

Termodynamika i Fizyka Statystyczna R

semestr letni 2024-25

Krzysztof Byczuk

Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki, UW
byczuk@fuw.edu.pl
www.fuw.edu.pl/ byczuk

Radosław Przeniosło

Instytut Fizyki Doświadczalnej, Wydział Fizyki, UW
radek@fuw.edu.pl

06-06-2025

Ćwiczenia:

dr hab. Krzysztof Jachymski, prof. ucz.
mgr Mikołaj Marcinkowski

Pokazy:

mgr Anita Gardias

Warunki zaliczenia

• Zaliczenie w pierwszym terminie

1. Kolokwium, 14 kwietnia, 2025, sala , 9:00-13:00, test 10p., 3 zadania po 10p.
2. Egzamin, 23 czerwca 2025, sala , 9:00-13:00, test 10p., 3 zadania po 10p.
3. Możliwy egzamin ustny i poprawienie oceny w pierwszym terminie

• Zaliczenie poprawkowe

1. Egzamin pisemny poprawkowy
2. Egzamin ustny poprawkowy, możliwość poprawy oceny w drugim terminie

Wypadkowa ocena na podstawie zebranej liczby punktów w każdym ze sposobów zaliczania po unormowaniu do 100 :

5+ za 99-100p.,
5 za 90-98p.,
4+ za 81-89p.,
4 za 72-80p.,
3+ za 62-71.,
3 za 50-61p.,
2 za 0-49p.

Uwaga: punkty z zaliczenia w pierwszym terminie i poprawkowym nie sumują się.

1 Tydzień I, 24/02-02/03/2025

1.1 Wykład

I. Termodynamika i fizyka statystyczna - wstęp

1. Termodynamika fenomenologiczna, liczba Avogadro
2. Fizyka statystyczna
3. Krótka historia termodynamiki
4. Historia gazu doskonałego
5. Krótka historia fizyki statystycznej
6. Wiek XX

1.2 Zadania na ćwiczenia

1. Pochodne cząstkowe
2. Metoda Jacobianów
3. Wielkości ekstensywne i intensywne - przykład
4. Formy różniczkowe Pfaffa
5. Czynniki całkujące

1.3 Zadania domowe

1. Wiedząc, że $dU = T(S, V)dS - p(S, V)dV$ jest różniczką zupełną, pokaż, że

$$\frac{\partial(T, S)}{\partial(p, V)} = 1.$$

2. Pokaż, że w trzech wymiarach czynnik całkujący jednoformnie istnieje tylko, jeśli spełnia ona

$$\omega \cdot (\nabla \times \omega) = 0.$$

3. Znajdź czynnik całkujący dla formy $\omega = (yz/x)dx + z dy + y dz$.
4. Rozważmy ciąg kolejnych iloczynów zewnętrznych ω , $d\omega$, $\omega \wedge d\omega$, $d\omega \wedge d\omega$, $\omega \wedge d\omega \wedge d\omega$ itd. Jeśli któryś wyraz się wyzeruje, wszystkie następne też. Twierdzenie (Darboux) mówi, że jeśli r -ty wyraz jest pierwszym znikającym, to dla $r = 2m + 1$ mamy

$$\omega = dz + \sum_{i=1}^m y_i dx_i,$$

zaś dla $r = 2m$ można napisać $\omega = \sum_{i=1}^m y_i dx_i$ gdzie x, y, z to funkcje. Sprawdź, jak wyglądają kolejne wyrazy ciągu dla $dU = T dS - p dV$ i jakiego wymiaru jest w takim razie reprezentacja tej formy.

2 Tydzień II, 03-09/03/2025

2.1 Wykład

II. Podstawowe pojęcia termodynamiki

1. Układ termodynamiczny i zmienne termodynamiczne
2. Temperatura, ciśnienie, zerowa zasada termodynamiki
3. Równowaga termodynamiczna
4. Przemiany termodynamiczne

III. Praca, ciepło, pierwsza zasada termodynamiki

1. Praca mechaniczna
2. Ciepło
3. Pierwsza zasada termodynamiki
4. Entalpia

2.2 Zadania na ćwiczenia

1. Istnienie temperatury empirycznej
2. izotermę bez przecięć
3. Izotermę ciała stałego
4. Czas relaksacji
5. Klasyfikacja stanów układu
6. Równanie stanu 1
7. Równanie stanu 2
8. Równanie stanu 3
9. Równanie stanu 4
10. Współczynnik rozszerzalności

2.3 Zadania domowe

1. Badając układy termodynamiczne można zmierzyć różne współczynniki, między innymi:
 - (izobaryczną) rozszerzalność objętościową $\alpha_p = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$,
 - (izotermiczny) współczynnik ściśliwości $\beta_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$,
 - (izochoryczny) współczynnik termiczny ciśnienia $\kappa_V = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$.

a) Pokaż, że współczynniki α_p , β_T , κ_V nie są od siebie niezależne – znając dwa z nich i parametry termodynamiczne układu można wyznaczyć trzeci.

b) Oblicz te współczynniki dla gazu spełniającego równanie van der Waalsa:

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT,$$

gdzie a i b to znane stałe. Pokaż, że tak uzyskane współczynniki spełniają relację z podpunktu (a).

2. (a) Udowodnij, że zachodzi związek

$$\left(\frac{\partial \alpha_p}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial \beta_T}{\partial T} \right)_p.$$

(b) Wiedząc, że współczynnik rozszerzalności objętościowej pewnego gazu zmienia się zgodnie ze wzorem

$$\alpha_p = A - Bp,$$

gdzie A i B są znanymi stałymi, znajdź dla tego gazu

$$\left(\frac{\partial \beta_T}{\partial T} \right)_p, \quad \left(\frac{\partial \beta_T}{\partial V} \right)_p.$$

3. Badając pewien gaz zmierzono jego współczynnik termiczny ciśnienia:

$$\kappa_V = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{T} + \frac{a}{T^2 v},$$

gdzie $v = V/n$ to objętość molowa, zaś a to stała. Zauważono również, że w wysokich temperaturach objętość molowa tego gazu różni się od odpowiadającej objętości molowej gazu doskonałego o stałą wartość b :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(v - \frac{RT}{p(T, v)} \right) = b.$$

Znajdź równanie stanu tego gazu.

