

Matma okularowa 3

Zagadnienia

- Funkcje dwu zmiennych (na $\mathbb{R}^2$) - ok. 4 tyg.
 - powierzchnia w $\mathbb{R}^3$ jako “wykres” funkcji na $\mathbb{R}^2$
 - pochodne cząstkowe i kierunkowe
 - nastojaszczą proziodna, różniczka zupełna
 - gradient i wzór Taylora
 - reguła łańcuchowa
 - funkcje zadane w sposób uwikłany
 - ekstrema funkcji dwu zmiennych (zwykle i związane)
- Elementy geometrii różniczkowej krzywych i powierzchni w $\mathbb{R}^3$ - ok. 2 tyg.
 - wektor(e) styczny(e) i normalna
 - krzywizna krzywej i powierzchni
 - płaszczyzna styczna i wektor normalny
 - pierwsza forma kwadratowa powierzchni
 - druga forma kwadratowa powierzchni: krzywizny główne, Gaussa i średnia
- Szeregi funkcyjne - ok. 3 tyg.
 - funkcje i bazy ortogonalne
 - szeregi Fouriera
 - wielomiany ortogonalne (jako przykłady układów funkcji ortogonalnych)
- Funkcje zmiennej zespolonej - ok. 3 tyg.
 - pochodna zespolona, CR-y
 - całka liniowa i konturowa na płaszczyźnie zespolonej
 - bieguny i punkty rozgałęzienia (logarytm i pierwiastek)
 - wzorek Cauchy i szeregi Wawrzusia
 - całkowanie przez residua
- Transformaty Fouriera - ok. 2 tyg.
 - twierdzenie o splocie
 - transformata pochodnej (zastosowanie do równań różniczkowych)

Zasady: Zadania domowe co tydzień. 2 kolokwia po 3 zadania (à 5 p. każde) wybrane z zadań domowych (zadania mogą się składać z kilku podpunktów). Egzamin: 3 zadania też z domowych. Na 45 punktów możliwych do uzyskania zalicza (mniej więcej) 25.

Kolokwia: piątki 20 listopada i 15 stycznia wczesnym popołudniem (godziny podam, gdy znajdę salę).

Zadania na pierwsze ćwiczenia

1. Przypomnieć pochodne funkcji jednej zmiennej ax^α , $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, e^x , a^x , $\ln x$, $\log_a x$, x^x (żeby postraszyć). Przypomnieć interpretację pochodnej jako tangensa kąta nachylenia stycznej do wykresu i sens pochodnej jako głównej liniowej części przyrostu funkcji ($f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r(x, h)$, $\lim_{h \rightarrow 0} (r(x, h)/h = 0)$).

Wzorki na pochodne iloczynu i ilorazu funkcji (plenić używanie wzoru $(f/g)' = (f'g - g'f)/g^2$ - naogół prowadzi do bardziej zawiłych wyrażeń) oraz $f(g(x))$ np. $\sin \sqrt{x}$.

Pochodna funkcji odwrotnej w danym punkcie (wyjaśnienie skąd się biorą wzorki podane wyżej) to odwrotność obliczonej w odpowiadającym mu punkcie pochodnej samej funkcji - wynika to z interpretacji pochodnej jako tangensa kąta nachylenia stycznej do wykresu.

Np. jeśli $y = \arcsin x$, to $\sin y = x$ i

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} \Big|_{\sin y = x} = \frac{1}{(\sin y)'} \Big|_{\sin y = x} = \frac{1}{\cos y} \Big|_{\sin y = x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \Big|_{\sin y = x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Oczywiście najpierw przypomnieć wykres $\arcsin x$ i na jakim zbiorze zdefiniowany.

Przypomnieć wzorek Taylora dla funkcji ten z resztą

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)h^{n+1},$$

gdzie $0 \leq \theta \leq 1$ (czyli ostatnia pochodna gdzieś pomiędzy x_0 , a $x_0 + h$ ale wic w tym, że nie wiemy, gdzie dokładnie!), i wytłumaczyć na przykładzie funkcji $f(x) = \exp(-1/x^2)$ z $x_0 = 0$, że ta reszta jest kluczowa, żeby wzór działał bo $f^{(n)}(0) = 0$, dla $n = 0, 1, \dots$. Szereg Taylora, gdy można pokazać, że ten ostatni wyraz zbiega do zera, gdy $n \rightarrow \infty$. Na wzorze Taylora wytłumaczyć kryteria istnienia ekstremum w punkcie x_0 .

Całka nieoznaczona jako operacja odwrotna do pochodnej. Przypomnieć wzorki na całki z funkcji elementarnych (przy okazji wytłumaczyć, dlaczego $\int dx x^{-1} = \ln|x| + \text{Const.}$ (a nie po prostu $\ln x$). Całkowanie przez podstawienie - jakieś proste przykłady typu $\int dx x \cos(x^2)$ i przez części, np. $\int dx x \cos x$. Całka oznaczona jako pole (ze znakiem!) pod wykresem.

2. Analizę, czyli badanie lokalnych właściwości zbiorów (albo tych właściwości określanie - bo jak się okazuje, jeśli w sprawę zaczynają się wgłębiać matematycy - są one do pewnego stopnia zależne od przyjętych do ich badania instrumentów) i funkcji na nich określonych, można uprawiać wtedy, gdy sens ma pojęcie wzajemnej odległości dwu elementów zbioru. Z tego powodu ważną rolę w matematyce odgrywa klasa przestrzeni zwanych przestrzeniami metrycznymi (przypomnijmy, że dla matematyka przestrzeń to taki zbiór, który jest na potrzeby chwili całym światem - trochę jak Wszechświat dla fizyka: pytanie co jest na zewnątrz Wszechświata albo matematycznej przestrzeni jest naogół, mówiąc językiem filozofii, nieprawomocne - a różne przestrzenie łączą ze sobą tylko odwzorowania, czyli abstrakcyjne przyporządkowania ich elementów).

Ogólnie przestrzeń metryczna jest to para: $(\mathcal{X}, d)$, w której $\mathcal{X}$ jest zbiorem, a d funkcją, zwaną *metryką* określoną na $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ o wartościach w $\mathbb{R}_+$ (czyli po ludzku: maszynką z dwiema dziurami, do których wrzuca się dwa elementy zbioru $\mathcal{X}$ i dostaje w zamian rzeczywistą liczbę nieujemną, którą właśnie nazywamy odległością wzajemną tych dwu elementów) o następujących właściwościach (x, y, z są tu elementami $\mathcal{X}$):

- i) $d(x, y) \geq 0$, przy czym $d(x, y) = 0$ tylko, gdy $x = y$,
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$,
- iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (“nierówność trójkąta”).

Nas najbardziej jako przestrzeń będzie interesować $\mathbb{R}^n$ (której elementami są uporządkowane n -ki liczb $(x_1, \dots, x_n)$, które będziemy też czasem pisać jako wektory $\mathbf{x}$) i standardowa metryka zwana *euklidesową*, dana wzorem¹

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

ale siła matematyki polega na tym, że przestrzenie mogą być bardzo rozmaite, a ogólne reguły pozostają takie same i wszystko co z nich można wywnioskować jest prawdą niezależnie od tego, “czym” są przestrzenie, do których te reguły stosujemy. W samej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ można też wprowadzić inne metryki, ale nie będziemy się tu tym zajmować. Bedziemy zresztą zajmować się naogół przestrzeniami $\mathbb{R}^2$.

