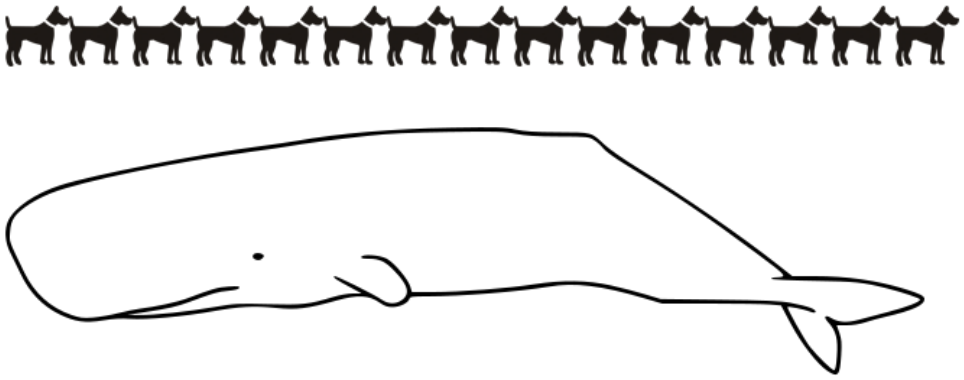
Giovanni Moreno

Matematyka I



Skrypt wykładu. R.A. 2024/25.

WYDZIAŁ FIZYKI
UNIWERSYTET WARSZAWSKI

Wprowadzenie

Niniejszy skrypt powstaje jako opracowanie pierwszych 10 rozdziałów skryptu wykładu „rachunku różniczkowego i całkowego", który prowadziłem przez trzy lata (2018, 2019 oraz 2020), póki został zlikwidowany w 2021 r.

Pewne części (10-15% całego materiału) zostały przeklejone z innych źródeł (Rudin, Leja, Strzelecki, Jacek Wojtkiewicz, Adam Latosiński i inni).

Obecna wersja jest opracowaniem wersji używanych w r.a. 2021/22, 2022/23 oraz 2023/24.

Spis treści

1 Tydzień I: 1. i 4. października 2024 **8**
1.1 Od codziennego do matematycznego rozumowania . . . 8
1.1.1 Potoczny sposób rozumowania . . . 8
1.1.2 Naukowy sposób rozumowania . . . 8
1.1.3 Matematyczny sposób rozumowania . . . 9
1.2 Zdania złożone i twierdzenia . . . 9
1.2.1 Zdania złożone . . . 9
1.2.2 Dowód twierdzenia . . . 10
1.2.3 Stosunek między Matematyką, Nauką i życiem codziennym . . . 11
1.3 Działania (tabelki) logiki . . . 12
1.3.1 Negacja zdania . . . 12
1.3.2 Alternatywa zdań . . . 13
1.3.3 Koniunkja zdań . . . 13
1.3.4 Implikacja zdań . . . 13
1.3.5 Równoważność zdań . . . 14
1.3.6 Medoda algebraiczna . . . 14
1.3.7 Niektóre prawa rachunku zdań . . . 14
1.3.8 Kwantyfikatory . . . 15
1.4 Pułapki przetłumaczenia . . . 16

2 Tydzień II: 8. i 11. października 2024 **17**
2.1 Elementy i zbiory . . . 17
2.1.1 (Nie)definicja pojęcia zbioru i pojęcia elementu . . . 17
2.1.2 Definicja jednego konkretnego zbioru . . . 17
2.2 Relacje i działania między zbiorami . . . 18
2.2.1 Podzbiory . . . 18
2.2.2 Dopełnienie . . . 19
2.2.3 Wspólna część . . . 19
2.2.4 Różnica . . . 19
2.2.5 Suma . . . 19
2.2.6 Zbiór pusty i zbiór wszystkiego . . . 19
2.3 Paradoksy . . . 19
2.4 Zbiór części . . . 20
2.5 Iloczyn kartezjański . . . 20
2.6 Odwzorowania . . . 21
2.6.1 Definicja odwzorowań jako podzbiory $A \times B$ . . . 21
2.6.2 (Przeciw)dziedzina i (przeciw)obraz . . . 21
2.6.3 Różne rodzaje funkcji . . . 22
2.6.4 Złożenie funkcji . . . 22
2.7 Operacje w zbiorach . . . 22
2.7.1 Operacje w S . . . 22
2.7.2 Relacje w S . . . 23
2.7.3 Porządek w S . . . 23
2.7.4 Relacja równoważności w S . . . 23
2.8 Moc zbiorów . . . 24

3 Tydzień III: 15. i 18. października 2024 **24**
3.1 Skąd się biorą liczby? . . . 24
3.1.1 Liczby naturalne . . . 25
3.1.2 Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne . . . 25
3.2 Struktury matematyczne . . . 25
3.2.1 Zbiory uporządkowane . . . 25
3.2.2 Rozszerzenie struktur . . . 26
3.2.3 Przemienność, łączność, rozdzielność, istnienie elementu neutralnego . . . 26

3.2.4 Ciała uporządkowane . . . 27
3.2.5 Własność istnienia kresów dolnych . . . 27
3.3 Jak skonstruować $\mathbb{R}$ na podstawie $\mathbb{N} \setminus \{0\}$? . . . 28
3.3.1 Przejście od $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ do $\mathbb{N}$ . . . 28
3.3.2 Przejście od $\mathbb{N}$ do $\mathbb{Z}$ . . . 28
3.3.3 Przejście od $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Q}$ . . . 29
3.3.4 Przejście od $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{R}$ . . . 29
3.4 Właściwości liczb rzeczywistych . . . 31
3.4.1 Wartość bezwzględna i nierówność trójkątna . . . 31
3.4.2 Rozszerzone liczby rzeczywiste . . . 31
3.4.3 Forme nieoznaczone . . . 32

4 Tydzień IV: 22. i 25. października 2024 **33**
4.1 Trochę geometrii osi liczb rzeczywistych . . . 33
4.1.1 Czym jest geometria? . . . 33
4.1.2 Geometria jednowymiarowego wszechświata . . . 33
4.1.3 Przedziały liczbowe (ograniczone/nieograniczone) i ich oznaczenia . . . 34
4.1.4 Nieprzeliczalność liczb rzeczywistych . . . 35
4.1.5 Archimedesowskość $\mathbb{R}$ . . . 36
4.1.6 Gęstość $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$ . . . 37
4.2 Funkcje rzeczywiste liczb rzeczywistych . . . 38
4.2.1 Potęgi liczb rzeczywistych . . . 38
4.2.2 Pierwiastki nieparzystego stopnia . . . 39
4.2.3 Algebra funkcji . . . 39
4.2.4 Miejsce zerowe, monotoniczność . . . 39
4.2.5 Ograniczoność funkcji . . . 40
4.2.6 Funkcje uwikłane . . . 40
4.2.7 Funkcje wielomianowe . . . 40

5 Tydzień V: 29. października 2024 **40**
5.1 Ciągi i ich granice . . . 40
5.1.1 Przekąska: niejednoznaczność nieskończonej sumy . . . 40
5.1.2 Wyjątek: dobrze określona nieskończona suma . . . 41
5.1.3 Pojęcia zbieżności i granicy . . . 42
5.1.4 Właściwości granic . . . 44
5.1.5 Kryterium ilorazowe . . . 44
5.1.6 Liczby rzeczywiste jako ciągi Cauchy'ego . . . 45
5.1.7 Przybliżenie liczby niewymiernej poprzez ciąg liczb wymiernych . . . 47
5.1.8 Potęgi o rzeczywistych wykładnikach . . . 47
5.2 Funkcje wykładnicze i liczba Nepera . . . 48
5.2.1 Definicja funkcji wykładniczej poprzez prostą styczną . . . 48
5.2.2 Definicja funkcji wykładniczej poprzez granicę ciągu funkcyjnej . . . 48

6 Tydzień VI: 5. i 8. listopada 2024 **52**
6.1 Ciągłość funkcji . . . 52
6.1.1 Definicja ciągłości i granicy . . . 52
6.1.2 Definicja ciągłości w języku otoczeń . . . 53
6.1.3 „Most" między pojęciami granicy ciągu a granicy funkcji . . . 53
6.1.4 Kilka konsekwencji Twierdzenia „mostu" . . . 54
6.1.5 Granice jednostronne . . . 55
6.1.6 Ciągłość jednostajna . . . 56
6.2 Funkcje wymierne . . . 56
6.2.1 Definicja funkcji wymiernej . . . 56
6.2.2 Algorytmy na uproszczenie wielomianów . . . 56
6.2.3 Rozkładanie funkcji wymiernych na ułamki proste . . . 57

7 Tydzień VII: 12. i 15. listopada 2024 **57**
7.1 Funkcje hiperboliczne . . . 57
7.1.1 Logarytm naturalny i sinus hiperboliczny . . . 57
7.1.2 Arcus sinus hiperboliczny . . . 58
7.1.3 Cosinus hiperboliczny . . . 58
7.1.4 Kąt hiperboliczny . . . 59
7.1.5 Tangens i kotangens hiperboliczne i ich odwrotności . . . 60
7.1.6 Własności algebraiczne funkcji hiperbolicznych . . . 60
7.1.7 Podstawienie tangensa hiperbolicznego połowy kąta . . . 61
7.2 Funkcje trygonometryczne . . . 62
7.2.1 Geometryczna definicja funkcji trygonometrycznych . . . 62
7.2.2 Kilka własności funkcji trygonometrycznych . . . 63
7.2.3 Podstawienie tangensa połowy kąta . . . 63
7.2.4 Dygresja 1: odległość euklidesowa w $\mathbb{R}^2$ . . . 63
7.2.5 Dygresja 2: kąt między wektorami w $\mathbb{R}^2$ . . . 64
7.2.6 Geometryczny dowód wzoru na sinus sumy kątów . . . 65

8 Tydzień VIII: 19. i 22. listopada 2024 **66**
8.1 Funkcje pochodne . . . 66
8.1.1 Pochodna funkcji w punkcie . . . 66
8.1.2 Różniczkowalność funkcji . . . 66
8.1.3 Prosta styczna do wykresu funkcji . . . 66
8.1.4 Właściwości funkcji pochodnej . . . 67
8.1.5 Pochodne wielomianów . . . 69
8.1.6 Pochodne funkcji innych od wielomianów . . . 69
8.2 Twierdzenie Weierstrassa . . . 73
8.3 Twierdzenie Lagrange'a . . . 75
8.4 Reguły de l'Hospitala . . . 77
8.5 „Patologiczny" przykład różniczkowalności . . . 78