4. Dla pewnego gazu spełnione są związki

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{nR}{p}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = -\frac{V}{p} - anR,$$

gdzie a to znana stała. Znajdź równanie stanu tego gazu.

3 Tydzień III, 10-16/03/2025

3.1 Wykład

IV. Druga zasada Termodynamiki

1. Historyczne sformułowania drugiej zasady termodynamiki
2. Sprawność maszyn cieplnych i bezwzględna skala temperatury

3.2 Zadania na ćwiczenia

1. Proces pseudostatyczny
2. Proces Joule'a-Thomsona
3. Praca w polu magnetycznym
4. Pierwsza zasada termodynamiki dla magnetyka
5. Proces adiabatyczny gazu doskonałego
6. Niezależne zmienne termodynamiczne
7. Pojemność cieplna przy stałym N lub μ
8. Wybrane procesy termodynamiczne

3.3 Zadania domowe

1. Analogicznie do materiałów magnetycznych możemy rozważać termodynamikę dielektryków. Niech układ składa się z kondensatora podłączonego do źródła o napięciu $\mathcal{U}$, w który wsunięty jest dielektryk. Na płycie kondensatora nad powierzchnią dielektryka gęstość ładunku wynosi Σ (łączny ładunek Q), a poza dielektrykiem $\sigma(q)$. Wyindukowany ładunek na powierzchni dielektryka ma gęstość $-P$ (polaryzacja). Zakładamy jednorodne pole elektryczne wewnątrz kondensatora. Pokaż, że praca potrzebna na zmianę ładunku na płycie wynosi

$$W = E(\epsilon_0 V_0 dE + V dP),$$

gdzie pierwszy człon opisuje pusty kondensator o objętości V_0 , zaś objętość dielektryka to V . Zatem pierwsza zasada termodynamiki dla elektryka gdy pole elektryczne jest stałe to

$$dU = Q + \vec{E}d\vec{P}$$

2. Znajdź ciepło molowe gazu doskonałego ($pv = RT$) który podlega odwracalnej przemianie, w której $pv^{a+1} = \text{const.}$
3. Korzystając tylko z pierwszej zasady, udowodnij wzór
$$(c_p - c_v) \frac{\partial^2 T}{\partial p \partial v} + \left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_p - \left(\frac{\partial c_v}{\partial v} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v = 2.$$
4. Oblicz współczynnik izobarycznej rozszerzalności termicznej $\alpha_p = (1/V) \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ i ściśliwości izotermicznej $k_T = -(1/V) \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$ oraz prężności izochorycznej $\beta_V = (1/p) \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$ gazu z równaniem stanu Dietericiego

$$p(V - nb) = nRT \exp \left(-\frac{an}{TV} \right).$$

Jaki związek spełniają te współczynniki? Czy da się to stwierdzić bez znajomości dokładnej postaci równania stanu?

4 Tydzień IV, 17-23/03/2025

4.1 Wykład

IV. Druga zasada Termodynamiki

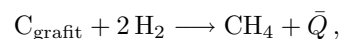
1. Entropia i II zasada termodynamiki
2. Entropia jako zmienna termodynamiczna

4.2 Zadania na ćwiczenia

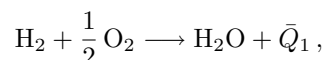
1. Pochodne energii wewnętrznej
2. Pochodne pojemności cieplnych
3. Proces izoentalpowy Joule'a-Thomsona
4. Pojemności cieplne dla gazów van der Waalsa i Berthelota
5. Rozprężanie gazu van der Waalsa do próżni
6. Twierdzenie Hessa
7. Entalpia reakcji chemicznej z tw. Hessa
8. Ciepło w procesie izotermicznym z dielektrykiem
9. Pojemność cieplna paramagnetyka

4.3 Zadania domowe

1. Wykorzystując prawo Hessa, oblicz ciepło $\bar{Q}$ wydzielane w reakcji



na podstawie ciepł wydzielanych w następujących reakcjach chemicznych



gdzie $\bar{Q}_1 = 285,8 \text{ kJ}$, $\bar{Q}_2 = 393,5 \text{ kJ}$ i $\bar{Q}_3 = 890,4 \text{ kJ}$.

2. Korzystając z tożsamości Maxwella udowodnionej na ćwiczeniach

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V,$$

udowodnij następującą postać tożsamości Mayera

$$C_p - C_V = TV \frac{\alpha_p^2}{\beta_T},$$

gdzie $\alpha_p = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ i $\beta_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$.

3. Pokaż, że jeśli energia wewnętrzna pewnego gazu przy ustalonej temperaturze nie zależy od jego objętości ($\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0$), to wtedy

- jego pojemność cieplna C_V też nie zależy od objętości: $(\frac{\partial C_V}{\partial V})_T = 0$,
 - jego równanie stanu postać $V = f(p/T)$, gdzie $f(\cdot)$ jest pewną funkcją ilorazu p/T ,
 - różnica $C_p - C_V$ tego gazu też jest pewną funkcją ilorazu p/T .
4. Infinitesimalna praca rozciągnięcia gumowej taśmy o naprężeniu K z długości L do $L + dL$ wynosi $W = KdL$. Naprężenie pewnej gumowej taśmy jest, przy ustalonej długości L , liniową funkcją temperatury: $K = TA(L)$. Pokaż, że energia wewnętrzna takiej taśmy nie zależy od długości $((\frac{\partial U}{\partial L})_T = 0)$ i że w zakresie długości L , dla których jej naprężenie K jest dodatnie, jej entropia maleje przy izotermicznym rozciąganiu. Pokaż też, że w tym samym zakresie długości temperatura taśmy wzrasta, gdy jest adiabatycznie rozciągana.
 11. Sprawność silnika Stirlinga
 12. Entropia gazu van der Waalsa
 13. Potencjał chemiczny gazu doskonałego
 14. Zastosowania pochodnych entropii
 15. Niemożliwość ochłodzenia wody w pokoju