Mając metrykę na $\mathcal{X}$ można też zdefiniować ciągi Cauchy’ego, czyli takie numerowane kolejnymi liczbami naturalnymi sekwencje elementów $\mathcal{X}$, że dowolne dwa ich wyrazy, x_n i $x_{n'}$, poczynając od pewnego N leżą dowolnie blisko siebie, tj. $d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon$ dla dowolnie małego $\varepsilon > 0$, jeśli tylko $n', n > N(\varepsilon)$. Ciągi takie stanowią podstawowe narzędzie (śrubokręt i kłapkażki) analizy matematycznej. Każdy ciąg zbieżny (tj. taki, że istnieje takie $g \in \mathcal{X}$, że $d(x_n, g) < \varepsilon$ dla dowolnie małego $\varepsilon > 0$, jeśli $n > N(\varepsilon)$) jest, jak można dość łatwo pokazać, ciągiem Cauchy’ego, ale nie każdy ciąg Cauchy’ego jest zbieżny. Dlatego o takiej “dobrej” przestrzeni $\mathcal{X}$, w której każdy ciąg Cauchy’ego elementów $\mathcal{X}$ jest zbieżny (tzn., ma granicę, która jest też elementem $\mathcal{X}$) mówimy, że jest *zupełna*. Bo choć intuicyjnie wydaje nam się, że jak elementy x_n ciągu Cauchy’ego są coraz bliżej jedne drugich, to powinny do czegoś zbiegać, to wcale tak być nie musi. np. jeśli $\mathcal{X} = \mathbb{W}$ (przestrzeń liczb wymiernych) z metryką $d(x, y) = |x - y|$, a jako ciąg x_n weźmiemy

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

to taki ciąg, którego wszystkie wyrazy są liczbami wymiernymi, nie zbiega, choć jest ciągiem Cauchy’ego, bo jak wiemy, jego granicą, jest niewymierna liczba e , ale ona nie należy do $\mathbb{W}$. I należy się tu postawić w pozycji Poldzia Kroneckera: dobry Pan Bóg dał nam zbiór liczb naturalnych; my chytrze skonstruowaliśmy z nich liczby wymierne, czyli przestrzeń $\mathbb{W}$, ale poza nią nic nie istnieje! To jest to, co wyżej było: przestrzeń $\mathbb{W}$ jest na razie całym światem - niema nic poza nim! I liczby niewymierne, czyli przestrzeń $\mathbb{R}$, trzeba dopiero stworzyć. Jak? Poprzez tzw. popożnienie Koszi² przestrzeni $\mathbb{W}$, czyli

¹W przypadku przestrzeni $\mathbb{R}$ po prostu $d(x, y) = |x - y|$.

²Uczmy się tego języka - może się to okazać bardzo przydatne, jakby co...

przez podzielenie ciągów Cauchy’ego elementów tej przestrzeni na klasy równoważności (dwa ciągi Cauchy’ego, co wydają się zbiegać do tego samego, uznajemy za to samo), stworzeniu nowej przestrzeni $\tilde{\mathcal{X}} = \mathbb{R}$, której elementami są te klasy równoważności ciągów Cauchy’ego, które to klasy utożsamiamy z liczbami rzeczywistymi.

Dobrze jest też uogólnić kilka pojęć znanych z analizy uprawianej w przestrzeni $\mathbb{R}$ na dowolne przestrzenie metryczne. Tu i ówdzie mogą się te pojęcia pojawić. I tak

- *Kulą otwartą* $K(x_0, r)$ o promieniu r i środku w x_0 nazywa się zbiór wszystkich takich $x \in \mathcal{X}$, których odległość od x_0 jest mniejsza niż r . Hieroglifami: $K(x_0, r) = \{x \in \mathcal{X} \mid d(x, x_0) < r\}$.
- Zbiór $A \subset \mathcal{X}$ jest nazywany *otwartym* (w $\mathcal{X}$, przy zadanej metryce d), jeśli każdy element $x \in A$ jest środkiem jakiejś kuli otwartej $K(x, r)$ całkowicie zawartej w A (tzn. można tak dobrać r , żeby wszystkie punkty kuli należały do A). Otwartość zbioru zależy od przyjętej metryki. Np. w metryce dyskretniej każdy zbiór $A \subset \mathcal{X}$ jest otwarty, bo $K(x, 1) = \{x\} \subset A$.
- Zbiór O zwie się *otoczeniem* punktu $x_0 \in O$, jeśli istnieje kula otwarta $K(x_0, r) \subset O$. Można też ograniczyć się do otoczeń będących kulami.
- Punkt $x \in A$ jest *punktem wewnętrznym* zbioru $A \subset \mathcal{X}$ jeśli A jest otoczeniem punktu x . Czasem formuluje się to mówiąc, że istnieje kula $K(x, r) \subset A$; zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru A nazywa się jego wnętrzem ($\text{int}A$).
- Punkt $x \in A$ jest *punktem izolowanym* zbioru $A \subset \mathcal{X}$ jeśli istnieje taka kula $K(x, r)$, że $A \cap (K(x, r) - \{x\}) = \emptyset$, czyli kula o środku w x , która poza samym x innych punktów zbioru A nie zawiera.
- Punkt x nazywa się *punktem skupienia* zbioru $A \subset \mathcal{X}$, gdy każda kula o środku w x (i dowolnym promieniu r) zawiera punkty należące do A . Sam punkt x może przy tym nie należeć do zbioru A . Skończony (czyli też dyskretny) zbiór punktów przestrzeni metrycznej nie posiada punktów skupienia.
- Zbiór A zwie się *zbiorem domkniętym*, gdy należą doń wszystkie jego punkty skupienia. Zbiór punktów skupienia dowolnego podzbioru A przestrzeni metrycznej jest więc zawsze domknięty. Domknięcie $\bar{A}$ zbioru $A \subset \mathcal{X}$ to sam zbiór A i wszystkie jego punkty skupienia. Domknięcie $\bar{A}$ zbioru A jest więc zbiorem domkniętym.
- *Brzeg* ∂A zbioru $A \subset \mathcal{X}$ to $\partial A = \bar{A} - A$.
- Zbiór A jest ograniczony, gdy istnieje jakaś kula (o skończonym promieniu r), w której A się zawiera cały.

Pojęcie wzajemnej odległości dwóch elementów zbioru, któremu sens nadaje metryka, jest potrzebne, by zdefiniować ciągłość odwzorowań. Odwzorowanie jednej przestrzeni metrycznej w drugą: $f : (\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}}) \longrightarrow (\mathcal{Y}, d_{\mathcal{Y}})$ nazywamy ciągłym w punkcie $x \in \mathcal{X}$, gdy

dla każdego ciągu $x_n \in \mathcal{X}$ (o $x_n \neq x$) zbieżnego (w metryce $d_{\mathcal{X}}$) do x ciąg $f(x_n)$ jest zbieżny (w metryce $d_{\mathcal{Y}}$) do $f(x) \in \mathcal{Y}$. Powinno już być jasne, że ciągłość danego odwzorowania zależy od tego, jakie są te metryki, ale my się tym nie będziemy przejmować, bo dla nas $\mathcal{X}$ to będzie $\mathbb{R}^2$ (albo $\mathbb{R}^n$), a $\mathcal{Y}$ to będzie $\mathbb{R}$ (lub $\mathbb{R}^m$) i w obu tych przestrzeniach metryka będzie Euklidesowa. Żeby było mniej pisania $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ będziemy sobie (nieświeżdomie korzystając z tego, że przestrzenie $\mathbb{R}^n$ są przestrzeniami wektorowymi) pisać jako $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ rozumiejąc, że chodzi zawsze o metrykę euklidesową. Odwzorowaniami, którymi się będziemy zajmować będą najpierw funkcje określone na $\mathbb{R}^2$ (lub $\mathbb{R}$) o wartościach w $\mathbb{R}$, potem (gdy będziemy mówić o krzywych i powierzchniach) funkcje określone na $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}^2$ o wartościach w $\mathbb{R}^3$. Zajmiemy się też funkcjami na przestrzeni $\mathbb{R}^2$ ale traktowanej jak płaszczyzna zespolona, czyli $\mathbb{C}$ o wartościach też w $\mathbb{C}$, czyli jakby odwzorowaniami $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}^2$ (ale mającymi pewne szczególne cechy).