9 Tydzień IX: 26. i 29.listopada 2024 **80**
9.1 Pochodne wyższego rzędu . . . 80
9.1.1 Eksperyment: dokończenie trasy kolejowej . . . 80
9.1.2 Funkcje klasy $\mathcal{C}^1$ . . . 81
9.1.3 Pochodna pochodnej, czyli druga pochodna . . . 82
9.1.4 Wyższe pochodne i funkcje klasy $\mathcal{C}^n$ . . . 82
9.1.5 Funkcje gładkie, czyli klasy $\mathcal{C}^\infty$ . . . 83
9.2 Rozwinięcie szeregu Taylora . . . 83
9.2.1 Główne Twierdzenie . . . 83
9.2.2 Pojęcie reszty/poprawki . . . 85
9.2.3 Zastosowanie: przybliżenie numeryczne liczby π . . . 86
9.3 Wyznaczenie ekstremów funkcji . . . 88

10 Tydzień X: 3. i 6. grudnia 2024 **90**
10.1 Narzędzia do badania przebiegu funkcji . . . 90
10.1.1 Twierdzenia o wypukłości i wklęsłości . . . 90
10.1.2 Asymptoty poziome . . . 93
10.1.3 Asymptoty pionowe . . . 94
10.1.4 Asymptoty ukośne . . . 95
10.1.5 Przebieg pochodnej przy asymptotach poziomych/ukośnych . . . 96
10.1.6 Przebieg pochodnej przy asymptotach pionowych . . . 97
10.1.7 Badanie przebiegu funkcji: łatwy przykład . . . 98
10.1.8 Badanie przebiegu funkcji: trudny przykład . . . 99

11 Tydzień XI: 10. i 13. grudnia 2024 **101**
11.1 Funkcja pierwotna . . . 101
11.1.1 Definicja jako rozwiązanie równania różniczkowego . . . 101
11.1.2 Idea konstrukcji jednej funkcji pierwotnej . . . 102
11.1.3 1. problem: istnieją figury bez pola powierzchni . . . 103
11.1.4 2. problem: trzeba odwrócić logikę rozumowania . . . 104
11.1.5 Przykład potwierdzający słuszność naszego kandydata . . . 104
11.1.6 Przykład pokazujący użyteczność funkcji pierwotnej w fizyce . . . 105
11.1.7 Funkcja pierwotna jako całka nieoznaczona . . . 106
11.1.8 Tajemnica duchów zmarłych ilości . . . 107
11.1.9 Własności funkcji pierwotnych . . . 108
11.1.10 Podstawowe przykłady funkcji pierwotnych . . . 108
11.1.11 Całkowanie przez podstawienie . . . 109
11.2 Całka oznaczona . . . 110
11.3 Eksperyment: nawigacja inercyjna . . . 112

12 Tydzień XII: 17. i 20. grudnia 2024 **115**
12.1 Całkowanie funkcji wymiernych . . . 115
12.1.1 Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju . . . 115
12.1.2 Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju . . . 116
12.1.3 Całkowanie dowolnej funkcji wymiernej . . . 117
12.1.4 Przykład ze „sztucznym błędem” znaku . . . 118
12.1.5 Przykład ze wstępnym dzieleniem wielomianów . . . 119
12.1.6 Przykład z wielomianem bez pierwiastków . . . 120
12.2 Całkowanie funkcji wymiernych złożonych z innymi funkcjami . . . 121
12.2.1 Funkcje wymierne funkcji $\sin^2(x)$, $\cos^2(x)$ oraz $\sin(x)\cos(x)$ . . . 121
12.2.2 Funkcje wymierne sinusów i cosinusów . . . 122
12.2.3 Funkcje wymierne x–ów i $\sqrt{1-x^2}$ . . . 122
12.2.4 Funkcje wymierne x–ów i $\sqrt{x^2+a}$, $a>0$ . . . 123
12.2.5 Funkcje wymierne funkcji $e^{\alpha x}$ . . . 125
12.3 Całkowanie innych szczególnych przypadków funkcji niewymiernych . . . 125
12.3.1 Całkowanie funkcji postaci $W(x)e^{-\lambda x}$, $W(x)\sin(x)$ oraz $W(x)\cos(x)$ . . . 125
12.3.2 Całkowanie funkcji trygonometrycznych z funkcją wykładniczą . . . 127
12.3.3 Całkowanie funkcji trygonometrycznych z wielomianami i funkcją wykładniczą 128
12.3.4 Całkowanie przez podstawienie Eulera . . . 128
12.3.5 Inne całki zawierające pierwiastki . . . 130

13 Tydzień XIII: 7. i 10. stycznia 2025 **131**
13.1 Twierdzenie Podstawowe Rachunku Różniczkowego i Całkowego . . . 131
13.1.1 Pole powierzchni (ze znakiem) pod wykresem funkcji . . . 131
13.1.2 Całkowalność w sensie Riemmana w ramach teorii miary . . . 133
13.1.3 Całkowalność w sensie Riemanna bez teorii miary . . . 134
13.1.4 Sformułowanie Twierdzenia Podstawowego Rachunku Różniczkowego i Całkowego 136
13.1.5 Pierwsza części dowodu Twierdzenia Podstawowego . . . 136
13.1.6 Strategia zakończenia dowodu Twierdzenia Podstawowego . . . 137
13.1.7 Druga część dowodu Twierdzenia Podstawowego . . . 138
13.1.8 Trzecia i ostatnia część dowodu Twierdzenia Podstawowego . . . 139
13.1.9 Przykład nieciągłej funkcji całkowalnej w sensie Riemanna . . . 140
13.1.10 Zastosowanie całki Riemanna: Wzór Wallisa na π . . . 142
13.1.11 Zastosowanie całki Riemanna: Wzór Stirlinga na $\ln(n!)$ . . . 144

14 Tydzień XIV: 14. i 17. stycznia 2025 **145**
14.1 Całki niewłaściwe . . . 145
14.1.1 Czy nieograniczona figura może mieć skończone pole powierzchni? . . . 145
14.1.2 Definicja całki niewłaściwej . . . 146
14.1.3 Kryterium zbieżności Cauchy’ego . . . 149

14.1.4 Zbieżność bezwzględna i warunkowa . . . 150
14.1.5 Kryteria zbieżności porównawcze . . . 150
14.1.6 Funkcja gamma Eulera . . . 153
14.1.7 Przybliżenie Stirlinga liczb $n!$ . . . 154
14.2 Długość krzywych . . . 156

15 Tydzień XV: 21. i 24. stycznia 2025 **159**
15.1 Szeregi liczbowe i ich (roz)bieżność . . . 159
15.1.1 Jak zsumować nieskończenie wiele liczb? . . . 159
15.1.2 Definicja suma szeregu jako granica sum częściowych . . . 160
15.1.3 Dwa przykłady odniesienia . . . 161
15.1.4 Warunek konieczny na zbieżność . . . 161
15.1.5 Zbieżność bezwzględna i warunkowa . . . 161
15.1.6 Szeregi o wyrazach nieujemnych . . . 162
15.1.7 Kryterium porównawcze . . . 162
15.1.8 Kryterium Cauchy'ego o zagęszczeniu i kryterium całkowe . . . 163
15.1.9 Kryterium porównawcze – wersja infinitezymalna . . . 164
15.1.10 Granica dolna i górna . . . 165
15.1.11 Kryterium Cauchy'ego . . . 166
15.1.12 Kryterium d'Alamberta . . . 167
15.1.13 Kryteria Dirichleta i Leibniza . . . 168
15.2 Szeregi potęgowe i ich (ro)zbieżność . . . 169
15.2.1 Definicja szeregu potęgowego i jego promieniu zbieżności . . . 169
15.2.2 Zbieżność punktowa oraz jednostajna . . . 170
15.2.3 Różniczkowanie szeregów potęgowych . . . 172

1 Tydzień I: 1. i 4. października 2024

1.1 Od codziennego do matematycznego rozumowania

1.1.1 Potoczny sposób rozumowania

Wyobraźmy sobie następującą sytuację:

> A mówią do B: „My mamy rację – a wy jesteście stadem idiotów."
>
> B mówią do A: „My mamy rację – a wy jesteście stadem idiotów."

Taka sytuacja, pomnażana miliardy razy, opisuje historię ludzkości.[1] Charakteryzuje ją:

- powolny postęp;
- zapętlanie się;
- nuda.

Niemniej jednak, teraz lądujemy na księżycu (a za chwilę na Marsie), podczas gdy jeszcze niedawno jeździliśmy na koniach: taki postęp zawdzięczamy nauce.

1.1.2 Naukowy sposób rozumowania

Obowiązuje tu następująca zasada:

> *Teoria nie może zostać potwierdzona – może tylko zostać zaprzeczona.*
>
> Karl Popper (1902–1994)

Zilustrujmy tę zasadę poprzez trzy przykłady:

Przykład 1.1. W następującej (urojonej) rozmowie:

> A mówi: „Planety krążą wokół Ziemi po okręgach."
>
> B mówi: „Planety (łącznie z Ziemią) krążą wokół Słońca wzdłuż elips o stałych osiach."
>
> C mówi: „Oś orbity Merkurego powoli obraca się."

rozpoznamy (uproszczone) teorie Ptolemeusza (100–168), Keplera (1571–1630) oraz Einsteina (1879–1955): panowie nie mieli okazji spotykać się osobiście (i się kłócić); niemniej jednak my, możemy teraz zadać pytanie kto miał rację?

Otóż odpowiedź brzmi: ludzie nie są w stanie rozstrzygnąć, kto ma rację – ale:

- między Ptolemeuszem i Keplerem teoria A była uznana za prawdziwą;
- dzięki Keplerowi teoria A została zaprzeczona;
- po Keplerze, ale przed Einsteinem, teoria B była uznana za prawdziwą;
- dzięki Einsteinowi teoria B została zaprzeczona;
- po Einsteinie, do tej pory, teoria C jest uznana za prawdziwą.

Jak widać, w nauce coś się rusza – jest w niej ciągły, wieczny postęp.

[1] Na płaszczyźnie psychologicznej, ludzkość jest taka sama teraz, jaka była 5.000 lat temu i jaka będzie za kolejne 5.000 lat (chyba że spadnie kolejny meteoryt i zrobi z nami porządek jak to było z dinozaurami).

Przykład 1.2. Z historii (nauce o przeszłości) przejdźmy do futurologii (nauce o przyszłości):

> Darwin (1809–1882) powiedział: „Człowiek pochodzi od małpy."