5.3 Zadania domowe

1. Wyprowadź wzory na energię wewnętrzną oraz entropię wyrażone w zmiennych T i v dla jednego mola gazu opisanego równaniem stanu Berthelota

$$\left(p + \frac{a}{v^2 T}\right)(v - b) = RT$$

zakładając, że znana jest jego molowa pojemność cieplna $c_v(T, v_0)$ jako funkcja temperatury przy jednej wartości v_0 molowej objętości. Zapisując ją jako sumę $c_v(T, v) = c_v^0(T) + \delta c_v(T, v)$, w której c_v^0 jest częścią niezależną od objętości i odpowiada c_v gazu doskonałego wyznacz poprawkę δc_v pamiętając, że gazy bardzo rozrzedzone zachowują się jak gaz doskonały.

2. Cykl Diesla składa się z czterech przemian:

- izobarycznego rozprężania gazu od V_1 do V_2
- adiabatycznego rozprężania do V_3
- chłodzenia przy stałej objętości
- adiabatycznego sprężania z powrotem do stanu początkowego.

Oblicz sprawność tego cyklu dla gazu doskonałego.

3. Cykl Otto składa się z czterech przemian, dwóch adiabatycznych i dwóch izochorycznych. Oblicz sprawność tego cyklu dla gazu doskonałego i wyraż przez objętości gazu w kolejnych punktach.
4. Cykl Stirlinga składa się z czterech przemian, dwóch izotermicznych i dwóch izochorycznych. Oblicz sprawność tego cyklu dla gazu doskonałego.

5. Wyznacz maksymalną pracę, jaką możemy uzyskać łącząc ze sobą dwa naczynia o różnych objętościach V_1 i V_2 utrzymywane w identycznej temperaturze i zawierające po n moli tego samego gazu doskonałego o stałym cieple molowym c_v .

5 Tydzień V, 24-30/03/2025

5.1 Wykład

IV. Druga zasada Termodynamiki

1. Entropia jako funkcja stanu, równanie podstawowe termodynamiki
2. III zasada termodynamiki, postulat Nernsta
3. Podsumowanie zasad termodynamiki

V. Zmienne losowe i rozkłady prawdopodobieństwa

1. Elementy teorii prawdopodobieństwa
2. Funkcje tworzące, momenty, kummulanty i korelacje

5.2 Zadania na ćwiczenia

1. Równoważność sformułowań Clausiusa i Kelvina II zasady termodynamiki
2. Sprawność w procesach nieodwracalnych
3. Temperatura bezwzględna z paramagnetycznym ciałem roboczym
4. Sprawność lodówki Carnot'a
5. Nierówność Clausiusa
6. Transformacja skalowania entropii
7. Ciepły równoważnik pracy w cyklu Mayera
8. Cykl Carnot'a, zmiana entropii
9. Praca w cyklu odwracalnym
10. Sprawność w cyklu odwracalnym innym od Carnot'a

6 Tydzień VI, 31/03-06/04/2025

6.1 Wykład

V. Zmienne losowe i rozkłady prawdopodobieństwa

1. Prawdopodobieństwo, informacja i entropia informacyjna
2. Centralne twierdzenie graniczne i rozkład Maxwella

VI. Podstawy fizyki statystycznej

1. Wspólne cechy układów makroskopowych, mikro i makrostany
2. Postulat równych prawdopodobieństw a priori
3. Hipoteza ergodyczna

VII. Zespół mikrokanoniczny

1. Układ izolowany, statystyczny zespół mikrokanoniczny

6.2 Zadania na ćwiczenia

1. Sprawność cyklu Carnot'a na gazie doskonałym
2. Sprawność cyklu Otto na gazie doskonałym
3. Termodynamika gazu doskonałego fotonów
4. Sprawność cyklu Carnot'a na fotonach
5. Termodynamika czarnej dziury
6. Sprawność cyklu Carnot'a na czarnej dziurze i fotonach

6.3 Zadania domowe

1. Ustalono, że zależność naprężenia K pewnej gumowej taśmy od temperatury T i długości L jest (w pewnym zakresie temperatur) dana wzorem

$$K(T, L) = aT \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right),$$

gdzie a i L_0 to znane stałe. Ponadto zmierzono pojemność cieplną tej taśmy przy ustalonej długości $L = L_0$ i wyniosła ona $C_{L=L_0} = bT$, gdzie b to znana stała. Zmiana energii wewnętrznej takiej taśmy w kwazistatycznym procesie wynosi $dU = TdS + KdL$. Wyznacz energię wewnętrzną i entropię tej taśmy jako funkcje temperatury i długości. Znajdź też pojemność cieplną przy stałym naprężeniu, C_K .

2. Gumowe taśmy z poprzedniego zadania wykorzystamy do zbudowania silnika. Weźmy koło o promieniu R , które może swobodnie obracać się wokół swojej osi. N taśm o $L_0 = R$ przyczepiamy jednym końcem do punktów na brzegu koła (małe, brązowe punkty), zaś drugim do punktu przesuniętego o ΔR od osi koła (duży, brązowy punkt, patrz rysunek):