Zajmijmy się dokładniej zagadnieniem ciągłości odwzorowania. Jedna definicja ciągłości już była sformułowana ale ją tu jeszcze raz podamy w nieco innej formie, najpierw definiując granicę funkcji w punkcie (tzw. definicja Cauchy'ego granicy funkcji): f_0 jest granicą funkcji $f(\mathbf{x})$ w punkcie $\mathbf{x}_0$, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$, że $|f(\mathbf{x}) - f_0| < \varepsilon$, gdy $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$. Inna definicja, tzw. Heinego (albo ciągowa, równoważna tej Cauchy'ego) jest taka: f_0 jest granicą funkcji $f(\mathbf{x})$ w punkcie $\mathbf{x}_0$, gdy f_0 jest granicą każdego ciągu punktów $f(\mathbf{x}_k)$ otrzymanego jako obraz dowolnego ciągu $\mathbf{x}_k$, byle takiego, że (i to jest tu bardzo istotny warunek!) $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_0$, zbieżnego do $\mathbf{x}_0$. Odwzorowanie f jest w punkcie $\mathbf{x}_0$ ciągłe, gdy jego granica w tym punkcie istnieje i jest równa wartości funkcji w tym punkcie (bo zawsze można sobie arbitralnie zdefiniować, że danym punkcie funkcja ma jakąś konkretną wartość - zob. przykłady niżej). Definicja Heinego jest bardzo wygodna, gdy chcemy pokazać, że funkcja *nie* może być ciągła w danym punkcie (bo nie ma tam granicy): wystarczy wymyślić jakiegokolwiek dwa ciągi $\mathbf{x}_k$ i $\mathbf{x}'_k$ oba zbieżne do $\mathbf{x}_0$ i pokazać że $\lim f(\mathbf{x}_k) \neq \lim f(\mathbf{x}'_k)$. Trudniej jest wykazać z jej pomocą, że funkcja może być w danym punkcie ciągła, bo trzeba pokazać że granica $f(\mathbf{x}_k)$ jest ta sama dla *wszystkich możliwych* ciągów zbieżnych do $\mathbf{x}_0$. Niemniej czasem się to w miarę prosto daje zrobić.

Rozpatrzmy np. funkcję $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (głównie takich odwzorowaniach będziemy badać granice i ciągłość, bo odwzorowanie $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ to jest po prostu m odwzorowań $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i każde z nich z osobna można badać w $\mathbf{x}_0$ pod kątem jej ciągłości).

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin(xy), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

(wzdłuż całej osi y funkcja jest zadana odrębnym wzorem) i zbadajmy jej ciągłość w punktach postaci $(0, y)$. Rozpatrzmy osobno punkt $(0, 0)$ i osobno punkty postaci $(0, y)$ z $y \neq 0$. Weźmy najpierw jakieś ciągi $x_n \rightarrow 0$ i $y_n \rightarrow 0$ (ale pamiętamy, że jednocześnie, tzn. dla tego samego n , nie może być $x_n = 0$ i $y_n = 0$ bo w definicji granicy w $\mathbf{x}_0$ jest mowa o ciągach $\mathbf{x}_n$ takich, że $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$) i niech $c_n \equiv f(x_n, y_n)$. Jeśli $y_n \equiv 0$, a $x_n \neq 0$ (zbiegamy do punktu $(0, 0)$ wzdłuż osi x), to stale $c_n = 0$, więc jeśli granica funkcji w $(0, 0)$ miała istnieć, to musiałaby być równa zeru. Ogólniej, jeśli $x_n y_n \rightarrow 0$, co zachodzi zawsze

gdy $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$, to $\sin(x_n y_n) \rightarrow x_n y_n$ i $c_n \rightarrow y_n$. Więc³ ponieważ rozpatrujemy takie ciągi, że $y_n \rightarrow 0$, granicą funkcji w $(0, 0)$ jest zero i arbitralnie przypisana funkcji (w podanym wzorze ją definiującym) wartość 0 w punkcie $(0, 0)$ “pasuje”: funkcja tak zdefiniowana jest w $(0, 0)$ ciągła. Jednak w punktach postaci $(0, y)$ z $y \neq 0$ jest gorzej: Jeśli rozpatrujemy np. ciągi $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 1)$, to $\sin(x_n y_n) \rightarrow x_n y_n$ i $c_n \rightarrow y_n \rightarrow y = 1$. Tymczasem podany wzór przypisuje funkcji w punkcie $(0, 1)$ (i wszystkim punktom na osi y) wartość zero! Zatem funkcja tak zdefiniowana jest ciągła w punkcie $(0, 0)$ ale nie w punktach postaci $(0, y)$ z $y \neq 0$ (oczywiście poza osią y jest ona bezdyskusyjnie ciągła). Aby była ona ciągła (ale nie byłaby to ona, tylko już inna funkcja) trzeba by ją określić wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin(xy), & x \neq 0 \\ y, & x = 0 \end{cases}.$$

Drugi (typowy) przykład, to funkcja $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ poza punktem $(0, 0)$ zadana wzorem

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Zobaczmy, czy ma ona jakąś granicę w $(0, 0)$ (gdyby miała, można by ją odpowiednio zdefiniować, tak by była tam ciągła). W tym celu wystarczy rozpatrzeć klasę ciągów (x_n, y_n) , w których $x_n = a/n$, $y_n = b/n$ (różne wartości a i b dają różne ciągi zbiegające do $(0, 0)$). Wtedy

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{ab}{a^2 + b^2},$$

niezależnie od n , a to oznacza, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \frac{ab}{a^2 + b^2},$$

czyli że granica zależy od ciągu. Gdy zbiegamy do punktu $(0, 0)$ wzdłuż osi x (ciągi o $b = 0$), lub wzdłuż osi y (ciągi o $a = 0$), to dostajemy w granicy zero. Ale jeśli zbiegamy wzdłuż diagonal $(x_n = y_n, \text{ czyli } a = b)$ lub antydiagonal $(x_n = -y_n, \text{ czyli } a = -b)$, to granicą jest $1/2$ lub $-1/2$. Zatem badana funkcja nie ma granicy w punkcie $(0, 0)$. Do tej samej konkluzji można dojść rozpatrując ciągi postaci $(r_n \cos \varphi_n, r_n \sin \varphi_n)$, co odpowiada zapisaniu tej samej funkcji w zmiennych biegunowych (fizyk powinien mieć w głowie, że zawsze można wprowadzić na płaszczyźnie, czy w dowolnej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jakieś inne, być może dogodniejsze dla analizy danego konkretnego problemu, zmienne). Aby taki ciąg (x_n, y_n) zbiegał do punktu $(0, 0)$ wystarczy, by $r_n \rightarrow 0$; ciąg φ_n może się przy tym zachowywać dowolnie (np. jeśli φ_n rośnie monotonicznie, odpowiada to zbieganiu do punktu $(0, 0)$ po jakiejś spirali). Mamy wtedy

$$f(r_n \cos \varphi_n, r_n \sin \varphi_n) = \frac{1}{2} \sin 2\varphi_n,$$

³Nie zaczyna się zdania od “więc”!

i od razu widać, że granica nie istnieje, bo $\sin 2\varphi_n$ może zbiegać do dowolnej wartości (z przedziału $[-1, 1]$) albo w ogóle do niczego nie zbiegać. (Zbieganiu po osi x odpowiada $\varphi_n = 0$, a zbieganiu po osi y odpowiada $\varphi_n = \pi/2$ - w obu przypadkach $\sin 2\varphi_n = 0$.)