Wszyscy (prawie) dzisiaj uważają tę teorię za prawdziwą – niemniej jednak można sobie wyobrazić wizytę obcych z planety Nubiru w roku 2.345, którzy będą głosić:

> „Ziemia, wraz ze skamielinami, została stworzona przez nasze dzieci 5.000 lat temu w ramach wycieczki edukacyjnej: popatrzcie na te zdjęcia!"

Co zaprzeczyłoby teorii ewolucji. Ale – kto wie – w roku 3.456 mogliby zwiedzać Ziemię obcy z galaktyki Andromedy i nas poinformować, że:

> „Całą Drogę Mleczną, wraz z pamięciami jej mieszkańców, stworzyliśmy dwa dni temu w czasie gry planszowej."

Zarówno w nauce, jak i w fantastyce naukowej, postęp nigdy nie się skończy.

Przykład 1.3. Trzecioroczny student będzie musiał obronić się – dlaczego tak się mówi? Ponieważ kandydat przedstawia swoją tezę komisji, a komisja stara się jej zaprzeczyć. Jeśli komisji nie uda się zaprzeczyć tezie, to kandydat dostaje dyplom – ale to nie znaczy, że jego teza jest prawdziwa, tylko że „wygrał z komisją", tj. „obronił się".

Osoba, która uprawia naukę, musi żyć ze świadomością, że nawet najpiękniejsza teoria, prędzej czy później, zostanie zaprzeczona – innymi słowy: nie ma nigdy pewności. Ludziom, którzy nie potrafią znieść tej sytuacji, proponujemy **Matematykę**, ponieważ matematyka ma zawsze rację.

1.1.3 Matematyczny sposób rozumowania

Zanim zilustrujemy, co znaczy dokładnie „mieć zawsze rację", trzeba ustalić – raz na zawsze – że oprócz „mieć rację"i „nie mieć racji"nie ma innych możliwości.

Zasada 1.1 (Arystoteles (384–322 p.n.e.))**.** *Dane zdanie może być albo prawdziwe albo fałszywe i nie ma trzeciej możliwości (łac. tertium non datur).*

Zawód Matematyka polega na produkcji tzw. **twierdzeń**; twierdzenie jest zdaniem, które jest **zawsze prawdziwe**. Z kolei, inne nauki ściśle opierają się na matematycznych twierdzeniach, aby formułować teorie o naszym wszechświecie.

Ale, jeśli matematycy „zawsze mają rację", dlaczego nie ma kłótni, jak w przypadku potocznego rozumowania przedstawionym w Sekcji 1.1.1? Popatrzmy na następującą rozmowę między matematykiem (M) i jego żoną (Ż):

> Ż: „Nie wiem, czy jutro wyjdę z parasolem czy nie – co myślisz?"
>
> M: „Ja myślę, że albo jutro będzie padać, albo jutro nie będzie padać."
>
> Ż (cicho): „Boże, z kim ja się ożeniłam!"

Widać teraz, że matematyk zawsze ma rację – szkoda, że jego zdanie jest totalnie bezużyteczne. W życiu codziennym zdanie w czerwonym nazywamy „głupotą" – w matematyce **twierdzeniem**.

1.2 Zdania złożone i twierdzenia

1.2.1 Zdania złożone

Lepiej też rozumie się znaczenie wyrażenia „zawsze prawdziwe": zdanie

$P :=$ „albo jutro będzie padać, albo jutro nie będzie padać"

jest zawsze prawdziwe, niezależnie od pogody. Trzeba jednak być bardziej precyzyjni:

> Zdanie P jest **zdaniem złożonym**, tj. zdaniem składającym się z innych zdań; pierwsze możemy nazywać „zewnętrzne, główne, zależne" – a drugie „wewnętrzne, pomocnicze, niezależne".

Uwaga 1.1. W literaturze zazwyczaj mówi się „funkcja zdaniowa"(ang.: *propositional function*); wykładowca woli określenie „zdanie złożone"ponieważ podkreśla ono to, że zdanie składa się z innych zdań.

W naszym przypadku, zdaniem wewnętrzne jest

$Q :=$ „jutro będzie padać".

Piszemy wtedy

$$P = P(Q) := Q \vee \overline{Q} \tag{1}$$

i czytamy: P jest zdaniem, które zależy od Q, zdefiniowane jako „Q jest prawdziwe lub zaprzeczenie Q jest prawdziwe".

Wtedy powyższa rozmowa jest tylko przykładem ogólniejszego twierdzenia:

Twierdzenie 1.1 (Prawo wyłączonego środka)**.** *Zdanie $Q \vee \overline{Q}$ jest prawdziwe, dla każdego zdania Q.*

Jak to **udowodnić**?

Dowód. Niech Q będzie dowolnym zdaniem. Zasada Arystotelesa mówi nam, że Q może być lub prawdziwe, lub fałszywe. Załóżmy, że Q jest prawdziwe: wówczas zdanie $Q \vee \overline{Q}$ jest prawdziwe ponieważ Q jest prawdziwe. Załóżmy teraz, że Q jest fałszywe: wówczas jego zaprzeczenie $\overline{Q}$ jest prawdziwe i zdanie $Q \vee \overline{Q}$ jest prawdziwe ponieważ $\overline{Q}$ jest prawdziwe. Skoro nie ma innych możliwości, dowód dobiegł końca. □

1.2.2 Dowód twierdzenia

Na ogół, jeśli treść twierdzenia ma postać

Twierdzenie 1.2. *Twierdzę, że $P = P(Q)$ jest zawsze prawdziwe.*

Mówimy, że **twierdzenie zachodzi**, jeśli $P = P(Q)$ jest prawdziwe dla wszystkich Q. Mówimy, że **nie zachodzi**, jeśli $P = P(Q)$ jest prawdziwe dla niektórych Q i jest fałszywe dla innych Q. A mówimy **jest sprzeczne**, jeśli $P = P(Q)$ jest fałszywe dla wszystkich Q.

> Teoretycznie, aby udowodnić podane twierdzenie „wystarczy" podstawić wszystkie możliwe wartości logiczne na miejscu zdań wewnętrznych i sprawdzić, za pomocą **działań logiki**, że wychodzi nam coś, co niewątpliwie musi być prawdziwe, jak np. „Q jest prawdziwe, ponieważ Q jest prawdziwe".[a]
>
> [a] Coś takiego nazywa się **tautologią** (po starogrecku „mówić to samo") i oznacza zdania zawsze prawdziwe - np. „jestem radosny, ponieważ jestem radosny"; „Mam zawsze rację i nigdy się nie zdarza, że nie mam racji"; „nie ma więcej przykładów, bo nie ma więcej przykładów".

Udowadnianie twierdzenia jest wtedy podobne do rozwiązywania równania, w którym chcemy otrzymać coś w rodzaju $0 = 0$ za pomocą **działań algebraicznych**.

Udowadniając twierdzenia, często korzystamy (mówimy też: **zastosowujemy**) z innych (już udowodnionych) twierdzeń lub **definicji**.

Twierdzenie 1.3. *Wielokrotności 6 to liczby piękne i liczby brzydkie.*

Czy takie twierdzenie można udowodnić? Bez dodatkowych informacji to niemożliwe, ponieważ brakuje nam definicji czym jest liczba piękna, a czym brzydka.

Definicja 1.1. *Liczba n jest piękna, jeśli n jest podzielna przez 2.*

Definicja 1.2. *Liczba n jest brzydka, jeśli n jest podzielna przez 3.*

Zauważmy, że tekstu definicji, w przeciwieństwie do tekstu twierdzenia, nie można udowodnić. To raczej dogmat. Definicja jest „sztuczną tautologią", czyli my ustalamy, że jest ona prawdziwa.

Aby udowodnić Twierdzenie 1.3, wystarczy podstawiać do niego definicje tak by otrzymać tautologię.

Zauważmy, że nawet jeśli tekst Twierdzenia 1.3, brzmi sprzecznie (w życiu codziennym, coś nie może być jednocześnie pięknie i brzydkie), jest jednak prawdziwe, ponieważ, po powyższych definicjach, przymiotniki „piękny" i „brzydki" straciły swoje codzienne znaczenie.

Zarówno twierdzenia i definicje są zasadniczo bardzo ogólne: ich poszczególne przypadki nazywają się **przykładami**.

Przykład 1.4. 4 jest przykładem liczby pięknej; 9 jest przykładem liczby brzydkiej; 6 jest przykładem liczby i pięknej i brzydkiej.

Matematyka jest muzyką – muzyką składającą się z trzech nut: definicji, twierdzeń, przykładów.



1.2.3 Stosunek między Matematyką, Nauką i życiem codziennym

Jak uzupełnić zdanie

> „Jeśli jutro wygram loterię to..."

w taki sposób, żeby było zawsze prawdziwe? Potocznie powiedzielibyśmy:

> „Jeśli jutro wygram loterię to kupię sobie ogromny jacht."

Matematycy, z drugiej strony, powiedzieliby:

> „Jeśli jutro wygram loterię, to jutro wygram loterię."

To pokazuje rozbieg między potocznym i matematycznym sposobem rozumowania.

Jeśli teraz **naukowiec** mówi:

> T: „nie istnieje dinozaur o długości większej niż 100 metrów."

To teoria T może zostać zaprzeczona tylko przez odkrycie ponad 100–metrowego dinozaura (dokonanego przez **paleontologa**). Niemniej jednak **matematyk** mógłby udowodnić, że teoria T jest prawdziwa:

> Zakładając, że żołądek dinozaura wygląda jak sfera, a jego przełyk jak rura, to wtedy można udowodnić, że czas jedzenia rośnie proporcjonalnie do wymiarów dinozaura; w szczególności, dinozaur o długości ≥ 100 metrów, potrzebowałby więcej niż doba, aby coś zjeść, więc nie może istnieć. Koniec dowodu.

Świetny dowód, ale dlaczego paleontolog zaprzeczył naszemu naukowcowi, skoro matematyk udowodnił, że teoria T jest prawdziwa? Gdzie jest pułapka? Pułapka kryje się w tym, że matematyk udowodnił:

„jeśli zdanie Z jest prawdziwe, to zdanie T też jest prawdziwe”,

gdzie **założenia** zdania Z brzmią: „żołądek dinozaura wygląda jak sfera, a jego przełyk jak rura.”