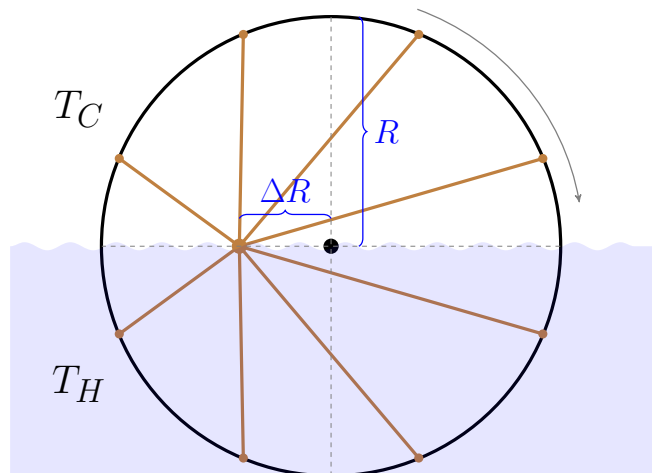
Dolne pół koła (i taśm gumowych) zanurzonych jest w cieplej wodzie o temperaturze T_H , zaś górne pół znajduje się w chłodniejszym powietrzu o temperaturze T_C . Ściąganie taśm na skutek rozgrzania i rozciąganie na skutek chłodzenia powoduje, że koło powoli się obraca. Zakładając, że taśmy ogrzewają/chłodzą się podczas zanurzania/wynurzania dużo szybciej, niż czas obrotu

koła (więc można to potraktować za przemiany przy stałej długości L), zaś przez resztę obrotu podlegają izotermicznemu rozciąganiu/ściąganiu, oblicz sprawność tego silnika. Jaka jest jego sprawność w porównaniu do silnika Carnot'a między tymi samymi temperaturami?

3. Cylindryczne naczynie podzielone jest wewnątrz na pół tłokiem. Każda połowa zawiera n moli gazu doskonałego o identycznych objętościach V i ciśnieniach p . Cały układ przez cały czas znajduje się w równowadze z otoczeniem o temperaturze T . Tłok ma masę m , pole powierzchni bocznej A i może poruszać się wewnątrz naczynia bez tarcia. W pewnym momencie naczynie obrócono o 90° , tak, że na tłok zadziałało przyspieszenie ziemskie g wzdłuż osi naczynia. Oblicz, o ile zmieniła się entropia układu na skutek przesunięcia tłoka wywołanego grawitacją do nowego stanu równowagi, zakładając, że proces ten przebiegał przy stałej temperaturze.
4. W bardzo niskich temperaturach podatność magnetyczna $\chi = M/\mathcal{H}$ paramagnetyków zachowuje się w przybliżeniu jak (tzw. paramagnetyzm Pauliego):

$$\chi \approx \chi_0 - aT^2,$$

gdzie χ_0 i a to dodatnie stałe. Wiedząc dodatkowo, że w niskich temperaturach pojemność cieplna paramagnetyka przy zerowym polu $\mathcal{H} = 0$ wynosi $C_{\mathcal{H}=0} = \beta T^3 + \gamma T$, gdzie β i γ to stałe, wyznacz



jego entropię w niskich temperaturach. Czy spełnia ona III zasadę termodynamiki?

7 Tydzień VII, 06-13/04/2025

7.1 Wykład

VII. Zespół mikrokanoniczny

1. Układ izolowany, statystyczny zespół mikrokanoniczny
2. Dwa podukłady w równowadze termodynamicznej

VIII. Zespół kanoniczny

1. Definicja zespołu kanonicznego
2. Rozkład Boltzmanna
3. Suma statystyczna, termodynamika, równowaga zespołów w granicy termodynamicznej
4. Ciśnienie - mikroskopowo i makroskopowo
5. Praca i ciepło mikroskopowo, twierdzenie o ekwipartycji energii

7.2 Zadania na ćwiczenia

1. Dokończenie materiału z poprzednich tygodni i przygotowanie do kolokwium

8 Tydzień VIII, 14-20/04/2025

8.1 Wykład

VIII. Zespół kanoniczny

1. Energia swobodna
2. Demon Maxwella, silnik Szilarda, zasada Landauera

8.2 Zadania na ćwiczenia

(Zrobiono wybrane przykłady)

1. Prawdopodobieństwo - kostki na rozgrzewkę
2. Prawdopodobieństwo - rozkład armata
3. Prawdopodobieństwo - rozkład spadający kamień
4. Momenty i kumulanty
5. Momenty i kumulanty
6. Twierdzenie o transformacji zmiennej losowej
7. Rozkład log-normal
8. Suma dwóch zmiennych losowych

9. Centralne twierdzenie graniczne

10. Momenty centralne a rozkład prawdopodobieństwa

11. Całka Gaussowska

12. Funkcja Gamma

13. Objętość d-wymiarowej kuli

14. Przybliżenie Stirlinga

8.3 Zadania domowe

1. Korzystając z definicji wyprowadź związki pomiędzy momentami i kumulantami.
2. Człowiek (lub zmęczona, głodna i niezdecydowana osoba) w chwili $t = 0$ znajduje się w punkcie $x = 0$. Co δt wykonuje krok o δx w lewo lub prawo (w stronę lodówki lub w stronę łóżka) z prawdopodobieństwem $1/2$. Znajdź rozkład prawdopodobieństwa znalezienia człowieka w węzłach siatki po N krokach. Jaka jest wartość oczekiwana i wariancja rozkładu? Co się dzieje w granicy dużej liczby kroków?
3. Tym razem proces zaczyna się o jeden krok δx od łóżka, ale z prawdopodobieństwem $p = 2/3$ osoba przesuwa się w stronę lodówki, a tylko $1/3$ łóżka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pójdzie kiedyś spać (zakładamy, że kładzie się do łóżka natychmiast po osiągnięciu celu)? Jak wygląda wynik dla dowolnej wartości p ?
4. Prowadzący ćwiczenia ma w grupie n studentów, którym chce rozdać prace domowe, ale oddaje je zupełnie przypadkowo. Jaka jest oczekiwana liczba osób, które dostaną swoją pracę? Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie r osób dostanie właściwą pracę?