Trzeci przykład to funkcja $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ poza punktem $(0, 0)$ zadana wzorem

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Znów zobaczmy, czy ma ona jakąś granicę w $(0, 0)$. Weźmy najpierw tę samą klasę ciągów, którą wykorzystaliśmy w przykładzie drugim. Tym razem

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n^2 y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{a^2 b}{n(a^2 + b^2)} \rightarrow 0,$$

i granica ta nie zależy od a i b . Jest więc lepiej, ale to jeszcze niczego nie dowodzi, bo to tylko jedna klasa ciągów, która nie wyczerpuje wszystkich możliwości (do punktu $(0, 0)$ można zbiegać np. po paraboli, albo po jakiejś spirali, albo jeszcze jakoś inaczej). Spróbujmy więc rozumować bardziej ogólnie: załóżmy, że $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ czyli, że $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$, co oznacza też, że $x_n^2 + y_n^2 \rightarrow 0$. Niech $c_n \equiv \max(|x_n|, |y_n|)$. Wtedy $|x_n^2 y_n| \leq c_n^3$, a z kolei $x_n^2 + y_n^2 \geq c_n^2$. Można więc napisać oszacowanie:

$$0 \leq |f(x_n, y_n)| \leq \frac{c_n^3}{c_n^2} = c_n \rightarrow 0,$$

które pokazuje, że na każdym ciągu zbieżnym do punktu $(0, 0)$ ciąg $f_n = f(x_n, y_n)$ zbiega do zera. Granicą funkcji w tym punkcie jest więc zero i taką trzeba nadać wartość funkcji w tym punkcie, jeśli chcemy, by była ona w nim ciągła.

W tym przykładzie sztuczka z przejściem do ciągów zapisanych w zmiennych biegunowych (w $\mathbb{R}^3$ można użyć zmiennych cylindrycznych, albo sferycznych, albo jakichś jeszcze innych) daje wynik natychmiast bo

$$f(r_n \cos \varphi_n, r_n \sin \varphi_n) = r_n \sin \varphi_n \cos^2 \varphi_n \rightarrow 0,$$

a dowolny ciąg (x_n, y_n) punktów $\mathbb{R}^2$ można zapisać jako ciąg $(r_n \cos \varphi_n, r_n \sin \varphi_n)$ i jedynym warunkiem jego zbiegania do $(0, 0)$ jest $r_n \rightarrow 0$.

Rozpatrzmy jeszcze funkcję $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ poza punktem $(0, 0)$ zadaną wzorem

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2},$$

i znów zobaczmy, czy ma ona jakąś granicę w $(0, 0)$. Nie ma: jeśli weźmiemy np. $x_n \rightarrow 0$ i $y_n = ax_n \rightarrow 0$ (co obejmuje zbieganie do punktu $(0, 0)$ wzdłuż każdej prostej z wyjątkiem osi y) to

$$f(x_n, y_n) = f(x_n, ax_n) = \frac{ax_n^3}{x_n^2(x_n^2 + a^2)} = \frac{ax_n}{(x_n^2 + a^2)} \rightarrow 0.$$

Jeśli jednak weźmiemy $x_n \rightarrow 0$ i $y_n = x_n^2 \rightarrow 0$, co odpowiada zbieganiu do punktu $(0, 0)$ po paraboli (punkty takiego ciągu leżą w płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ na paraboli $y = x^2$) to wtedy

$$f(x_n, y_n) = f(x_n, x_n^2) = \frac{x_n^4}{x_n^4 + x_n^4} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Na tym ciągu wartość funkcji ma inną granicę! Oznacza to, (ponieważ kryterium Heinego nie jest spełnione), że badana funkcja nie ma granicy w punkcie $(0, 0)$. Zauważmy też, iż przykład ten jest bardzo podobny do przykładu drugiego: gdyby podstawić $z = x^2$ to funkcja $\tilde{f}(z, y) = f(\sqrt{z}, y)$ by była (przynajmniej na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$) tą samą funkcją, co rozpatrywana w tamtym przykładzie.

Weźmy jeszcze funkcję zdefiniowaną wzorami

$$f(x, y) = \frac{xy}{x - y} \quad \text{gdy } x \neq y,$$

i $f(x, x) = 0$ i zapytajmy, czy funkcja ta może być ciągła w punkcie $(0, 0)$ oraz w innych punktach postaci (x_0, x_0) . Gdy weźmiemy ciąg (x_n, y_n) zbieżny do punktu $(0, 0)$, np. z $x_n = 1/n$ i $y_n = -1/n$, to

$$f(x_n, y_n) = -1/2n \rightarrow 0.$$

Ale jeśli wziąć

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}, \quad y_n = \frac{1}{n},$$

to

$$f(x_n, y_n) = n^3 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \right) \frac{1}{n} = n + \frac{1}{n} \rightarrow \infty.$$

Zatem niema szansy, by funkcja ta mogła być ciągła w $(0, 0)$, bo nie ma ona w tym punkcie granicy. W pozostałych punktach typu (x_0, x_0) jest podobnie: wystarczy wziąć np. $x_n = x_0 + 1/n$, $y_n = x_0 - 1/n$, by zobaczyć, że

$$f(x_n, y_n) = \frac{n}{2} \left(x_0^2 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{n}{2} x_0^2 - \frac{1}{2n} \rightarrow \infty.$$

Inny jeszcze (czasem spotykany) sposób spojrzenia na granice funkcji np. w $(0, 0)$ to tzw. granice iterowane: porównujemy wynik granic branych w odwrotnej kolejności:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right), \quad \text{ i } \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right).$$

Zastosujmy go tu do zbadania granicy w $(0, 0)$ funkcji

$$f(x, y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y},$$

Mamy wtedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x) = 1,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{-y + y^2}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (-1 + y) = -1.$$

Ponieważ otrzymuje się w ten sposób dwa różne wyniki, wystarcza to do stwierdzenia, że badana funkcja w $(0, 0)$ granicy mieć nie może. Sposób ten jest jednak mało ogólny, bo odpowiada tylko (w przypadku $\lim_{x \rightarrow 0}(\lim_{y \rightarrow 0} f)$) zejściu na oś x (w dowolnym punkcie $x \neq 0$) a następnie zbiegnięciu wzdłuż osi x do zera. Jest więc to to samo, co badanie $f(x, y)$ na ciągach $(x_n, 0)$ z $x_n \rightarrow 0$. I nawet gdyby się okazało, że obie granice iterowane są takie same, to nie dowodziłoby to jeszcze, że granica funkcji w badanym punkcie istnieje.

Czy funkcja na $\mathbb{R}^2$ zadana wzorami

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - xy}}{xy}\right), & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases},$$

(wzdłuż obu osi, x i y funkcja jest zadana odrębnym wzorem) jest ciągła na osiach x i y ? (Odpowiedź: nie jest, ale jeśli przypisać jej dla $xy = 0$ wartość $\sin 0.5$, to będzie.)

