_0^{\nu_0} e(\nu, T) d\nu = \frac{c}{4} \int_0^{\nu_0} \rho(\nu, T) d\nu = \frac{2\pi kT}{c^2} \frac{1}{3} \nu_0^3, \quad (38)$$

a następnie dzielimy przez całkowity strumień

$$\frac{\Phi_{\nu_0}}{\Phi} = \frac{\Phi_{\nu_0}}{\sigma T^4} = \frac{5\nu_0^3 h^3}{\pi^4 k^3 T^3} = 2,4 \cdot 10^{-17}. \quad (39)$$