9 Tydzień IX, 21-27/04/2025

9.1 Wykład

VIII. Zespół kanoniczny

1. Gaz idealny w zespole kanonicznym, paradoks Gibbsa

9.2 Zadania na ćwiczenia

1. Omówienie zadań z kolokwium
2. Dokończenie materiału z poprzedniego tygodnia

10 Tydzień X, 28/04-04/05/2025

10.1 Wykład

IX. Rozkład Plancka i zastosowania

1. Rozkład Plancka w pojedynczym oscylatorze kwantowym
2. Promieniowanie ciała doskonale czarnego

10.2 Zadania na ćwiczenia

1. Gęstość stanów w d-wymiarach
2. Mikrokanoniczne warunki równowagi termodynamicznej
3. Gaz idealny w zespole mikrokanonicznym
4. Gaz idealny w zespole mikrokanonicznym - termodynamika
5. Klasyczny oscylator harmoniczny w zespole mikrokanonicznym i jego termodynamika

11 Tydzień XI, 05-11/05/2025

11.1 Wykład

IX. Rozkład Plancka i zastosowania

1. Promieniowanie ciała doskonale czarnego, prawo Plancka

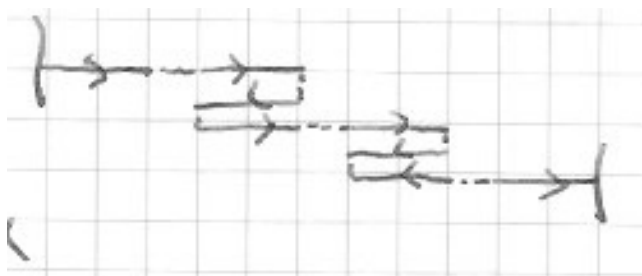
11.2 Zadania na ćwiczenia

1. Spiny Isinga w polu - mikrokanonicznie
2. Spiny Isinga w polu - kanonicznie

11.3 Zadania domowe

1. Znaleźć $\Omega(U, N)$ w zespole mikrokanonicznym dla N identycznych, rozróżnialnych kwantowych oscylatorów harmonicznych o częstotliwości ω w jednym wymiarze. Wyznaczyć entropię, temperaturę i potencjał chemiczny układu. Znaleźć granicę klasyczną, tzn. $U/N \gg \hbar\omega$. Wsk. $\hat{H} = \sum_{j=1}^N \hbar\omega(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + 1/2)$, $\delta(x - x_0) = (1/2\pi) \int k e^{ik(x-x_0)}$ oraz zastosować do obliczenia całki metodę punkty siodłowego.
2. Dany jest jednowymiarowy łańcuch składający się z $N \gg 1$ segmentów o długości a zawieszony pomiędzy brzegami w odległości $L \leq aN$, rysunek. Znaleźć entropię $S(L, N) = k_B \ln \Omega(LN)$ tego układu jako funkcję $L = a|N_+ - N_-|$, gdzie $N_\pm$ jest liczbą segmentów zwróconych w prawo/lewo, i otrzymać związek między temperaturą T a siłą X (napięcie) jakie jest niezbędne aby utrzymać

odległość L , zakładając, że segmenty można obracać swobodnie. Przyjmij, że L jest wielokrotnością a . Model ten opisuje własności elastyczne gumy, w szczególności prawo Hook'a. Wsk. $X = (\partial F / \partial L)_T = -T(\partial S / \partial L)_T \sim (k_B T / Na^2)l$ dla dużych N .



3. Załóżmy, że izolowane od otoczenia dwa układy mają całkowitą liczbę stanów daną przez $\Gamma_i(U_i, N_i) \sim e^{N_i \phi_i(U_i/N_i)}$, gdzie $i = 1, 2$, N_i to liczba cząstek i -tego układu o energii U_i , a funkcje $\phi_i(U_i/N_i)$ są rzędu jedności oraz $\phi(x) > 0$, $\phi'(x) > 0$ i $\phi''(x) < 0$, gdzie prim oznacza pochodną. Jeśli układy 1 i 2 są w kontakcie termicznym to pokazać, że: i) Jeśli temperatury były $T_1 > T_2$ to ciepło przepływa z 2 do 1, a entropia wzrośnie o $dQ(1/T_2 - 1/T_1)$; ii) Jeśli dwa układy są w równowadze termodynamicznej ($T_1 = T_2$) to entropia całości jest sumą entropii podukładów $S_{12} = S_1 + S_2$; iii) Fluktuacje energii U_1 i U_2 w stanie równowagi termodynamicznej między 1 i 2 dane są przez $k_B T^2 / (1/C_1 + 1/C_2)$, gdzie C_i to pojemności cieplne i -tego podukładu.
4. W sześciennym pudełku o boku długości L w d-wymiarach znajduje się N cząsteczek gazu doskonałego. Układ jest całkowicie izolowany od otoczenia. Znaleźć dyspersję środka masy gazu w równowadze termodynamicznej. Jak ona zależy od L ?
5. Rozważmy N identycznych, rozróżnialnych cząstek obsadzających k komórek o tej samej objętości. Makrostan scharakteryzowany jest liczbą cząstek n_i w każdej komórce. Nie interesuje nas która cząstka gdzie jest. Pokazać, że liczba makrostanów wynosi $\Omega(n_1, n_2, \dots, n_k) = N! / n_1! n_2! \dots n_k!$. Pokazać, że przy ustalonej liczbie cząstek $N = \sum_{i=1}^k n_i$ najbardziej prawdopodobne rozłożenie cząstek jest takie, że $n_i = N/k$, czyli rozkład jest jednorodny.