Już nie ma żadnego konfliktu: naukowiec ogłasza absolutną prawdę T – która jako taka może zostać zaprzeczona – podczas gdy matematyk ogłasza **prawdę warunkową** i potrafi nawet ją **udowodnić**. Inaczej mówiąc:

Nauka, inspirowana matematycznymi twierdzeniami, też ma zawsze rację… pod warunkiem, że założenia są spełnione – a w rzeczywistości nigdy nie są!

Rozumowanie

„jeśli zdanie Z jest prawdziwe, to zdanie T również jest prawdziwe”

jest prawdziwie naukowym rozumowaniem i w widać wnim najpotężniejsze działanie logiczne: **implikację**.

Ale czego tak naprawdę dowodzi powyższe Twierdzenie? Następująca tabelka:

możliwość:	żyjemy w świecie, w którym:
a)	dinozaury wyglądają jak dinozaury i teoria T jest prawdziwa;
b)	dinozaury wyglądają jak dinozaury i teoria T jest fałszywa;
c)	dinozaury wyglądają jak butelki i teoria T jest prawdziwa;
d)	dinozaury wyglądają jak butelki i teoria T jest fałszywa.

przedstawia wszystkie możliwości, w jakie mógłby wyglądać nasz świat. Otóż paleontolog, wykopawszy w pocie czoła kości, udowodnił, że jesteśmy w świecie b) – matematyk, wygodnie siedząc na fotelu, że nie żyjemy w świecie d).

W tabelce odnajdziemy znaczenie zasady Poppera: aby udowodnić, że teoria T jest prawdziwa, powinniśmy dosłownie rozkopać całą planetę, aby pokazać, że żaden szkielet nie jest dłuższy od 100 metrów… i więcej: przecież po spadku meteorytu niektóre dinozaury mogły wyemigrować do innej planety, wobec tego tam też trzeba by było szukać!

W tabelce widać także skąd się bierze przysłowiowy „niesmak” wobec matematyki, który z kolei wiąże się z oskarżeniem o bycie zbyt abstrakcyjną: matematyczna teoria jest perfekcyjna, ale nie dotyczy rzeczywistości, ponieważ **dinozaury nie wyglądają jak butelki**!

1.3 Działania (tabelki) logiki

Podobnie, jak zwykły rachunek (arytmetyczny) pozwala nam konstruować nowe (bardziej skomplikowane) wyrażenia na podstawie podanych (prostszych) wyrażeń lub, na odwrót, upraszczać podane trudne wyrażenia, istnieje tzw. **rachunek logiczny** (lub **rachunek zdań**), który pozwala nam konstruować nasze własne twierdzenia lub udowadniać podane przez osoby trzecie twierdzenia.

W arytmetyce (tak i w algebrze) mamy **działania (operacje)** jednoargumentowe, dwuargumentowe, trójargumentowe, itd. Analogiczne podział odnajdziemy w logice.

1.3.1 Negacja zdania

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

(2)

Przykład 1.5. Niech $p =$ „logika jest nudna”. To $\overline{p} =$ „logika nie jest nudna”. Wtedy: jeśli to nie prawda, że „logika jest nudna”, to znaczy, że to prawda, że „logika nie jest nudna”. To odpowiada pierwszemu wierszu powyżej tabelki. Ale: jeśli to prawda, że „logika jest nudna”, to znaczy, że to nie prawda, że „logika nie jest nudna”. To drugi wiersz.

1.3.2 Alternatywa zdań

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(3)

Przykład 1.6. Niech p = „logika jest nudna” i q = „piłka nożna jest ekscytująca”. Zakładamy, że $p = q = 0$. To znaczy, że logika nie jest nudna i piłka nożna nie jest ekscytująca. Pytanie: czy zdanie „logika jest nudna lub piłka nożna jest ekscytująca” jest prawdziwe? Nie! Ponieważ logika nie jest nudna i piłka nożna nie jest ekscytująca. To odpowiada pierwszemu wierszu powyżej tabelki. Załóżmy teraz, że $p = 0$ i $q = 1$. To znaczy, że logika nie jest nudna ale piłka nożna nie jest ekscytująca. Pytanie: czy zdanie „logika jest nudna lub piłka nożna jest ekscytująca” jest prawdziwe? Tak. To odpowiada drugiemu wierszu. Itd.

1.3.3 Koniunkja zdań

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(4)

Przykład 1.7. Niech p i q będą jak w Przykładzie 1.6. Widać teraz, że zdanie „logika jest nudna i piłka nożna jest ekscytująca” jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy obydwa zdania „logika jest nudna” i „piłka nożna jest ekscytująca” są prawdziwe. Innymi słowy, wtedy i tylko wtedy gdy i p i q równają się 1.

1.3.4 Implikacja zdań

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

(5)

Przykład 1.8. Niech p= „student jest zdolny” i q = „wykładowca da mu piątkę”. To implikacja $p \Rightarrow q$ brzmi w ten sposób: „jeśli student jest zdolny, to wykładowca da mu piątkę”. Brzmi jak obietnica. Z tego punktu widzenia, implikacja $p \Rightarrow q$ osiąga wartość 1, jeśli obietnica jest dotrzymana, a wartość 0, jeśli obietnica jest złamana. Załóżmy, że $p = q = 0$, tzn., że „student nie jest zdolny” i „wykładowca nie dał mu piątki”. Pytanie: czy obietnica została złamana? Nie! Ponieważ warunek obietnicy nie był spełniony. Z tego wynika, że wartość implikacji $p \Rightarrow q$ nie może być 0, lecz musi być 1. To pierwszy wiersz. Załóżmy teraz, że $p = 0$ a $q = 1$, innymi słowy, że „jeśli nawet student nie był zdolny, to i tak wykładowca dał mu piątkę”. To znaczy, że wykładowca był miłosierny i dotrzymał swojej obietnicy, jeśli nawet jej warunek nie był spełniony. Jeszcze raz, wartość implikacji $p \Rightarrow q$ wynosi 1. To drugi wierz. Załóżmy teraz, że wykładowca jest okropny: „jeśli nawet student był zdolny, a ten nie dał mu piątki”. Złamał on obietnicę, i wartość implikacji $p \Rightarrow q$ wynosi 0. To trzeci wierz. Najbardziej naturalna sytuacja, jaka też będzie pojawiała się w obecnym kursie, to kiedy wykładowca daje studentowi piątkę, ponieważ student na nią zasłużył. To ostatni wierz.

Memotechnika 1.1. Zdanie $p \Rightarrow q$ jest fałszywe o ile tylko wartość q jest (ściśle) mniejsze niż wartość p.

1.3.5 Równoważność zdań

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(6)

Przykład 1.9. Niech p i q będą jakie w przykładzie 1.8. To równoważność brzmi jak podwójna implikacja: „jeśli student jest zdolny, to wykładowca da mu piątkę" a jednocześnie „jeśli student dostał piątkę, to znaczy, że był zdolny". Zwykle się pisze: „wykładowca daje piątkę studentowi, wtedy i tylko wtedy gdy student jest zdolny". Formuła „wtedy i tyko wtedy" służy, aby zapobiegać przypadkom charytatywnym.

Memotechnika 1.2. Zdanie $p \Leftrightarrow q$ jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy obydwa p i q osiągają tą samą wartość .

1.3.6 Medoda algebraiczna

Jeśli podstawimy wartości algebraiczne 0 i 1 w miejsca wartości „nieprawda"i „prawda", odpowiednio, łatwo się przekonać, że powyższe tabelki można przepisać jako wyrażenia algebraiczne:

zdanie	wartość algebraiczna
$\overline{p}$	$1-p$
$p \wedge q$	pq
$p \vee q$	$p+q-pq$
$p \Rightarrow q$	$1-p+pq$

(7)

Przykład 1.10. Znajdźmy wyrażenie algebraiczne równoważności $p \Leftrightarrow q$. Wiemy, że $p \Leftrightarrow q$ to to samo jak $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Wyrażenia algebraiczne zdań $p \Rightarrow q$ i $q \Rightarrow p$ to $1-p+pq$ i $1-q+qp$, odpowiednio. Pozostało je pomnożyć: $(1-p+pq)(1-q+qp) = 1-p-q+3pq-p^2q-pq^2+p^2q^2$, co wynosi $1-p-q+2pq = 1-(p-q)^2$, ponieważ różnica $p(p-1)q(q-1)$ zawsze wynosi zero. Przepisując wyrażenie algebraiczne $1-(p-q)^2$ w postaci tabelki, otrzymamy tabelkę równoważności $p \Leftrightarrow q$.

1.3.7 Niektóre prawa rachunku zdań

1. Prawo podwójnego przeczenia: $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$.
2. Prawa de Morgana:
   (a) Prawo zaprzeczenia koniunkcji: $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\overline{p}) \vee (\overline{q})$.

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$(\overline{p}) \vee (\overline{q})$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

   (b) Prawo zaprzeczenia alternatywy: $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\overline{p}) \wedge (\overline{q})$.
3. Prawo zaprzeczenia implikacji: $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$.
4. Prawo transpozycji: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$.
5. Prawa łączności:
   (a) Łączność koniunkcji: $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$
   (b) Łączność alternatywy: $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$
6. Prawa rozdzielności:
   (a) koniunkcji względem alternatywy: $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

(b) alternatywy względem koniunkcji: $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

Przykład 1.11 (**Inna definicja implikacji**). Z prawa zaprzeczenia implikacji zachodzi:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{p} \vee q\,,$$

które się czyta: „implikacja $p \Rightarrow q$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy: lub p jest fałszywe, lub q jest prawdziwe."

Przykład 1.12 (**Dowód nie wprost**). Prawo transpozycji pozwala nam przeformułować $p \Rightarrow q$ jako $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ a może się okazać, że drugie zdanie łatwiej daje się udowodnić. Na przykład, niech p będzie **podstawowym twierdzeniem arytmetyki**: „każdą liczbę naturalną większą od 1, niebędącą liczbą pierwszą, można jednoznacznie przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych", a q :=„istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych". Zamiast udowodnić bezpośrednio $p \Rightarrow q$ o wiele łatwiej udowodnić $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$, a mianowicie, że jeśli istnieje skończenie wiele liczb pierwszych, to podstawowe twierdzenie arytmetyki nie zachodzi. Istotnie, liczba $n + 1$, gdzie

$$n := 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot \text{ostatnia liczba pierwsza}\,,$$

nie może być pierwsza, będąca ściśle większa od ostatniej liczby pierwszej; z drugiej strony, $n + 1$ nie jest parzysta, nie jest wielokrotnością ani 3, ani 5, ani żadnej liczby pierwszej, wobec tego podstawowe twierdzenie arytmetyki na niej nie działa (znaleźliśmy tzw. **przeciwprzykład/kontrprzykład**).