Określić punkty, w których nie istnieją granice funkcji lub są one tam nieciągłe:

$$f(x, y) = \frac{3y}{2x - y}, \quad f(x, y) = \frac{y^2}{x^2 - 2y^2 - 4}.$$

Pierwsza nieciągła - bo nie ma tam granic - w punktach $(x_0, 2x_0)$. Wystarczy wziąć ciągi $x_n = x_0 + \tilde{x}_n$, $y_n = 2x_0 + \tilde{y}_n$ takie, że $\tilde{x}_n \rightarrow 0$ i $\tilde{y}_n \rightarrow 0$, np. $\tilde{x}_n = a/n + b/n^3$, $\tilde{y}_n = 2a/n$, by zobaczyć, że na takich ciągach funkcja nie ma granicy ($|f| \rightarrow \infty$). Także w $(0, 0)$: $f(x_n, y_n) = -3/[1 - 2(x_n/y_n)]$ i iloraz zbiegających do zera ciągów x_n i y_n może dążyć do czegobądź (do zera, lub nieskończoności, lub dowolnej stałej, albo wreszcie do niczego). A jak nie ma granicy, to funkcja nie może być w tych punktach ciągła. Druga też nieciągła w punktach leżących na krzywych $y = \pm\sqrt{(x^2 - 4)/2}$. W punktach $(\pm 2, 0)$ też: na ciągach $x_n = 2 + 1/n$, $y_n \equiv 0$ dąży do 0, a na ciągach $x_n \equiv \pm 2$, $y_n = 1/n$ do $-1/2$.

Różne pochodne funkcji wielu zmiennych na $\mathbb{R}^n$

Niech punktami $\mathbb{R}^n$ będą $(x_1, \dots, x_n)$. Pochodną cząstkową funkcji $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ nazywa się granicę (jeśli granica ta istnieje) ilorazu różnicowego

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)} + h, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{h}.$$

Z powyższego wzoru widać, że pochodną cząstkową w punkcie $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ można obliczyć, tylko jeśli funkcja jest w tym punkcie określona (choćby nawet w taki sposób, że nie jest tam ciągła w sensie badanym przez nas poprzednio). Z praktycznego punktu widzenia obliczanie pochodnej cząstkowej $\partial f / \partial x_k$, czasem oznaczanej też f_{x_k} , sprowadza się do potraktowania wszystkich zmiennych oprócz x_k jak stałych i obliczenia pochodnej po x_k zgodnie ze zwykłymi regułami obliczania pochodnych znanymi z operowania funkcjami jednej zmiennej. Pochodna taka zdaje sprawę z tego, jak funkcja zmienia się wzdłuż jednej konkretnej prostej (równoległej do osi x_k) przechodzącej przez punkt $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ i prosta ta jest związana z wyborem zmiennych $x_1, \dots, x_n$. Ponieważ dla fizyka oczywiste jest, że zawsze można np. obrócić osie układu współrzędnych pokrywającego przestrzeń $\mathbb{R}^n$, jest też jasne, że musi istnieć naturalne uogólnienie pochodnych cząstkowych. Są nimi *pochodne kierunkowe*, które od razu tu zdefiniujemy (no bo skoro to naturalne uogólnienie...), które zdają sprawę ze zmienności funkcji wzdłuż dowolnego kierunku, niekoniecznie równoległego do którejś z osi układu $x_1, \dots, x_n$. Aby pochodną kierunkową zdefiniować trzeba wprowadzić w $\mathbb{R}^n$ jednostkowy wektor

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_n), \quad n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_n^2 = 1.$$

Pochodna kierunkowa, oznaczana $\nabla_{\mathbf{n}} f$, jest wtedy dana wzorem

$$(\nabla_{\mathbf{n}} f)_{(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^{(0)} + h n_1, \dots, x_n^{(0)} + h n_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{h}.$$

Zdaje ona sprawę ze zmienności funkcji wzdłuż prostej mającej kierunek wektora $\mathbf{n}$ i przechodzącej przez punkt $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Widać, że gdy tylko jedna składowa $n_k = 1$, a pozostałe zero, jest to to samo, co zdefiniowana wyżej pochodna cząstkowa $(\partial f / \partial x_k)_{(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}$.

Ważne jest by rozumieć, że pochodna cząstkowa nie jest tym samym, co prawdziwa pochodna (nastajaszczaja proizwodna) funkcji w danym punkcie. Tę prawdziwą pochodną zdefiniujemy dalej. W przypadku funkcji $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, którymi zajmowaliśmy się w poprzednim semestrze,⁴ istnienie pochodnej w danym punkcie x_0 automatycznie oznaczało, że funkcja jest w tym punkcie ciągła. W przypadku pochodnych cząstkowych (lub kierunkowych) funkcji $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($n > 1$) już tak nie jest: Weźmy np. funkcję zdefiniowaną wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} xy / (x^2 + y^2) & \text{gdy } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{gdy } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

⁴Taka figura retoryczna - ja się nie zajmowałem, bo materiał pierwszego semestru nie jest dla mnie tak zabawny, jak drugiego.

Funkcja ta nie ma granicy w punkcie $(0,0)$, co łatwo sprawdzić (to już przeciwczyliśmy), ale żeby można było pytać o jej pochodne cząstkowe w tym punkcie ma ona w nim przypisaną wartość równą 0. Pochodne cząstkowe tej funkcji w punkcie $(0,0)$ istnieją: obliczamy bowiem z definicji

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Dokładnie tak samo (bo funkcja jest symetryczna względem zamiany $x \leftrightarrow y$) oblicza się pochodną $(\partial f / \partial y)_{(0,0)}$. Czyli obie pochodne cząstkowe tej funkcji w punkcie $(0,0)$ istnieją, choć funkcja nie jest w tym punkcie, jako funkcja dwu zmiennych, ciągła. Żeby zrozumieć dlaczego tak jest (to jest to, czego matematycy na ogół nie dopowiadają, zostawiając publikę z rozdziawionymi gębami) wystarczy zobaczyć, że obie granice tej funkcji brane “po osiach” istnieją i są właśnie równe zeru: gdy sprawdzamy granicę funkcji “po osi x ”, to badamy zachowanie $f(x_n, y_n)$ na ciągach postaci $(x_n, 0)$ gdzie $x_n \rightarrow 0$ (ale zawsze $x_n \neq 0$), a ponieważ $f(x_n, 0) \equiv 0$ granica ta jest równa zeru, czyli wzdłuż osi x (i tak samo wzdłuż osi y) funkcja jest ciągła (jest ciągła jako funkcja jednej zmiennej). To dlatego jej pochodne cząstkowe $(\partial f / \partial x)_{(0,0)}$ i $(\partial f / \partial y)_{(0,0)}$ istnieją. Ale łatwo też zobaczyć, że skoro przypisaliśmy funkcji wartość 0 w punkcie $(0,0)$, nie jest ona ciągła, gdy zbiegamy do $(0,0)$ z innego kierunku niż po którejś z dwu osi. Np. gdybyśmy chcieli obliczyć pochodną kierunkową w $(0,0)$ “po diagonalu” (wzdłuż kierunku $x = y$), tzn. pochodną kierunkową odpowiadającą wzięciu $n_1 = n_2 = 1/\sqrt{2}$, to ta pochodna nie będzie istnieć:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{n}} f|_{(0,0)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + n_1 h, 0 + n_2 h) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h} \left[\frac{(h/\sqrt{2})(h/\sqrt{2})}{\frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}h^2} - 0 \right] \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} - 0 \right] = \infty. \end{aligned}$$

Pochodna w tym kierunku istniałaby, gdybyśmy nadali funkcji w punkcie $(0,0)$ wartość $1/2$ (taką, jaka wynika z granicy branej w tym kierunku). Ale wtedy oczywiście w $(0,0)$ nie istniałyby pochodne $\partial f / \partial x$ i $\partial f / \partial y$. Mimo, że teraz pewnie zaczynamy lepiej rozumieć, jak to działa, to dobrze jest wiedzieć też, że nawet istnienie pochodnych kierunkowych w danym punkcie $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ we wszystkich możliwych kierunkach nie jest jeszcze wystarczające, by funkcja miała w tym punkcie prawdziwą (tj. w silnym sensie) pochodną. Wynika to z tego, że w danym punkcie funkcja może być ciągła gdy do tego punktu zbiegamy po dowolnej prostej, ale nie jest ciągła, gdy do $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ zbiegamy np. po paraboli, czy jakiejś spirali. Rozpatrzmy przykład funkcji (już taka była)

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y / (x^4 + y^2) & \text{gdy } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{gdy } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Wiemy, że taka funkcja w punkcie $(0,0)$ jest nieciągła (choć jest ciągła wzdłuż dowolnej prostej przechodzącej przez punkt $(0,0)$ - to też już ustaliliśmy). Spróbujmy jednak

obliczyć jej pochodne kierunkowe w tym punkcie. Żeby od razu obliczać pochodne w dowolnym kierunku, weźmy wektor $\mathbf{n}$ o składowych $n_1 = \cos \theta \equiv c$ i $n_2 = \sin \theta \equiv s$.