12 Tydzień XII, 12-18/05/2025

12.1 Wykład

IX. Rozkład Plancka i zastosowania

1. Drgania kryształu, kwazicząstki, fonony, ciepło właściwe

12.2 Zadania na ćwiczenia

1. Podsumowanie i uzupełnienie materiału z rozkładu mikrokanonicznego

12.3 Zadania domowe

1. a) Iglę długości ℓ upuszczono na podłogę tak, że z równą gęstością prawdopodobieństwa mogła upaść w dowolne miejsce i być dowolnie obrócona. Podłoga składa się z równoległych desek szerokości d . Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przecnie przynajmniej jedno łączenie między deskami? Rozważ oddzielnie przypadki $\ell < d$ i $\ell \geq d$.
b) Eksperyment powtórzono N razy. Ile razy średnio igła przecięła łączenie? Jakie jest odchylenie standardowe tej liczby?
2. Przy analizowaniu klasycznego gazu doskonałego pominęliśmy wpływ zewnętrznej grawitacji na cząsteczki gazu. By pokazać, że to rzeczywiście uzasadnione, rozważ w zespole mikrokanonicznym gaz N nieoddziałujących cząsteczek o masie m każda w sześciennym zbiorniku o boku L , znajdującym się w jednorodnym polu grawitacyjnym o przyspieszeniu $\vec{g}$ prostopadłym do dwóch przeciwległych ścian. Przyjmij, że energia wewnętrzna gazu jest dużo większa, niż energia potencjalna cząsteczek gazu (w typowych warunkach $T \simeq 300$ K, $Nm \simeq 10$ g, $g \simeq 10 \frac{m}{s^2}$, $L \simeq 1$ m energie te różnią się o 4 rzędy wielkości, więc można tak przyjąć).
3. Gaz tworzony przez N twardych kul o masie m i objętości b każda zamknięty jest w izolowanym pojemniku o objętości V ($V \gg Nb$). Posługując się klasycznym zespolem mikrokanonicznym wyprowadź równanie stanu takiego gazu i jego energię wewnętrzną w funkcji parametrów termodynamicznych. Przyjmij, że kule nie oddziałują ze sobą, ale przy sumowaniu stanów podczas całkowania po położeniu $\int d^3\vec{x}_1 \cdots \int d^3\vec{x}_N$ pierwsza kula ma dostępną całą objętość V , druga ma ją pomniejszoną o objętość pierwszej kuli, czyli dostępne $V - b$, trzecia ma dostępne $V - 2b$ itd.
4. Korzystając z zespołu mikrokanonicznego oblicz prawdopodobieństwo $p(E)dE$ tego, że w zamkniętym w objętości V gazie doskonałym o całkowitej energii U składającym się z N klasycznych cząstek o masie m , wybrana cząstka ma energię pomiędzy E , a $E + dE$. Podaj postać $p(E)dE$ w granicy termodynamicznej ($N \rightarrow \infty$, $U \rightarrow \infty$, przy U/N ustalonym) i pokaż, że ma ono taką postać, jak w zespole kanonicznym zastosowanym do wybranej cząstki (gdzie reszta gazu pełni rolę rezerwuaru).

13 Tydzień XIII, 19-26/05/2025

13.1 Wykład

X Wielki zespół kanoniczny

1. Potencjał chemiczny, interpretacja fizyczna

2. Potencjał chemiczny i entropia, relacje termodynamiczne
3. Wielki zespół kanoniczny w mechanice statystycznej
4. Wielki potencjał kanoniczny
5. Gaz doskonały w wielkim zespole kanonicznym.

13.2 Zadania na ćwiczenia

1. Gaz doskonały, suma statystyczna, zespół kanoniczny
2. Gaz doskonały, termodynamika, zespół kanoniczny
3. Gaz doskonały cząsteczek dwuatomowych, suma statystyczna, zespół kanoniczny
4. Gaz doskonały cząsteczek dwuatomowych, termodynamika, zespół kanoniczny
5. Dipole w polu elektrycznym, zespół kanoniczny

13.3 Zadania domowe

1. Rozważ gaz N nieoddziałujących cząstek w pudełku o boku L , które mogą przyjmować dyskretne wartości energii $E(n_1, n_2, n_3) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$. Oblicz sumę statystyczną układu przechodząc do granicy dużych rozmiarów pudełka. Sprawdź, że wynik jest identyczny jak dla klasycznego gazu doskonałego.
2. Rozważ jednowymiarowy gaz N nieoddziałujących relatywistycznych cząstek o relacji dyspersyjnej $\epsilon = pc$ w kontakcie z rezerwuarem o temperaturze T . Oblicz sumę statystyczną układu, jego energię wewnętrzną, energię na jedną cząstkę, pojemność cieplną $C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,N}$ oraz ciśnienie.
3. W jednorodnym polu grawitacyjnym skierowanym wzdłuż osi z umieszczono naczynie o polu podstawy S i nieskończonej wysokości. W naczyniu znajduje się gaz składający się z N identycznych cząsteczek o masie m wzajemnie nieoddziałujących. Wyznacz wartość średnią i fluktuacje składowej masy układu w stanie równowagi o temperaturze T .

14 Tydzień XIV, 27/05-01/06/2025

14.1 Wykład

XI Doskonałe gazy kwantowe

1. Wielocząstkowa funkcja falowa, zasada nierozróżnialności cząstek kwantowych i jej konsekwencje
2. Funkcje rozkładu Fermiego-Diraca i Bosego-Einsteina

14.2 Zadania na ćwiczenia

1. Rozkład Maxwella, prędkość wypływu gazu
2. Rozkład Maxwella, cząsteczki padające na tarczę
3. Rozkład Maxwella, względna prędkość
4. Rozkład Maxwella, efekt Dopplera
5. Rozkład Maxwella, wzór barometryczny
6. Siła nośna
7. Liczba fotonów we Wszechświecie
8. prawo przesunięć Wiena
9. Promieniowanie ze Słońca
10. Ścisłość gazu doskonałego i gazu fotonów
11. Promieniowanie q-onów

