

Prawo Biota-Savarta

Grzegorz Jaczewski

28.08.2026

Niniejsza notatka może zawierać błędy i nieścisłości. Zachęcam do dzielenia się wszelkimi uwagami.

1 Wstęp

Indukcja pola magnetycznego pochodząca od nieskończenie cienkiego i krótkiego przewodnika dana jest przez prawo Biota-Savarta

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (1)$$

Niestety w toku swojej edukacji odniosłem wrażenie, że powyższy wzór traktowany jest po macoszemu, zwyczajnie wprowadzony jako pewien postulat, bez próby wyprowadzenia z jakichś ogólniejszych zasad. Tematykę tę porusza ta właśnie notatka.

2 Wyprowadzenie z praw Ampère'a-Maxwella i Gaussa

Naszym punktem wyjścia są dwa z równań Maxwella w postaci różniczkowej: prawo Ampère'a-Maxwella i prawo Gaussa dla magnetyzmu

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

gdzie dla ułatwienia zakładamy brak zmiennnego pola elektrycznego. Z analizy wektorowej wiemy, że jeśli pole wektorowe ma zerową dywergencję, to możemy je zapisać jako rotację pewnego pola wektorowego. Wprowadźmy zatem potencjał wektorowy $\mathbf{A}$, taki że

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (4)$$

Wstawiając to wyrażenie do prawa Ampère'a-Maxwella otrzymujemy

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (5)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (6)$$

wyberamy cechowanie Coulomba $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (pogłębiona dyskusja w Wyrostku A) i dostajemy

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (7)$$

Dla każdej ze składowych mamy do rozwiązania równanie Poissona

$$\nabla^2 A_i(\mathbf{r}) = -\mu_0 j_i(\mathbf{r}). \quad (8)$$

Rozwiązanie łatwo uzyskać jeśli wiemy jak wygląda funkcja Greena laplasjanu w trzech wymiarach:

$$A_i(\mathbf{r}) = \mu_0 \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') j_i(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = \mu_0 \int \frac{j_i(\mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}'. \quad (9)$$

Więcej o tym podejściu w Wyrostku D. Spróbujemy odtworzyć ten sam wynik bez jawnego uciekania się do funkcji Greena. Funkcje $A_i(\mathbf{r})$ oraz $j_i(\mathbf{r})$ możemy zapisać stosując transformację Fouriera (patrz Wyrostek B) jako

$$A_i(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \hat{A}_i(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (10)$$

$$j_i(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \hat{j}_i(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (11)$$

Wstawiając te wyrażenia do równania Poissona otrzymujemy

$$-\int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \hat{A}_i(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} |\mathbf{k}|^2 = -\mu_0 \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \hat{j}_i(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (12)$$

$$\hat{A}_i(\mathbf{k}) = \mu_0 \frac{\hat{j}_i(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^2}. \quad (13)$$

Teraz podstawiamy z powrotem do (10) i korzystamy z transformacji odwrotnej

$$\hat{j}_i(\mathbf{k}) = \int d^3 \mathbf{r}' j_i(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}, \quad (14)$$

żeby dostać wyrażenie

$$A_i(\mathbf{r}) = \mu_0 \int d^3 \mathbf{r}' j_i(\mathbf{r}') \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{|\mathbf{k}|^2}. \quad (15)$$

Pozostaje nam obliczyć całkę po $\mathbf{k}$. Jest to całka na $\mathbb{R}^3$, którą najwygodniej oblicza się we współrzędnych sferycznych

$$\int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{|\mathbf{k}|^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty k^2 dk \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos \theta}}{k^2}. \quad (16)$$

Bez utraty ogólności zakładamy, że wektor $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ jest równoległy do osi z . W takim wypadku iloczyn skalarny $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ to po prostu

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos \theta. \quad (17)$$

Wprowadzamy nową zmienną $u = \cos \theta$ i wykonujemy całkę po kącie ϕ

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 du \int_0^\infty dk e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|u} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{\sin(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (18)$$

Do wykonania pozostaje całka po k - jest to całka Dirichleta:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (19)$$