Powyższy dowód zawdzięczamy Euklidesowi z Aleksandrii (ok. 365 – 270 r. p.n.e.).

Uwaga 1.2. Nie zachodzi łączność implikacji! Na przykład, niech p i q będą jak w Przykładzie 1.8, przy czym r :=„Pan rektor daje wykładowcy nagrodę dydaktyczną". Wówczas nie wolno pisać

$$p \Rightarrow q \Rightarrow r$$

ponieważ

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \tag{8}$$

ma inne znaczenie niż

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\,. \tag{9}$$

Istotnie, (8) brzmi „jeśli wykładowca dotrzymuje swoją obietnicę ze studentami, to tak i Pan rektor dotrzymuje swoją z nim" – natomiast (9) brzmi „jeśli student jest zdolny, to obietnica Pana rektora, polegająca na tym, że wykładowca dostaje nagrodę jeśli podał piątkę studentowi, nie jest złamana". Rozważmy wtedy przypadek $p = 0$, $q = 0$ i $r = 0$. W pierwszym przypadku (8) wykładowca dotrzymał swoją obietnicę, ale Pan rektor nie, wobec tego główna implikacja nie zachodzi. W drugim przypadku (9), student nie był zdolny ale obietnica Pana rektora nie została złamana, wobec tego główna implikacja zachodzi.

W notacji algebraicznej:

$$\begin{aligned} (p \Rightarrow q) \Rightarrow r &: p - pq + (1 - p + pq)r\,, \\ p \Rightarrow (q \Rightarrow r) &: 1 + pq(-1 + r)\,. \end{aligned}$$

Różnica powyższych wyrażeń widocznie nie zależy od r:

$$(1 - p)(r - 1)$$

i jest różna od zera wtedy i tylko wtedy gdy tak i p, jak i r, zeruje się. Wówczas, oprócz powyżej wspomnianego przypadku, (8) odróżnia się od (9) tak i w przypadku $p = 0$, $q = 1$ i $r = 0$.

1.3.8 Kwantyfikatory

- Dla każdego x zachodzi $\phi(x)$: $\underset{x}{\forall}\ \phi(x)$
- Istnieje taki x, że zachodzi $\psi(x)$: $\underset{x}{\exists}\ \psi(x)$

Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów:

- $\overline{\underset{x\in X}{\forall}\,\phi(x)} \Leftrightarrow \exists_{x\in X}\,\overline{\phi(x)}$
- $\overline{\underset{x}{\exists}\,\psi(x)} \Leftrightarrow \forall_{x\in X}\,\overline{\psi(x)}$

Przykład 1.13. Powiedzieć, że „nieprawda, że wszystkie liczby naturalne są parzyste" jest tym samym, co powiedzieć, że „istnieje taka liczba naturalna, która jest nieparzysta".

Przykład 1.14. W dowodzie z sekcji 1.2.3 przyjęto zasadę, że:

$$J: \quad \forall \text{ zwierzęcia } z \quad t(z) \leq 24\text{h}\,,$$

gdzie $t(z)$ oznacza czas zjedzenia dla zwierzęcia z. Udowodniono, że $Z \wedge \overline{T}$ nie może być prawdziwe, ponieważ w takim razie istniałoby zwierzę z_0, takie, że $t(z_0) > 24\text{h}$, tj.

$$\overline{J}: \quad \exists \text{ zwierzę } z_0 \quad t(z_0) > 24\text{h}\,,$$

wobec tego mamy sprzeczność $J \wedge \overline{J} = 1$.

1.4 Pułapki przetłumaczenia

Mieszkańcy planety Wolkan mówią codziennie w języku logicznym, ale my zwykli Ziemianie mówimy w elastyczniejszych językach, w związku z tym mogą powstać się typowe kłopoty przechodząc z jednego potocznego języka do logicznego. „Typowy" odnosi się tu temu, że nie ma jednoznacznie zdefiniowanej metody przetłumaczenia: jedno przetłumaczenie może być lepsze niż inne, ale nie ma czegoś takiego, jak „doskonałe tłumaczenie". Następujący przykład jest wzięty od jednego z poprzednich kolokwiów.

Rozważywszy następujące zdania:

A: „Adam przyjdzie na imprezę'',

B: „Bartek przyjdzie na imprezę'',

C: „Cezary przyjdzie na imprezę'',

rozpisać za pomocą symbolów logicznych zdanie:

P: „Cezary przyjdzie na imprezę, pod warunkiem, że Adam i Bartek nie przyjdą.".

Otóż najczęściej dawana odpowiedź przez studentów jest pierwsza, natomiast druga jest rozważana za poprawną przez prowadzących:

$$(\overline{A} \wedge \overline{B}) \quad \Rightarrow \quad C\,, \tag{10}$$
$$C \quad \Rightarrow \quad (\overline{A} \wedge \overline{B})\,. \tag{11}$$

Skoro chodzi to o kwestię przetłumaczenia, nie można odrzucać żadnej możliwości, o ile tylko jest ona uzasadniona. Po kolej, aby stworzyć jakiekolwiek uzasadnienie, **trzeba używać swojej wyobraźni**, aby rozszerzyć zadanie P, tj. opisywać konkretną sytuację odpowiadającą zaleceniu P, n.p.:

Ja, organizator imprezy, uważam, że nie ma ani Adama, ani Bartka, wobec tego zadzwonię do Cezarego: „Hej, czy wiesz, że nie ma ani jednego, ani drugiego? Dlaczego nie przyjdziesz?" A on odpowiada: „Ok, daj mi się zastanawiać, chyba przyjdę, chyba nie".

Widać, że taka rozmowa jest zupełnie rozsądna w prawdziwiej sytuacji; kolejna, z drugiej strony, chociaż możliwa, brzy trochę „policyjna":

*[...] że nie ma ani jednego, ani drugiego? **Teraz musisz przyjść!**" A on, sprawiedliwie, buntuje: „Dlaczego muszę, mi nie się chce!".*

W obydwóch rozmowach „warunek"$\overline{A} \wedge \overline{B}$ przybiera wartość 1. W pierwszej rozmowie, Cezary wyraża dwie możliwości, dopowiadające wartościom 1 i 0 zdania C: widać wtedy, że takie kombinacje wartości nie są kompatybilne z odpowiedzią (10), podczas gdy są zgodne z odpowiedzią (11). Natomiast, druga rozmowa, odpowiada odpowiedzią (10).

Widać wtedy, że najbardziej intuicyjna odpowiedź (tzn., (10)) odpowiada mniej naturalnej (jednak możliwej) sytuacji.

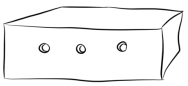
2 Tydzień II: 8. i 11. października 2024

2.1 Elementy i zbiory

Logika matematyczna ściśle odzwierciedla reguły języka potocznego – jest tylko precyzyjniejsza. Ale w jakimkolwiek języku nie ma tylko spójników: rzeczowniki, przymiotniki oraz czasowniki są podstawowymi elementami. W matematyce jest mało czasowników: „jest, równa się, pochodzi, zachodzi, należeć, zawierać (się), …", kilka technicznych przymiotników, jakie znajdują się w definicjach, a tylko jeden rzeczownik: **element**.

Jak można wtedy opisywać niesamowite bogactwo wszechświata za pomocą jednego rzeczownika? Trzeba mieć genialny pomysł, jak ten, który miał mały książę: zamiast powiedzieć „weźmy sobie jedną owcę", można równoważnie powiedzieć „weźmy sobie jeden element z pudełka S"

$$S := \quad ,$$



do którego wcześniej włożyliśmy **wszystkie owce, które istnieją**.

Takie pojęcie, jakie „pudełko wszystkich owiec, które istnieją" w rzeczywistości trudno daje się wyobrazić, ale w matematyce, jest to chlebem codziennym.

2.1.1 (Nie)definicja pojęcia zbioru i pojęcia elementu

Pudełko, wiaderko, butelka, torba, walizka, kontener, pojemnik, słoik, puszka, rodzina, drużyna, itp. – wszystko co może zawierać coś, w matematyce nazywa się **zbiorem**.

Niezależnie od swojego natury, wszystko co znajduje się w zbiorze nazywa się **elementem**. Piszemy

$$s \in S \tag{12}$$

i czytamy „s jest elementem zbioru S".

W powyższym przypadku, element s będzie dowolną owcą:

$$s = \quad ,$$



ale opis (12) jest zupełnie uniwersalny.

Pojęcie „zbioru" i „elementu" są prymitywne: nie można ich zdefiniować. Można tylko znaleźć ich synonimy. Zbiory oznaczamy wielkimi literami, $A, B, C, X, Y, \ldots$ a ich elementy małymi literami, $a, b, c, x, y \ldots$. Wyrażenie $a \in A$ czytamy też „a należy do A", oraz „A zawiera a".

2.1.2 Definicja jednego konkretnego zbioru

Mimo tego, że pojęcie zbioru nie posiada definicji, każdy poszczególny zbiór, którego potrzebujemy w naszych rozumowaniach, można (i nawet należy) zdefiniować jednoznacznie.

Piszemy

$$A := \{a \mid a \text{ jest} \ldots\}$$

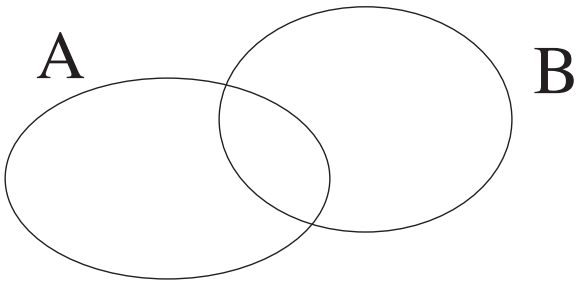
i czytamy „niech A będzie zbiorem wszystkich elementów a takich, że…, gdzie na miejscu trzech kropek znajduje się właściwość charakteryzująca te elementy.