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{n}} f|_{(0,0)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + hc, 0 + hs) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h} \left[\frac{c^2 s h^3}{c^4 h^4 + s^2 h^2} - 0 \right] \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c^2 s}{c^4 h^2 + s^2} = \frac{c^2}{s}.\end{aligned}$$

Pochodna jak widać istnieje zawsze, pozornie z wyjątkiem sytuacji, gdy $s = 0$, czyli gdy jest to pochodna wzdłuż osi x . Ale to tylko pozór, bo pochodną kierunkową w kierunku osi x , czyli po prostu pochodną cząstkową $\partial f / \partial x$ w punkcie $(0, 0)$ możemy osobno obliczyć bezpośrednio z definicji

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Pochodna ta jak najbardziej istnieje, a to, że musieliśmy ją obliczyć osobno pokazuje tylko, że pochodna kierunkowa w tym punkcie jest, jako funkcja kierunku, nieciągła (ktoś powiedział, że musi być?). Można też sprawdzić, co polecam jako zadanie domowe (samo obliczenie podanych tu pochodnych też należy potraktować jak ćwiczenie!), że pochodne cząstkowe potraktowane jak funkcje na $\mathbb{R}^2$

$$f_x(x, y) = \frac{2xy^3 - 2x^5y}{(x^4 + y^2)^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{x^6 - x^2y^2}{(x^4 + y^2)^2},$$

nie mają w punkcie $(0, 0)$ granic, czyli nie są one, jako funkcje na $\mathbb{R}^2$, w tym punkcie ciągłe.

Jeśli jednak wszystko idzie gładko, tzn. pochodne cząstkowe w punkcie $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ istnieją i wszystkie $f_{x_i}(x_1, \dots, x_n)$ traktowane jak funkcje na $\mathbb{R}^n$ są w tym punkcie ciągłe, to pochodna kierunkowa $\nabla_{\mathbf{n}} f|_{(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}$ obliczona z definicji jest równa kombinacji

$$\nabla_{\mathbf{n}} f|_{(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})} = n_1 \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})} + \dots + n_n \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})},$$

pochodnych cząstkowych funkcji f w punkcie $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$.

Pochodne cząstkowe funkcji $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wyższych rzędów

Jeśli pochodne cząstkowe pierwszego rzędu $\partial f / \partial x_k$ funkcji $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ w jakimś otoczeniu (tzn. zbiorze otwartym) punktu $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ istnieją, to każda z nich jest w tym otoczeniu pewną nową funkcją $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i można obliczać pochodne cząstkowe tej nowej funkcji, które będą pochodnymi cząstkowymi drugiego rzędu wyjściowej funkcji f . Potem przy tych samych warunkach można obliczać pochodne cząstkowe pochodnych cząstkowych drugiego rzędu tworząc pochodne cząstkowe rzędu trzeciego itd. Pochodne te oznaczamy

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f_{xy}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx}(x, y),$$

etc. Zachodzi pytanie, czy pochodne

$$f_{xy} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \text{ i } \quad f_{yx} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

obliczone w punkcie $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ są sobie równe? Odpowiedź jest taka: jeśli f_{xy} i f_{yx} jako funkcje x i y (przenosi się to oczywiście na więcej zmiennych) istnieją i są ciągłe w $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, to $f_{xy}(x^{(0)}, y^{(0)}) = f_{yx}(x^{(0)}, y^{(0)})$. Matematycy, z natury trochę prestidigitatorzy, lubią możliwą nierówność tych pochodnych demonstrować na (kanonicznym w ich języku) przykładzie funkcji $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) & \text{gdy } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{gdy } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Funkcja ta jest oczywiście ciągła w $(0, 0)$. Następnie obliczają oni pochodne cząstkowe tak:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0, y)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} y \frac{h^2 - y^2}{h^2 + y^2} = -y, \\ \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x, 0)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, 0 + h) - f(x, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} x \frac{x^2 - h^2}{x^2 + h^2} = x, \end{aligned}$$

Po czym radośnie pokazują, że w punkcie $(0, 0)$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = -1, \quad \text{ a } \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 1.$$

Po takim numerze dalej nie do końca jednak wiadomo, jakie fiku-miku doprowadziło do tego szokującego rezultatu. Otóż, aby to zrozumieć, najlepiej obliczyć obie drugie mieszane pochodne w dowolnym punkcie. Po dłuższych przekształceniach (zalecam wprawienie się na tym przykładzie!) otrzymuje się

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

“Na wzorkach” zatem funkcje $f_{xy}(x, y)$ i $f_{yx}(x, y)$ to jest zawsze ta sama funkcja! (Czyli jak komuś wyjdą te dwie pochodne różne to nie może mówić, że tak może być!) No i teraz już wszystko jest jasne: druga mieszana pochodna jest funkcją jednorodną stopnia zero typu wielomian k -tego (tu szóstego) stopnia przez inny wielomian tego samego stopnia. Po zrobieniu paru przykładów (i Zadania 9) powinno być jasne, że takie funkcje są w punkcie $(0, 0)$ zawsze nieciągłe (wyjściowa funkcja f była!) bo mają, gdy się do $(0, 0)$ zbiega z różnych kierunków, różne tam granice. I ta pochodna, co wyżej dała -1 , odpowiada braniu wartości $f_{xy}(x, y)$ przy zbieganiu do $(0, 0)$ po osi y (bo najpierw obliczamy pochodną po x ale otrzymaną funkcję rozpatrujemy już jako funkcję y tylko, kładąc $x = 0$, czyli na osi y), a ta druga, równa $+1$, odpowiada $f_{xy}(x, y)$ przy zbieganiu do $(0, 0)$ po osi x . I cała tajemnica pryska!