14.3 Zadania domowe

1. Kula o promieniu R i masie M porusza się z prędkością $\vec{U}$ względem ścian dużego pojemnika w gazie cząstek doskonałych o temperaturze T , gęstości n i masie cząstek m . Znaleźć siłę oporu jaką doznaje kula. Wynik wyrazić przez funkcję błędu. Omówić graniczne przypadki. pokazać, że w dla małych $\vec{U}$ wyraz wiodący siły tarcia jest proporcjonalny do $\vec{U}$.
2. Rozważyć klasyczny gaz doskonały N cząstek o masie m w objętości V . Każda cząstka może znajdować się w dwóch stanach wewnętrznych o energiach $\epsilon_1 > 0$ i degeneracji g_1 oraz $\epsilon_2 > \epsilon_1$ i degeneracji g_2 . Wyznaczyć sumę statystyczną tego gazu w zespole kanonicznym jeśli jest on w równowadze termodynamicznej z otoczeniem o temperaturze T . Znaleźć energię wewnętrzną U oraz pojemność cieplną przy stałej objętości C_V . Przeanalizować niskotemperaturowe zachowanie się C_V .
3. Znaleźć kanoniczną sumę statystyczną i na tej podstawie wyznaczyć pełną termodynamikę układu N spinów ± 1 w polu magnetycznym B skierowanym w kierunku osi z . Porównać obecne rozwiązanie z rozwiązaniem tego problemu w ramach zespole mikrokanonicznego.
4. Układ kwantowy opisywany jest hamiltonianem w postaci

$$\hat{H} = -g \frac{B}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie $g > 0$. Jaki jest sens tego hamiltonianu? Wsk. Porównać z operatorem $\hat{L}_x$. Rozpatrzyć zespół N takich układów kwantowych w równowadze termodynamicznej z otoczeniem o temperaturze T . Znaleźć kanoniczną sumę statystyczną, energię wewnętrzną i pojemność cieplną. Wyniki przedyskutować.

5. Cząstka o masie m porusza się w jednym wymiarze pod wpływem siły zachowawczej o potencjale

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2(x+a)^2 & \text{dla } x \leq -a \\ 0 & \text{dla } -a < x < a \\ \frac{1}{2}m\omega^2(x-a)^2 & \text{dla } x \geq a, \end{cases}$$

gdzie $a > 0$. Znaleźć kanoniczną sumę statystyczną dla N takich cząstek w równowadze termodynamicznej z rezerwuarem o temperaturze T . Zbadąć termodynamikę (U , C_N , itd) i przedyskutować wyniki. Zbadać granice $a \rightarrow 0$.

6. N niezależnych i rozróżnialnych cząstek porusza się w jednym wymiarze między $x = 0$ i $x = L > 0$. Znaleźć równanie stanu tego układu jeśli hamiltonian każdej cząstki ma postać

$$H = \frac{p^2}{2m} - \alpha \ln \left(\frac{x}{L_0} \right),$$

gdzie $\alpha > 0$ i $L_0 > 0$ jest charakterystyczną skalą długości. Wyznaczyć ciśnienie i skomentować granice $\alpha \rightarrow 0$.

7. Gaz doskonały N jednoatomowych cząsteczek o masie m znajduje się w cylindrze o wysokości h i promieniu R . Układ (naczynie i gaz) wiruje wokół osi symetrii z prędkością kątową ω . Gaz jest w równowadze z termostatem o temperaturze T . Jak zmienia się koncentracja (liczba cząsteczek na jednostkę objętości) w różnych miejscach wewnątrz walca? Znajdź ciśnienie, z jakim gaz napiera na boczną ścianę walca.

Wskazówka: „Siła odśrodkowa” działająca na cząsteczki $\vec{F}_{od} = m\omega^2 \vec{r}$ jest siłą potencjalną.

8. W klasycznym gazie doskonałym cząsteczek mogących mieć różne masy wyróżniamy dwie cząsteczki (nazwijmy je 1 i 2), o masach odpowiednio m_1 i m_2 . Gaz jest w równowadze z rezerwuarem o temperaturze T . Znajdź prawdopodobieństwo, że względna szybkość $|\vec{v}| = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ cząsteczek 1 i 2 zawiera się w przedziale $[v', v' + dv']$. Oblicz średnią wartość tej szybkości.
9. Rozważ gaz doskonały N cząsteczek o masie m w sześciennym pudle o boku L w sposób kwantowy – jako N nierozróżnialnych nieoddziałujących cząsteczek o energiach $E_{\vec{n}_i} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_{xi}^2 + n_{yi}^2 + n_{zi}^2)$ każda. Gaz jest w równowadze z rezerwuarem o temperaturze T . Znajdź sumę statystyczną, energię wewnętrzną, równanie stanu i entropię tego gazu.
Wskazówka: Załóż, że różnice energii poszczególnych modów są na tyle małe, że uciągnąć sumę $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \mapsto \int_0^{\infty} f(n) dn$.
10. Rozważ w zespole kanonicznym zmodyfikowany gaz fotonów, w którym liczba wzbudzeń każdego modu jest ograniczona od góry, tj. energia modu o pędzie $\vec{p}$ dana jest wzorem $E_{\vec{p}} = \hbar \omega_{\vec{p}} (s + \frac{1}{2})$, gdzie $s = 1, 2, \dots, q$ to liczba wzbudzeń tego modu i q

jest liczbą naturalną, wspólną dla wszystkich modów. Energię stanu podstawowego $\hbar\omega_{\vec{p}}\frac{1}{2}$ można zignorować. Znajdź energię wewnętrzną U , entropię S , ciśnienie p , równanie stanu, koncentrację N/V i ciepło właściwe c_V tego układu. Jak różnią się one od odpowiedników dla zwykłych fotonów?