2.2 Relacje i działania między zbiorami

2.2.1 Podzbiory

Definicja 2.1. *Mówimy, że B jest* zawarty *w A (równoważnie: B jest* podzbiorem *A, lub A jest* nadzbiorem *B) i piszemy $B \subseteq A$, jeśli $x \in B \Rightarrow x \in A$, dla każdego x. Jeśli $B \subseteq A$ i też $B \neq A$, to się mówi, że B jest* właściwym podzbiorem *A lub* ściśle zawarty *w A.*

Jak sprawdzić, czy B jest zawarty w A? Załóżmy, że A i B są jak na rysunku:



Należy sprawdzić, czy implikacja $x \in B \Rightarrow x \in A$ jest prawdziwa dla każdego elementu x. Z rysunku, widać, że x może być wybrany na 4 sposoby:

- w taki sposób, że x leży na zewnątrz A i na zewnątrz B: to znaczy, że obydwa zdania $x \in A$ oraz $x \in B$ są fałszywe: z tabelki (5) wynika, że implikacja $x \in B \Rightarrow x \in A$ jest prawdziwa;
- w taki sposób, że x leży wewnątrz A i wewnątrz B: to znaczy, że obydwa zdania $x \in A$ oraz $x \in B$ są prawdziwe: z tabelki (5) wynika, że implikacja $x \in B \Rightarrow x \in A$ jest prawdziwa;
- w taki sposób, że x leży wewnątrz A i na zewnątrz B: to znaczy, że zdanie $x \in A$ jest prawdziwe oraz zdanie $x \in B$ jest fałszywe: z tabelki (5) wynika, że implikacja $x \in B \Rightarrow x \in A$ jest prawdziwa;
- w taki sposób, że x leży na zewnątrz A i wewnątrz B: to znaczy, że zdanie $x \in A$ jest fałszywe oraz $x \in B$ jest prawdziwe: z tabelki (5) wynika, że implikacja $x \in B \Rightarrow x \in A$ jest fałszywa.

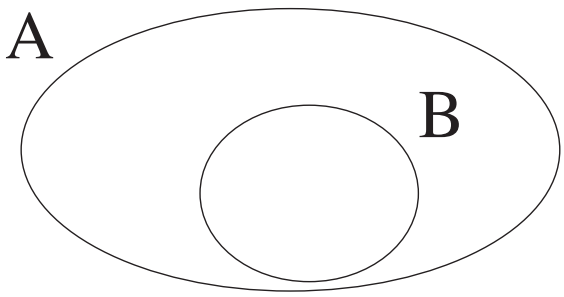
Wtedy to nie jest prawdą, że

$$x \in B \Rightarrow x \in A \quad \forall x \tag{13}$$

(przypomnijmy, że symbol $\forall$ czyta się „dla każdego"), czyli nie może być $B \subseteq A$. Powodem tego jest fakt, że

$$\exists x \quad | \quad x \in B \wedge x \notin A\,. \tag{14}$$

(Przypomnijmy, że symbole $\exists$, $|$ oraz $\notin$ czytamy „istnieje", „taki, że" oraz „nie należy", odpowiednio.) Widać że, żeby implikacja $x \in B \Rightarrow x \in A$ była prawdziwa dla każdego x, zbiory A i B muszą wyglądać w następujący sposób:



Przykład 2.1. Zgodnie z powyższym Przykładem 1.8, niech B będzie zbiorem wszystkich zdolnych studentów, a A zbiorem wszystkich studentów, którzy dostali piątkę. Fakt, że $B \subseteq A$ mówi dokładnie, ze każdy zdolny student dostał piątkę.

Zauważmy, że istnieją studenci, którzy nie są zdolni i nie dostali piątki—ale to nikogo nie obchodzi, ponieważ to nie przeszkadza implikacji $x \in B \Rightarrow x \in A$.

2.2.2 Dopełnienie

W odniesieniu do Przykładu 1.8, warto zaobserwować, że zbiór wszystkich punktów „na zewnątrz" zbioru B zawiera nie tylko słabych studentów, ale też tablice, długopisy, cząsteczki powietrza, koty, psy i konie. Taki dziwny zbiór nazywamy **dopełnieniem** zbioru B, i go oznaczamy jako

$$\overline{B} := \{x \mid x \notin B\}\,. \tag{15}$$

Taki zbiór B zawiera wiele dziwnych rzeczy i rzadko jest użyteczny. (Z punktu widzenia logiki, jeśli pewien sklep nazywa się „Nie tylko chleb", to moglibyśmy tam wchodzić i poprosić o szlifierkę kątową!)

2.2.3 Wspólna część

Wspólną cześć (czasami nazywaną **iloczynem**) zbiorów A i B definiujemy jako

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}\,. \tag{16}$$

2.2.4 Różnica

W szczególności, można wziąć

$$A \smallsetminus B := A \cap \overline{B} = \{x \mid x \in A \wedge x \in \overline{B}\} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}\,. \tag{17}$$

Zbiór $A \smallsetminus B$ nazywa się **różnicą** zbiorów A i B. W odniesieniu do Przykładu 1.8, różnica $A \smallsetminus B$, zawiera dokładnie tych studentów, którzy dostali piątkę nie będąc zdolnymi.

2.2.5 Suma

Ostatnie ważne działanie miedzy zbiorami to „**suma**":

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}\,. \tag{18}$$

2.2.6 Zbiór pusty i zbiór wszystkiego

Jeśli oznaczamy jako

$$\emptyset := \{\ \} \tag{19}$$

zbiór nie zawierający żadnego elementu (tzw. **zbiór pusty**), to jego dopełnienie $\overline{\emptyset}$ zawiera *wszystko*: między innymi, mnie, który piszę i Ciebie, który czytasz, wraz z naszymi mózgami, które wyprodukowały same pojęcie „zbioru". Taki paradoks pokazuję, że teoria zbiorów jest pełna pułapek – więc wszechświat matematyczny (ten, w którym dinozaury wyglądają jak butelki) nie jest tak różowy, jak wygląda.

2.3 Paradoksy

Nawet przy (bardzo rozsądnym) założeniu, że

> „golibroda z Sewilli goli wszystkich, którzy nie golą się sami"

niemożliwe jest udzielić odpowiedzi na pytanie

> P: „czy golibroda z Sewilli sam goli się?"

Innymi słowy, fundamentalna Zasada 1.1 całej matematyki (i nauki) jest łamana tu. Istotnie,

- jeśli $P = 1$, to golibroda sam się goli, wobec tego, jako mieszkaniec Sewilli, który sam się goli, nie powinien być golony przez golibroda, czyli przez samego siebie;
- jeśli $P = 0$, to golibroda sam nie się goli, wobec tego, jako mieszkaniec Sewilli, który sam nie się goli, powinien być golony przez golibroda, czyli przez samego siebie.

Więc, w obu przypadkach otrzymujemy sprzeczność i wygląda na to, że zdanie P nie może być ani prawdzie, ani fałszywe. W języku teorii zbiorów, paradoks golibrody można przedstawić w sposób następujący.

Niech

$$X := \{A \mid A \notin A\}$$

będzie zbiorem wszystkiego, co **nie** można rozpatrywać, jako element samego siebie. Na przykład, zbiór

$$E := \{A, B, C, D, E\}$$

zawiera samego siebie jako element, wobec tego, E **nie** jest elementem zbioru X. Można teraz zadać sobie pytanie: czy X zawiera samego siebie?

- Załóżmy, że tak, tj. $X \in X$: to znaczy, że X nie spełnia warunku należności do X, czyli X nie należy do X, tj. $X \notin X$.
- Załóżmy, że nie, tj., $X \notin X$: to znaczy, że X spełnia warunku należności do X, czyli X należy do X, tj. $X \in X$.

W sumie, udowodniliśmy, że

$$X \in X \iff X \notin X\,,$$

tj.

$$P \iff \overline{P}\,.$$

To paradoks, czyli **nierozwiązywalna sprzeczność**, w matematyce.

2.4 Zbiór części

Zbiór

$$\mathcal{P}(S) := \{A \mid A \subseteq S\} \tag{20}$$

nazywa się **zbiorem części** zbioru S.

> Elementy zbioru $\mathcal{P}(S)$ są podzbiorami zbioru S, tj. mówić „weźmy sobie podzbiór zbioru S" jest to samo, co mówić „weźmy sobie element zbioru $\mathcal{P}(S)$".

Nietrudno udowodnić, że, jeśli S zawiera n elementów, to

$$\mathcal{P}(S) \text{ zawiera } 2^n \text{ elementów}\,. \tag{21}$$

W szczególności, jeśli $S = \emptyset$, to jedynym **elementem** zbioru $\mathcal{P}(S)$ jest **zbiór** $\emptyset$.

2.5 Iloczyn kartezjański

Definicja 2.2. Iloczynem kartezjańskim *zbiorów A i B jest zbiór*

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}\,. \tag{22}$$

Elementy zbioru $A \times B$ nazywamy parami. *Element a danej pary (a, b) nazywa się* pierwszą składową *pary, podczas gdy b jest jej* drugą składową.

Nietrudno udowodnić, że, jeśli A zawiera n elementów i B zawiera m elementów, to $A \times B$ zawiera $n \cdot m$ elementów.

2.6 Odwzorowania

2.6.1 Definicja odwzorowań jako podzbiory $A \times B$

W iloczynie kartezjańskim $A \times B$ znajdujemy tak zwane „funkcje" (jeśli B składa się z liczb) lub „odwzorowania" od A do B (jeśli B jest nieokreślony).

Niech $W \subset A \times B$ będzie podzbiorem, takim że:

$$\forall a \in A \; \exists! b \in B \mid (a,b) \in W \tag{23}$$

(symbol $\exists!$ czyta się „istnieje jedyny").

Skoro b jest jednoznacznie zdefiniowany przez a, warto go oznaczyć jako $f(b)$. Symbol f nazywamy **funkcją** lub **odwzorowaniem** od A do B, a W jest **wykresem** funkcji f. Symbolami,

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B\,, \\ a &\longmapsto f(a)\,, \end{aligned}$$

oraz

$$W = \text{wykres}(f) := \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subset A \times B\,.$$

Proszę zwrócić uwagę na „odwrócony" punk widzenia: najbardziej prymitywne pojęcie to zbiór, a nie funkcja, ponieważ zdefiniowaliśmy funkcję jako specjalny podzbiór W iloczynu kartezjańskiego $A \times B$, a mianowicie jako podzbiór, który spełnia warunek (23). Innymi słowy,

nie bierze się najpierw funkcję f a potem jej wykres $W \subset A \times B$, ale na odwrót: funkcja f jest jednoznacznie określona przez podzbiór W spełniający warunek (23).