Różne drogi do otrzymania powyższego wyniku całkiem nieźle są przedstawione na anglojęzycznej Wikipedii. Ostatecznie dostajemy

$$A_i(\mathbf{r}) = \mu_0 \int \frac{j_i(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \quad (20)$$

czy ten sam wynik, który dostaliśmy korzystając z funkcji Greena. Znając potencjał wektorowy

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \quad (21)$$

możemy otrzymać indukcję pola magnetycznego

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \nabla \times \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \mu_0 \int \nabla \left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}', \quad (22)$$

gdzie wykorzystaliśmy następującą tożsamość wektorową

$$\nabla \times (f\mathbf{a}) = \nabla f \times \mathbf{a} + f(\nabla \times \mathbf{a}), \quad (23)$$

gdzie f jest funkcją skalarną, a $\mathbf{a}$ polem wektorowym. Jako, że $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ jest funkcją współrzędnych primowanych, to jedynie człon z gradientem jest niezerowy. Idąc dalej

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}'. \quad (24)$$

Infinitezymalny wkład $d\mathbf{B}(\mathbf{r})$ od prądu umieszczonego w położeniu $\mathbf{r}' = 0$ wynosi

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{j}(0) dV \times \frac{\hat{r}}{r^2}, \quad (25)$$

gdzie dV jest infinitezymalnym elementem objętości, a $\hat{r}$ wektorem jednostkowym w kierunku radialnym. Jako, że natężenie prądu dane jest wzorem

$$I = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad (26)$$

i zakładamy, że gęstość prądu jest niezerowa jedynie dla pojedynczego kawałka powierzchni $d\mathbf{S}$, całość przekształca się do

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\mathbf{l} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (27)$$

I to jest właśnie prawo Biota-Savarta.

Wyrostek A: Cechowanie potencjału elektromagnetycznego

Jako, że rotacja gradientu jest równa zero

$$\nabla \times (\nabla \psi) = 0, \quad (28)$$

transformacja potencjałów wektorowego $\mathbf{A}$ i skalarnego φ

$$\mathbf{A}_{new} = \mathbf{A}_{old} + \nabla \psi, \quad (29)$$

$$\varphi_{new} = \varphi_{old} - \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (30)$$

zachowuje postać równań Maxwella. W naszym wypadku najbardziej interesuje nas cechowanie Coulomba $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, które równoznaczne jest z warunkiem

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}_{old} + \nabla \psi) = 0. \quad (31)$$

Aby otrzymać wyrażenie na funkcję $\psi(\mathbf{r})$ musimy rozwiązać równanie Poissona

$$\nabla^2 \psi = -\nabla \cdot \mathbf{A}_{old}, \quad (32)$$

wykorzystując naszą ulubioną metodę (np. funkcję Greena albo transformację Fouriera) Ostatecznie dostajemy rozwiązanie w postaci

$$\psi(\mathbf{r}) = - \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{A}_{old}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \quad (33)$$

Wyrostek B: Transformacja Fouriera

W toku naszych rozważań pojawiło się pojęcie transformacji Fouriera. Jako, że dopuszczam możliwość, że czytelnik z tym pojęciem nie miał wcześniej styczności (choćby za moich czasów studenckich na FUW transformacja Fouriera pojawiła się dopiero na Analizie III, a więc semestr po wykładzie z elektryczności i magnetyzmu) pokrótce wyłożę najważniejsze informacje na ten temat. Transformacja Fouriera jest szalenie przydatnym narzędziem w wielu działach matematyki, fizyki i techniki (polecam film *To Understand the Fourier Transform, Start From Quantum Mechanics*). Zdefiniujmy sobie transformatę Fouriera (a więc efekt działania transformacji Fouriera) funkcji jednej zmiennej $f(t)$ jako

$$\hat{f}(\omega) = C \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (34)$$

oraz odwrotną transformatę Fouriera (a więc naszą oryginalną funkcję $f(t)$) jako

$$f(t) = C' \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (35)$$

gdzie C i C' są pewnymi stałymi których wartość przedyskutujemy za chwilę. Podstawiając jedno wyrażenie do drugiego dostajemy

$$f(t) = CC' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{i\omega(t-t')} dt' d\omega. \quad (36)$$

Całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (37)$$

gdzie $\tau = t - t'$, jest oczywiście rozbieżna. Musimy zatem uciec się do pewnej matematycznej sztuczki. Mianowicie możemy napisać

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega &= \int_{-\infty}^0 e^{i\omega\tau} d\omega + \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^0 e^{i\omega(\tau - i\eta)} d\omega + \int_0^{\infty} e^{i\omega(\tau + i\eta)} d\omega \right] = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{i\tau + \eta} (1 - 0) + \frac{1}{i\tau - \eta} (0 - 1) \right] = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{i\tau + \eta} - \frac{1}{i\tau - \eta} \right] = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{2\eta}{\tau^2 + \eta^2} := D(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \neq 0 \\ \infty, & \tau = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (38)$$

Pomimo, że wyjściowa całka jest rozbieżna, udało nam się uzyskać nieoczywisty rezultat dla $\tau = 0$. To co otrzymaliśmy nie jest jednak funkcją, a tzw. dystrybucją. Pojęcie dystrybucji jest uogólnieniem pojęcia funkcji. Dystrybucje zazwyczaj całkujemy razem z jakąś funkcją (tzw. funkcją próbną), żeby otrzymać jakiś wynik. Wracając do naszych poprzednich rachunków otrzymujemy

$$f(t) = CC' \int_{-\infty}^{\infty} f(t') D(t - t') dt'. \quad (39)$$

Spróbujmy rozważyć trywialną funkcję $f(t) = 1$. Wówczas

$$\begin{aligned} 1 &= CC' \int_{-\infty}^{\infty} D(t - t') dt' = CC' \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\eta}{\tau^2 + \eta^2} d\tau = \\ &= 2CC' \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \arctg \frac{\tau}{\eta} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2\pi CC'. \end{aligned} \quad (40)$$

Widzimy zatem, że stałe C i C' muszą spełniać warunek.

$$CC' = \frac{1}{2\pi}. \quad (41)$$

Dwie najpopularniejsze konwencje to $C = 1, C' = \frac{1}{2\pi}$ oraz $C = C' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Zainteresowanych pogłębionym opisem dystrybucji $D(\tau)$ zapraszam do Wyrostka C. Co najważniejsze koncept transformacji Fouriera można uogólnić na dowolną liczbę wymiarów n

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \int f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^n \mathbf{x} \quad (42)$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^n \mathbf{k}. \quad (43)$$

Wyrostek C: Delta Diraca

Najbardziej znaną dystrybucją jest delta Diraca $\delta(x)$, spełniająca następujące warunki:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad (44)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (45)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad (46)$$

Okazuje się, że dystrybucja $D(\tau)$ wprowadzona w Wyrostku B to po prostu

$$D(\tau) = 2\pi\delta(\tau). \quad (47)$$

Głodnym wiedzy na temat delty Diraca polecam filmik *This function doesn't exist. So why is it everywhere in physics?*.

Wyrostek D: Funkcje Greena

Funkcje Greena stanowią wygodne narzędzie do rozwiązywania równań różniczkowych o postaci

$$L(x)u(x) = f(x), \quad (48)$$

gdzie $L(x)$ jest operatorem liniowym działającym na zmienną x , a $u(x)$ jest poszukiwaną funkcją. Definiujemy funkcję Greena $G(x, s)$ jako funkcję spełniającą następującą zależność

$$L(x)G(x, s) = \delta(x - s), \quad (49)$$

w której pojawia się, wspomniana w poprzednich Wyrostkach, delta Diraca. Możemy wówczas skorzystać z faktu, że

$$\int \delta(x - s) f(s) ds = f(x), \quad (50)$$

a zatem

$$\int L(x)G(x, s)f(s) ds = f(x). \quad (51)$$

Jako, że $L(x)$ nie zależy od zmiennej s , dostajemy

$$L(x) \int G(x, s)f(s) ds = f(x). \quad (52)$$

W ten sposób dostaliśmy rozwiązanie naszego równania

$$u(x) = \int G(x, s)f(s) ds. \quad (53)$$