Różniczka df funkcji f i pochodna prawdziwa

I tak dochodzimy wreszcie do prawdziwej pochodnej funkcji $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Niech punkty $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ i $(x_1^{(0)} + dx_1, \dots, x_n^{(0)} + dx_n)$ należą do dziedziny funkcji f . Niech

$$\Delta f \equiv f(x_1^{(0)} + dx_1, \dots, x_n^{(0)} + dx_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}),$$

będzie przyrostem wartości funkcji f , gdy przesuwamy się od punktu $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ do punktu $(x_1^{(0)} + dx_1, \dots, x_n^{(0)} + dx_n)$. Fizyk pyta, jak ten przyrost Δf można przybliżyć (niezależnie od kierunku, w którym się przesunęliśmy w bok, byle infinitezymalnie). Odpowiedź matematyka jest taka, że jeśli pierwsze pochodne cząstkowe funkcji f są w otoczeniu $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ ciągłymi funkcjami, to wtedy

$$\Delta f \approx df(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \equiv f_{x_1}(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) dx_1 + \dots + f_{x_n}(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) dx_n,$$

tnz. to df funkcji, zdefiniowane wyrażeniem po prawej stronie, dobrze przybliża wartość Δf w tym sensie, że różnica $\Delta f - df$ zbiega do zera szybciej niż $\sqrt{(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2}$. Technicznie rzecz ujmując

$$\frac{\Delta f - df}{\sqrt{(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2}} \rightarrow 0, \quad \text{gdy} \quad \sqrt{(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2} \rightarrow 0,$$

niezależnie od tego jak każde dx_i z osobna zbiega do zera. df , czyli właśnie *różniczka*⁵ funkcji f w punkcie $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, to jest *wartość pochodnej* prawdziwej funkcji f w tymże punkcie na wektorze przyrostu $(dx_1, \dots, dx_n)$. Różniczka jest zawsze (wbijmy więc sobie do głowy to hasło!) *główną liniową częścią przyrostu*, tu przyrostu Δf , *wartości funkcji* f . Czymże zatem jest ta pochodna prawdziwa? Jest to, najogólniej rzecz ujmując, *kowektor*, czyli odwzorowanie liniowe, które odwzorowuje wektor przyrostu w przestrzeń wartości odwzorowania; w przypadku funkcji $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kowektor odwzorowujący $(dx_1, \dots, dx_n)$ w $\mathbb{R}$. (I w tym miejscu widzimy, że analiza łączy się nam z algebrą i lepiej jest wrócić do odpowiednich stron mojego skryptu z algebry i to i owo sobie przyswoić). Kowektor ten, jak każde odwzorowanie liniowe przestrzeni wektorowej,⁶ jest reprezentowany macierzą

⁵Czyli takie małe, co się rusza - tak kiedyś, gdy byłem studentem, odpowiedział na pytanie “a co to jest różniczka?” zadane przez wykładowcę fizyki mój kolega; istotnie, sposób operowania przez fizyków takimi wielkościami jak dx , df , musiał prowadzić do takiej właśnie odpowiedzi...

⁶I tu robimy taki mały myk, że nagle to $\mathbb{R}^n$, a właściwie to różnice punktów tego $\mathbb{R}^n$, zaczynamy traktować jak przestrzeń wektorową. Naprawdę jest to trochę inaczej, ale bardziej logiczne przedstawienie tego wymaga przejścia do obrazka, w którym funkcja f jest w istocie zdefiniowana na pewnej *rozmaitości* różniczkowalnej M , czyli takim tworze, który jakoś można “obmacać”, a obmacanie to polega na wprowadzeniu układu współrzędnych $(x^1, \dots, x^n)$ - dla porządku w interesie trzeba numery współrzędnych punktu pisać u góry - na rozmaitości całej lub przynajmniej jakimś jej kawałku; w każdym punkcie p takiej rozmaitości identyfikowanym we wprowadzonym układzie wartościami $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ współrzędnych jest “przyczepiona” pewna wektorowa przestrzeń zwana przestrzenią styczną i oznaczana $T_p M$ (T od “tangent”; w każdym punkcie p przestrzeń styczna jest trochę inna, choć wszystkie są jakoś tam do siebie podobne, czyli izomorficzne) i to właśnie w tej przestrzeni stycznej istnieją te wektorki infinitezymalnych przemieszczeń z jednego punktu rozmaitości do drugiego; z każdym układem współ-

(tu w kanonicznej zero-jedynkowej bazie przestrzeni $\mathbb{R}^n$ traktowanej jak wektorowa) daną wzorem

$$\left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}, \dots, \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})} \right),$$

działającą na składowe $(dx_1, \dots, dx_n)$ (w tej samej bazie) wektora przesunięcia.

Kowektor ten, czyli pochodna funkcji $f(x_1, \dots, x_n)$, nazywa się też *gradientem funkcji* i (trochę) niepoprawnie traktuje jak wektor (bo naprawdę jest to kowektor; ale w $\mathbb{R}^n$ można sobie na to pozwolić). Wektor ten, który oznacza się też symbolem “nabla”

$$\nabla f|_{\mathbf{x}_0},$$

ma prostą interpretację geometryczną. Mianowicie (dla prostoty rozpatrzmy tu funkcję tylko dwóch zmiennych) zapytajmy, o takie przyrosty dx i dy argumentów x i y funkcji $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) , dla których funkcja nie zmienia swej wartości, czyli takie, dx i dy że

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) = f(x_0, y_0).$$

Jeśli funkcja f jest w (x_0, y_0) , różniczkowalna, to lewą stronę możemy przybliżyć przez

$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy,$$

i jako warunek otrzymujemy

$$f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy = 0,$$

albo, oznaczając sobie wektor przyrostów (dx, dy) przez $\mathbf{h}$,

$$\nabla f|_{\mathbf{x}_0} \cdot \mathbf{h} = 0.$$

Ponieważ warunek $f(x_0 + dx, y_0 + dy) = f(x_0, y_0)$ albo $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0)$ wyznacza poziomice wartości $f(x_0, y_0)$ funkcji f , wnioskujemy, że wektor gradientu w danym punkcie

rzędnych (bo współrzędne można na tej samej rozmaitości wprowadzać różne) jest w sposób naturalny stowarzyszona pewna baza $\mathbf{i}_k$, $k = 1, \dots, n$ przestrzeni stycznej, wektorek $\boldsymbol{\delta}$ przesunięcia z punktu p o współrzędnych $(x_{(0)}^1, \dots, x_{(0)}^n)$ do sąsiedniego p' o współrzędnych $(x_{(0)}^1 + \delta x^1, \dots, x_{(0)}^n + \delta x^n)$ ma postać $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{i}_1 \delta x^1 + \dots + \mathbf{i}_n \delta x^n$, a różniczka df funkcji będąca wartością żywego kowektora (jedno-formy) $\hat{df}$, czyli prawdziwej pochodnej funkcji $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, na wektorze przesunięcia $\boldsymbol{\delta}$ jest dany przez

$$df = \hat{df}(\boldsymbol{\delta}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} \right)_{(x_{(0)}^1, \dots, x_{(0)}^n)} dx^1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x^n} \right)_{(x_{(0)}^1, \dots, x_{(0)}^n)} dx^n,$$

jako kowektor zapisany w bazie dx^k jedno-form dualnej do bazy tworzonej przez wektory $\mathbf{i}_k$ (dualnej, tj. takiej, że $dx^k(\mathbf{i}_j) = \delta_j^k$). I tak robi się z tego geometria różniczkowa, która jest bardzo naturalna i opanowanie jej prostych podstaw bardzo ułatwia życie fizyka. No ale w $\mathbb{R}^n$ wszystko się trywializuje i nic z tego piękna nie widać... Trochę tu odleciałem w kosmos, więc jak kogoś to przeraża, to niech tego przypisu nie czyta.

jest prostopadły do poziomiczy funkcji przechodzącej przez ten punkt i wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji f .

Obliczyć dla wprowy pierwsze i dwugie pochodne cząstkowe funkcji (za każdym razem sprawdzić, że $f_{xy} = f_{yx}$)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x^3 y^2 + 1)^3, & g(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ h(x, y) &= \arcsin\left(\frac{x}{y}\right), & z(x, y) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right). \end{aligned}$$

Sprawdzić, czy funkcja $f = x^y$ spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{x}{y} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial f}{\partial y} - 2z = 0.$$

Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x, y) = \sin(x + y)$ w punkcie (x_0, y_0) w kierunku wektora $\mathbf{n} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ na dwa sposoby: raz bezpośrednio z definicji (jest wcześniej w tekście) i drugi raz jako odpowiednią kombinację pochodnych cząstkowych obliczonych w tym punkcie.