15 Tydzień XV, 02-09/06/2025

15.1 Wykład

XI Doskonałe gazy kwantowe

1. Rozwinięcie wysoko-temperaturowe dla fermionów i bozonów
2. Własności fermionów w stanie podstawowym $T = 0$
3. Nisko-temperaturowe rozwinięcie Sommerfelda dla fermionów, ciepło właściwe, kwazicząstki
4. Kondensacja Bosego-Einsteina

15.2 Zadania na ćwiczenia

1. Prawo Kirchhoffa
2. Współczynniki Einsteina
3. Kwazicząstki - ciepło właściwe
4. Gaz fotonów - porównanie zespołów kanonicznego i wielkiego kanonicznego
5. Potencjał chemiczny dla cząstek z dodatkowymi stopniami swobody
6. Reakcje chemiczne w gazach
7. Prawo działania mas
8. Równowaga chemiczna
9. Adsorpcja gazu na powierzchni
10. Gaz doskonały - wielki zespół kanoniczny
11. Gaz doskonały - wielki zespół kanoniczny, rozkład Poissona na liczbę cząstek
12. Gaz doskonały w polu grawitacyjnym, wielki zespół kanoniczny

15.3 Zadania domowe

Patrz poprzedni i następny tydzień.

16 Tydzień XVI, 10-17/06/2025

16.1 Wykład

XI Doskonałe gazy kwantowe

1. Kondensacja Bosego-Einsteina

XII Przemiany fazowe

1. Klasyfikacja przejść fazowych
2. Ciepło utajone w przemianach nieciągłych
3. Indeksy krytyczne w przemianach ciągłych
4. Modele średniego pola przemian fazowych
5. Teoria Yanga-Lee przemian fazowych i zera sumy statystycznej

16.2 Zadania na ćwiczenia

1. Średnie obsadzenie bozonów i fermionów
2. Rozwinięcia wysokotemperaturowe dla bozonów i fermionów
3. Paramagnetyzm Pauliego
4. Bozony i fermiony w granicy relatywistycznej i ultrarelatywistycznej
5. Stan podstawowy fermionów w granicy relatywistycznej
6. Stan podstawowy nierelatywistycznych fermionów w d wymiarach
7. Rozwinięcie niskotemperaturowe Sommerfelda - teoria
8. Rozwinięcie niskotemperaturowe Sommerfelda - zastosowania
9. Rozwinięcie niskotemperaturowe Sommerfelda - fermiony w $d = 1$ z liniową relacją dyspersji
10. Bozony w niskich temperaturach

16.3 Zadania domowe

1. Znaleźć w literaturze (Internecie) wiadomości o funkcjach polilogarytmicznych. Wyrazić wielki potencjał termodynamiczny dla doskonałych fermionów i bozonów za pomocą tych funkcji. (Wsk. Należy zrobić rozwinięcie względem aktywności $\alpha = e^{\beta\mu}$.) Wyrazić średnią liczbę cząstek oraz ciśnienie za pomocą funkcji polilogarytmicznych. Są to termodynamiczne równania stanu. Wyznaczyć energię wewnętrzną (kalorymetryczne równanie stanu) i porównać je z wynikiem dla klasycznego gazu doskonałego. Eliminując potencjał chemiczny z równań stanu znaleźć ciśnienie wraz z pierwszą poprawką kwantową. Spróbować wyznaczyć kolejną poprawkę kwantową do rozwinięcia wysokotemperaturowego.
2. Dla idealnego gazu bozonów o masie m w d wymiarach wyznaczyć temperaturę kondensacji Bosego-Einsteina. Jak ta temperatura zależy od wymiarowości układu. Kiedy kondensacja nie jest możliwa?
3. Idealny gaz bozonów o masie m w $d = 3$ wymiarach i spinie $s = 1$ ma energie stanów jednocząstkowych

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \Delta n,$$

gdzie $n = 0, 1$ w zależności od rzutu spinu odpowiednio, $S_z = 0$ i $S_z = \pm 1$. Wyznaczyć temperaturę kondensacji Bosego-Einsteina i porównać z przypadkiem bez spinowym.

4. Idealny gaz bozonów o masie m w $d = 3$ wymiarach, w polu magnetycznym B i spinie $s = 1$ ma energie stanów jednocząstkowych

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu_B B s_z,$$

gdzie $s_z = 0, \pm 1$ jest rzutem spinu, a μ_B jest momentem magnetycznym. Wyprowadzić wzory na średnią liczbę cząstek $\bar{N}$ oraz na średnią magnetyzację M . Pokazać, że w granicy niskich temperatur podatność magnetyczna

$$\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right)_{T, \bar{N}}$$

spełnia prawo Curie

$$\lim_{B \rightarrow 0} \chi \sim \frac{\bar{N}}{T}.$$

5. Dla idealnych fermionów o masie m w $d = 3$ wymiarach pokazać, że w niskich temperaturach zachodzi

$$\gamma = \frac{C_p - C_V}{C_V} \approx \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2,$$

gdzie ϵ_F jest energią Fermiego.

6. Trójwymiarowa objętość podzielona jest na dwie części ruchomą, lecz sztywną i nieprzepuszczalną adiabatyczną przegrodą. W jednej części znajdują się fermiony o spinie $1/2$, a w drugiej fermiony o spinie $3/2$. W obu przypadkach jednocząstkowa energia wynosi $\epsilon = p^2/2m$, gdzie p jest wartością pędu, a m masą cząstek. Znaleźć stosunek gęstości tych cząstek w stanie równowagi mechanicznej w granicy zerowej temperatury.
7. Elektrony o spinie $1/2$ i masie m są w objętości V w stanie równowagi z temperaturą $T = 0$. Jednocząstkowa relacja dyspersji ma postać $\epsilon = p^2/2m$, gdzie p jest wartością pędu. Nagle objętość układu wzrosła o ΔV , gdzie $\Delta V \ll V$. Energia układu pozostała niezmienną. Jaka jest temperatura układu w nowym stanie równowagi? Porównać wynik z przypadkiem klasycznym.

Literatura

- H.B. Callen, Thermodynamics.
- J. P. Casquilho, P.I.C. Teixeira, Introduction to statistical physics.
- B. Cowan, Topics in Statistical Mechanics.
- K. Huang, Statistical mechanics.
- Ch. Kittel, H. Kroemer, Thermal Physics.
- F. Mandl, Statistical physics.
- F. Reif, Statistical physics.
- F. Schwabl, Statistical mechanics.
- R.H. Swendsen, An introduction to statistical mechanics and thermodynamics.