2.6.2 (Przeciw)dziedzina i (przeciw)obraz

Zbiór A to **dziedzina** (zbiór argumentów) funkcji f a B to jej **przeciwdziedzina** (zbiór wartości). Podzbiór

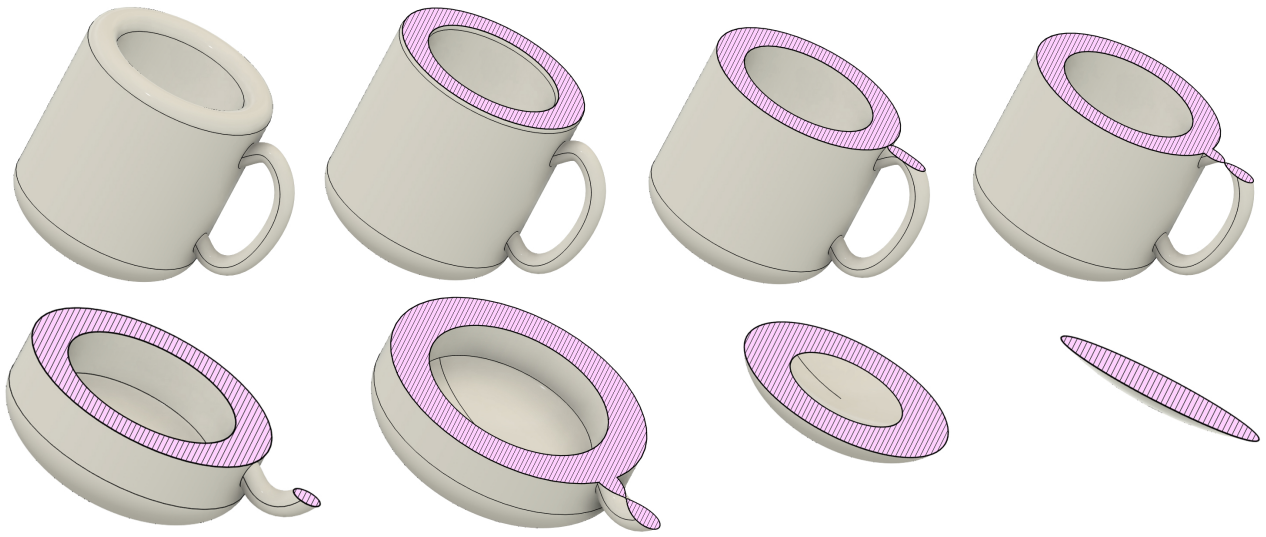
$$f(A) := \{b \in B \mid \exists a \in A \text{ taki, że } b = f(a)\} \subset B \tag{24}$$

nazywamy **obrazem** f, a podzbiór

$$f^{-1}(B') := \{a \in A \mid f(a) = b\} \subset A \tag{25}$$

nazywamy **przeciwobrazem** podzbioru $B' \subseteq B$. Jeśli $B' = \{b\}$, to piszemy $f^{-1}(b)$ zamiast $f^{-1}(\{b\})$.

Przykład 2.2. Funkcja $f(x,y,z) = z$ oznacza **wysokość** z punktu $P = (x,y,z)$ pewnego trójwymiarowego przedmiotu K: w takim razie przeciwobrazy $f^{-1}(h)$ nazywają się **poziomicami**. Na przykład, niech $K \subset \mathbb{R}^3$ będzie kubkiem stworzonym oprogramowaniem Autodesk™ Fusion™: narzędzie „sectional analysis" pokazuje właśnie (w kolorze różowym) poziomicy $f^{-1}(h)$ dla różnych ustalonych przez użytkownika wartości wysokości $h \in \mathbb{R}$.



2.6.3 Różne rodzaje funkcji

Definicja 2.3. *Funkcja f jest* suriekcją *(funkcją „na"), jeśli $f(A) = B$; jest* iniekcją *(funkcją* różnowartościową*), jeśli $f^{-1}(\{b\})$ zawiera tylko jeden element, dla każdego $b \in B$; jest* bijekcją *(funkcją* wzajemnie jednoznaczną*), jeśli jest suriekcją i iniekcją jednocześnie.*

Jeśli funkcja f jest bijekcją, to można oznaczyć tylko jeden element zbioru $f^{-1}(\{b\})$ jako $g(b)$. Innymi słowy, mamy funkcję

$$\begin{aligned} g : B &\longrightarrow A\,, \\ b &\longmapsto g(b)\,, \end{aligned}$$

taką, że $f(g(b)) = b$ dla każdego $b \in B$. Taka funkcja to **funkcja odwrotna** do funkcji f i oznaczamy ją f^{-1}. Np. funkcją odwrotną do $y = 6x - 9$ jest $x = (y + 9)/6$.

2.6.4 Złożenie funkcji

Jeśli mamy funkcję $f : A \to B$ i funkcję $g : B \to C$, to funkcja od A do C zdefiniowana jako $a \to g(f(a))$ nazywa się **funkcją złożoną**, i oznacza $g \circ f$. Funkcję $f : A \to A$, taką że $a \mapsto a$, nazywamy **funkcją identycznościową** (tożsamościową) i oznaczamy ją id_A.

Zaobserwujmy, że, jeśli f jest odwracalna, to

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B\,, \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A\,. \tag{26}$$

2.7 Operacje w zbiorach

2.7.1 Operacje w S

Odwzorowanie

$$f : S \times S \longrightarrow S$$

nazywa się **operacją** (działaniem) w zbiorze S. **Wynik operacji** (działania) f na parę elementów $(x, y) \in S \times S$, czyli obraz $f(x, y)$, zazwyczaj oznacza się symbolem

$$x \square y\,,$$

gdzie $\square$ jest jednym z symbolów $+$, $-$, $\times$, $/$, $\circ$, itp.

> Definicje znanych właściwości operacji arytmetycznych (przemienność, łączność, rozdzielność, itp.) można uogólnić dosłownie do dowolnej operacji $\square$ w zbiorze S.

Przykład 2.3. Jeśli S jest zbiorem liczb a $f(x, y) := x+y$ jest zwykłą sumą, to przeciwobraz $f^{-1}(1)$ jest prostą przechodzącą przez $(0, 1)$ a $(1, 0)$. **UWAGA**: f^{-1} nie jest operacją odwrotną do dodawania, czyli zdejmowaniem!

2.7.2 Relacje w S

Odwzorowanie

$$f : S \times S \longrightarrow \{\text{TAK}, \text{NIE}\}$$

nazywa się **relacją** w zbiorze S.

> Jeśli $f(x, y) = \text{TAK}$, to mówimy, że x jest w relacji z y i piszemy
>
> $$x \square y\,,$$
>
> w przeciwnym przypadku, piszemy
>
> $$x \not\square y$$
>
> i mówimy, że x nie jest w relacji z y.

Typowymi wyglądamy symbolu $\square$ są $=$, $\equiv$, $\approx$, $\leq$, $<$, itp.

Przykład 2.4. Jeśli S jest ludzkością a

$$f(a, b) = \begin{cases} \text{TAK} & \text{jeśli } a \text{ jest przyjacielem } b\,, \\ \text{NIE} & \text{inaczej}\,, \end{cases}$$

to f jest „relacją przyjaźni".

2.7.3 Porządek w S

Niech $\square$ będzie relacją w S.

> Jeśli
>
> - $a \square b \wedge b \square c \Rightarrow a \square c \quad \forall a, b, c \in S$,
> - $a \square b \wedge b \square a \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in S$,
> - $\forall a, b \in S \quad a \square b \vee b \square a$,
>
> to $\square$ nazywa się **porządkiem** w S.

Przykład 2.5. $\leq$ jest porządkiem w zbiorze liczb.

2.7.4 Relacja równoważności w S

Niech $\square$ będzie relacją w S.

> Jeśli
>
> - $a \square b \wedge b \square c \Rightarrow a \square c \quad \forall a, b, c \in S$,
> - $a \square b \Rightarrow b \square a \quad \forall a, b \in S$,
> - $\forall a \in S \quad a \square a$,
>
> to $\square$ nazywa się **relacją równoważności** w S.

Przykład 2.6. Niech $a \square b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a - b$ jest wielokrotnością 2. Nietrudno pokazać, że $\square$ jest relacją równoważności w zbiorze liczb całkowitych.

Niech $\square$ będzie relacją równoważności w S i niech $x \in S$. Podzbiór

$$[x]_\square := \{y \in S \mid x \square y\}$$

zbioru S, składający się z wszystkich elementów, które są w relacji z x, nazywa się **klasą abstrakcji** elementu x. Podzbiór

$$S/\square := \{[x]_\square \mid x \in S\}$$

zbioru $\mathcal{P}(S)$ nazywa się **zbiorem ilorazowym**. Warto zauważyć, że klasy abstrakcji stanowią **rozbicie** (podział, partycję) zbioru S: żadna klasa nie jest pusta, dwie klasy nigdy nie pokrywają się, a wszystkie pokrywają zbiór S.

Przykład 2.7. Jeśli $\square$ jest jak w przykładzie 2.6, to mamy tylko dwie klasy abstrakcji:

$$\begin{aligned} [0]_\square &= \{x \mid x \text{ jest parzystą}\}, \\ [1]_\square &= \{x \mid x \text{ jest nieparzystą}\}, \end{aligned}$$

wobec tego zbiór ilorazowy składa się z dwóch elementów.

2.8 Moc zbiorów

Jeśli istnieje przynajmniej jedna bijekcja między zbiorami A i B, to z grubsza mówiąc, A i B zawierają tą samą ilość elementów. Piszemy, w takim przypadku,

$$|A| = |B|. \tag{27}$$

Jeśli $|A| = |\{1, 2, \ldots, n\}|$, piszemy po prostu, $|A| = n$. Taki zbiór nazywamy **skończonym**, a liczbę n określającą liczbę jego elementów nazywa się **mocą zbioru**; w innym wypadku, zbiór jest **nieskończony**.

3 Tydzień III: 15. i 18. października 2024

3.1 Skąd się biorą liczby?

> *„Dobry Bóg stworzył liczby naturalne, inne są dziełem człowieka."*
>
> Leopold Kronecker (1823–1891).

Póki co nie pojawiła się żadna liczba – tylko logika, zbiory i operacje/działania w nich; niemniej jednak pojęcie liczby znajduje się w fundamentach jakiegokolwiek **modelu matematycznego**.

> Z grubsza mówiąc: „obraz rzeczywistości stworzona przez matematyczną część naszego mózgu nazywa się **modelem matematycznym**."
> Bogactwo modelu matematycznego zależy zatem od poziomu kultury matematycznej danego człowieka oraz chwili historycznej, w której żyje.