Rozwinięcie w szereg Taylora funkcji wielu zmiennych

Jak wszyscy dobrze wiedzą (lub wiedzieć powinni), w przypadku funkcji jednej zmiennej, czyli odwzorowania z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$, mającej $n + 1$ ciągłych pochodnych w całym przedziale domkniętym $[x_0, x_0 + h]$, słuszny jest *wzór Taylora* (nie szereg, tylko wzór!)

$$\phi(x_0 + h) = \phi(x_0) + \phi'(x_0)h + \frac{1}{2!}\phi''(x_0)h^2 + \dots + \frac{1}{n!}\phi^{(n)}(x_0)h^n + R_{n+1}.$$

Wyraz R_{n+1} , zwany resztą Taylora (a może doczesnymi resztkami Taylora), jest dany wzorem (tzw. postać Lagrange'a resztek Taylora - są też inne jej postacie)

$$R_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\phi^{(n+1)}(x_0 + \theta h), \quad \text{gdzie } 0 < \theta < 1.$$

Chodzi oczywiście o to, że w przedziale $(x_0, x_0 + h)$ jest gdzieś (ale gdzie dokładnie, to tego właśnie wzór nie mówi) taki punkt,⁷ że obliczona w nim $(n+1)$ -sza pochodna funkcji $\phi(x)$ dopełnia wzór Taylora do uczciwej równości. Sztandarowym przykładem, jak działa wzór Taylora jest zastosowanie go z $x_0 = 0$ do funkcji

$$\phi(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Funkcja ta ma w $x_0 = 0$ pochodne dowolnego rzędu, ale wszystkie one, jak jeden mąż (choć to dziewczyny!), są równe zero: $\phi^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, \dots$. Wobec tego wszystkie wyrazy we wzorze Taylora są równe zero oprócz - właśnie! - tej reszty, która daje dokładnie wartość $\phi(h)$.

Dowodzi się (np. u Lejka - to naprawdę bardzo przyjazna człowiekowi książeczka!), że równoważnie resztę Taylora można też zapisać w postaci

$$R_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{n!}(1 - \tilde{\theta})^n \phi^{(n+1)}(x_0 + \tilde{\theta}h), \quad \text{gdzie } 0 < \tilde{\theta} < 1.$$

Czasem bywa to użyteczne.

Dopiero, gdy w przedziale domkniętym $[x_0, x_0 + h]$ istnieją pochodne dowolnego rzędu funkcji $\phi(x)$ i gdy można pokazać, iż przy $n \rightarrow \infty$ reszta R_{n+1} dąży do zera,⁸ wzór Taylora staje się nieskończonym szeregiem potęgowym. Oczywiście promień zbieżności takiego szeregu jest wtedy równy conajmniej h (no bo jak pokazaliśmy, że przy danym h reszta zbiega do zera, to tak musi być; odwracając kota do góry ogonem, jeśli napiszemy nieskończony potęgowy szereg Taylora i zobaczymy, że ma on skończony promień zbieżności r , to to znaczy, że przy $|h| > r$, lub $|h| \geq r$ - zależnie od zachowania szeregu na krańcach przedziału zbieżności - reszta Taylora do zera nie zbiega).

⁷Utarła jakaś taka tradycja matematyczna, żeby wielkość parametryzującą niepewność, gdzie obliczać tę pochodną w reszcie Taylora oznaczać θ . Nie wiem skąd to poszło, ale nie będziemy tej tradycji tu łamać.

⁸Jest jasne, że w przypadku funkcji $\phi(x) = \exp(-1/x^2)$ tego właśnie nie można pokazać!

**Zadania domowe (Cześć jest wzięta z nieśmiertelnego zbioru (tom II) Krysi-
kiegi i Włodarskiego - tam są też rozwiązane pożyteczne przykłady i zadania,
do których są na końcu podane odpowiedzi)**

1. Czy w $\mathbb{R}^2$ zbieżne są następujące cztery ciągi:

$$\left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right), \quad \left(\frac{n-1}{n}, \frac{\sin n}{n}\right), \quad \left(2, \cos \frac{1}{n}\right), \quad \left(n, \frac{n-1}{2n}\right).$$

Jeśli któryś jest, to do jakiej granicy?

2. Zbadać ciągłość w punkcie $(0, 0)$ określonych na $\mathbb{R}^2$ funkcji:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad \frac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \quad \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \quad \frac{1 - e^{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}, \quad \frac{3 - \sqrt{9 + x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}, \\ & \frac{x^3 + y}{2x^2 + y^4}, \quad \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad x \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad \frac{y^3}{x^4 + \sin^2 y}, \quad \frac{\sin(x^4 + y^4)}{x^2 + y^2}, \\ & \frac{e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}}{x^8 + y^8}, \quad (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}, \quad (1 + x^4 y^4)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}, \quad \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2(x^2 + y^2)}, \end{aligned}$$

3. Obliczyć⁹ wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu i drugiego (sprawdzając przy tym, że mieszane pochodne drugiego rzędu są takie same, tzn. że np. $\partial^2 f / \partial x \partial y = \partial^2 f / \partial y \partial x$) poniższych funkcji $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($n = 2$ lub 3). Jak ktoś chce się bardziej ćwiczyć, może i pochodne trzeciego rzędu poobliczać.

- a) $f(x, y) = x^2 - y + 3y^2 + x^3 y^3 - x \sin y,$
- b) $f(x, y) = \frac{xy}{y - 1},$
- c) $f(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right),$
- d) $f(x, y, z) = (3x^2 y + z)^n,$
- e) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2),$
- f) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$
- g) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$ oblicz $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$
- h) $f(u, v) = \ln(u + \ln v),$
- i) $f(x, y, z) = \ln\left(\frac{a - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{a + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right),$
- j) $f(x, y) = x^y,$
- k) $f(x, y) = (\ln x)^{\sin y},$

⁹Zadanie jest idiotyczne, ale spełniać ma ono tę samą rolę, co codzienne rypanie na pianinie znanego kawałka "kurki trzy" przez początkujących pianistów (zaawansowani też to rypią na rozgrzewkę) - ręka musi się ułożyć i rozruszać.

$$\begin{aligned} l) \quad & f(x, y, z) = (x \operatorname{tg} z)^{\ln y}, \\ m) \quad & f(x, y, z) = x^{y^z}, \\ n) \quad & f(x, y) = \int_a^{xy} dt g(t). \end{aligned}$$

Pamiętać, że $a^b = \exp(b \ln a)$; w ostatnim zadaniu $f(x, y) = G(xy)$, gdzie $G(\cdot)$ jest funkcją pierwotną funkcji $g(\cdot)$.

4. Obliczyć bezpośrednio z definicji (tj. jako granicę odpowiedniego ilorazu różnicowego)
a) pochodne cząstkowe f_x i f_y w punkcie $(3, 4)$ funkcji

$$f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2},$$

b) pochodne cząstkowe f_x i f_y w punkcie $(1, 2)$ funkcji

$$f(x, y) = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right),$$

c) pochodną kierunkową w punkcie $(2, 1)$ w kierunku wektora $\mathbf{n} = (1, 3)/\sqrt{10}$ funkcji

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2,$$

i sprawdzić, że jest ona równa odpowiedniej kombinacji pochodnych cząstkowych funkcji f obliczonych w tym samym punkcie,

d) pochodną kierunkową w punkcie $(1, 1)$ w kierunku wektora $\mathbf{n} = (1, -3)/\sqrt{10}$ funkcji

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x + y)\right),$$

i sprawdzić, że jest ona równa odpowiedniej kombinacji pochodnych cząstkowych funkcji f obliczonych w tym samym punkcie.

4. Sprawdzić, czy funkcja $f = x \ln(y/x)$ spełnia równanie różniczkowe

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} - f = 0.$$