Przykład 3.1. Rysunek

| | | | | | | |

który można znaleźć na ścianach pewnych jaskiń, odzwierciedla model matematyczny, jakim dysponował jaskiniowiec. Rano, kiedy owcy wyszły z jaskini, jaskiniowiec powiedział:

jedna owca, dwie owcy, ..., siedem owiec,

i zaznaczył kreskę na ścianie; gdyby, wieczorem, kiedy one wróciły, policzenie skończyło się do sześciu owiec, to doszedłby do wniosku, że jedna została pożarta przez wilka.

3.1.1 Liczby naturalne

Przykład ten pokazuje, że jaskiniowiec nie tylko posiadał matematyczne pojęcie **liczb naturalnych**

$$\mathbb{N} \setminus \{0\}$$

(z wyjątkiem zera: po co mu „zero owiec”?) ale także embrionalne pojęcie **działania algebraicznego** w $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ – innymi słowy, w mózg jaskiniowca już znajdowała się tzw. *struktura matematyczna*.

> Zbiór $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ przyjmiemy jako dany przez Boga/Matkę Naturą/Los (niech każdy wybierze swojego ulubionego Stworzyciela) – resztę będziemy stopniową konstruować na podstawie $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

3.1.2 Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne

Definicja 3.1. *Zbiór S nazywamy* przeliczalnym *jeśli $|S| = |\mathbb{N}|$. Jeśli S jest nieskończony i nie jest przeliczalny, to S nazywa się* nieprzeliczalny.

Przykład 3.2. Zbiory $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ są przeliczalne. Zbiór $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny.

3.2 Struktury matematyczne

Zbiór S wyposażony w jeden (lub więcej) działań nazywa się **strukturą** i oznaczony jest symbolem

$$(S, \square, \Delta, \circ, \ldots)\,.$$

Przykład 3.3. Zbiór $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych, może być wyposażone, np., w porządek $\leq$, w sumę $+$, lub w oba: tak otrzymane struktury, tj.

$$\begin{aligned}&(\mathbb{Z}, \leq)\,,\\ &(\mathbb{Z}, +)\,,\\ &(\mathbb{Z}, \leq, +)\,,\end{aligned}$$

mimo tego, że opierają się na tym samym zbiorze $\mathbb{Z}$, są wszystkie różne od siebie.

3.2.1 Zbiory uporządkowane

Definicja 3.2. *Zbiór S wyposażony w porządek $\leq$ nazywamy* zbiorem uporządkowanym.

Przykład 3.4. Struktura $(\mathbb{Z}, \leq)$ składająca się z zbioru $\mathbb{Z}$ a porządek $\leq$ jest zbiorem uporządkowanym.

Definicja 3.3. *Niech E będzie podzbiorem zbioru uporządkowanego S. Element $m \in S$, taki, że $m \geq x$, $\forall x \in E$, nazywamy* ograniczeniem górnym *podzbioru E. Jeśli E posiada jakieś ograniczenie górne, to nazywamy E* ograniczony z góry.

Analogiczne można zdefiniować ograniczenie dolne.

Definicja 3.4. *Najmniejsze ograniczenie górne podzbioru ograniczonego $E \subseteq S$ (zakładając, że istnieje) nazywa się* kres górny *podzbioru E i oznaczamy go symbolem* $\sup E$. *Analogiczne zdefiniujemy kres dolny* $\inf E$ *(jeśli oczywiście istnieje).*

Istnieje tak zwana *zasada dobrego uporządkowania* – reguła matematyczna mówiąca, że:

> Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych zawiera **element najmniejszy**.

Tego nie można udowodnić: jest to aksjomat. Ale z tego aksjomatu pochodzi **zasada indukcji matematycznej**:

Twierdzenie 3.1 (Indukcja matematyczna)**.** *Przypuśćmy, że pewna własność W przysługuje pewnym liczbom naturalnym, przy czym spełnione są dwa warunki:*

(i) $W(1)$*, tzn. własność* W *przysługuje liczbie 1;*

(ii) Jeśli $W(n)$*, to także* $W(n+1)$*.*

Wówczas własność W *przysługuje wszystkim liczbom naturalnym.*

3.2.2 Rozszerzenie struktur

I działania i porządek pojawiają się naturalnie w **zbiorach liczb**, które zostały wprowadzone przez ludzi w ciągu historii, zaczynając od „prymitywnego"zbioru $\mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\mathbb{N} \setminus \{0\} \subset \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \subset \mathbb{R}\,. \tag{28}$$

Struktura

$$(\widetilde{S}, \widetilde{\square}, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\circ}, \ldots)$$

nazywa się **rozszerzeniem** struktury

$$(S, \square, \Delta, \circ, \ldots)\,,$$

jeśli $\widetilde{S}$ jest nadzbiorem zbioru S a działania $\widetilde{\square}, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\circ}, \ldots$ **pokrywają się** z działaniami $\square, \Delta, \circ, \ldots$.

Przykład 3.5. Każda kolejna struktura w (28) jest rozszerzeniem poprzedniej.

W dalszym ciągu będziemy wprowadzać i wyjaśniać wszystkie rozszerzenia, który ostatecznie doprowadzą do $\mathbb{R}$, zacząwszy od $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

3.2.3 Przemienność, łączność, rozdzielność, istnienie elementu neutralnego

Poniżej symbol $\square$ oznacza dowolne działanie (może ono być $+$, $\times$, lub czymś innym).

Definicja 3.5. *Działanie* $\square$ *jest* przemienne *jeśli* $x\square y = y\square x\ \forall x, y \in S$*; jest* łączne *jeśli* $(x\square y)\square z = x\square(y\square z)\ \forall x, y, x \in S$*; posiada* element neutralny $n \in S$*, jeśli* $x\square n = x\ \forall x \in S$*.*

W przypadku sumy, element neutralny jest zwykłe oznaczony jako 0 a w przypadku mnożenia jest zwikłe oznaczony jako 1.

Definicja 3.6. *Jeśli* $x + y = 0$*, to* y *nazywa się elementem przeciwnym do* x *i oznaczamy go* $-x$*; jeśli* $x \cdot y = 1$*, to* y *nazywa się elementem odwrotnym do* x *i oznaczamy go* x^{-1}*.*

Definicja 3.7. *Jeśli* S *jest wyposażone w sumę i mnożenie, a* $x(y+z) = xy + xz\ \forall x, y, z \in S$*, to mówimy, że* prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania *jest spełnione.*

Przykład 3.6. Zwykłe dodawanie i mnożenie w zbiorze $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ (znanym już przez jaskiniowców w prehistorii) są oczywiście obydwoje przemienne i łączne. Element 0, neutralny względem sumy, został wprowadzony później (kiedy z systemu rzymskiego przeszło się na system arabski): mamy wtedy liczby *naturalne* $\mathbb{N}$. Zbiór $\mathbb{Z}$ stał się konieczny, kiedy ludzie zaczęli mierzyć temperatury ujemne: w $\mathbb{Z}$ każdy element posiada element przeciwny: mamy teraz liczby *całkowite*. Niestety, nie wszystkie elementy jeszcze posiadają element odwrotny (tylko 1 go ma): tymi liczbami, ludzie nie mogą kupić „jednej czwartej ciasta"! Rozwiązanie tego problemu przedstawi zbiór *liczb wymiernych* $\mathbb{Q}$: tutaj każda liczba różna od 0 posiada odwrotny.

3.2.4 Ciała uporządkowane

Definicja 3.8. *Zbiór S, wyposażony w działania $+$, $\times$ oraz w porządek $<$, nazywa się ciałem uporządkowanym, jeśli $+$ i $\times$ są przemienne i łączne, zachodzi prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania, każdy element posiada element przeciwny a każdy element niezerowy posiada element odwrotny, a przy tym:*

1. $y < z \Rightarrow x + y < x + z \ \forall x$;
2. $x > 0,\ y > 0 \Rightarrow xy > 0$.

Przykład 3.7. Zbiór $\mathbb{Q}$, wyposażony w $+$ oraz $\times$, stanowi przykład *ciała uporządkowanego.*

3.2.5 Własność istnienia kresów dolnych

Jaki jest ostatni krok, a mianowicie, przejście od $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{R}$? Co brakuje temu $\mathbb{Q}$? Z punktu widzenia algebraicznego, tzn. na poziomie działań, absolutnie nic. Problem jest teraz raczej natury geometrycznej: zbiór $\mathbb{Q}$ jest pełny „dziur", które należy zapełnić.

Definicja 3.9. *Zbiór uporządkowany S posiada* własność istnienia kresów dolnych*, jeśli każdy niepusty i ograniczony z dołu podzbiór $E \subset S$ ma kres dolny w S.*

Przykład 3.8. Niech $E = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\} \subset \mathbb{Q}$. Widać, że $\sup E = 1 \in E$, natomiast $\inf E = 0 \notin E$.

Ale to tylko szczęśliwy przykład: okazuje się, że większość podzbiorów $\mathbb{Q}$ nie posiada kresu—to te powiżej wspomniane „dziury". Typowa „dziura" to $\sqrt{2}$.

Stwierdzenie 3.1. $\mathbb{Q}$ *nie posiada* własności istnienia kresów dolnych.

Dowód. Wprowadźmy zbiory

$$A := \{p \in \mathbb{Q} \mid (p \leq 0) \vee (p > 0 \wedge p^2 < 2)\}, \tag{29}$$
$$B := \{p \in \mathbb{Q} \mid p > 0 \wedge p^2 > 2\}. \tag{30}$$

Niech $p \in A$ będzie dowolnym **ujemnym** elementem: wówczas $0 \in A$ a $0 > p$, czyli istnieje element w A większy od p; załóżmy zatem, że $p \in A$ jest **nieujemnym**. To $2 - p^2 > 0$ i $p \geq 0 \Rightarrow p + 2 > 0$. Z tego wynika, że liczba

$$q := p + \frac{2 - p^2}{p + 2} \tag{31}$$

jest ściśle większa od p. Ale

$$\begin{aligned}
q^2 - 2 &= \left(p + \frac{2 - p^2}{p + 2}\right)^2 - 2 \\
&= \left(\frac{p(p+2) + 2 - p^2}{p + 2}\right)^2 - 2 \\
&= \left(\frac{2p + 2}{p + 2}\right)^2 - 2 \\
&= \left(2\frac{p + 1}{p + 2}\right)^2 - 2 \\
&= \frac{4(p+1)^2 - 2(p+2)^2}{(p+2)^2} \\
&= \frac{4p^2 + 8p + 4 - 2p^2 - 8p - 8}{(p+2)^2} \\
&= \frac{2p^2 - 4}{(p+2)^2} \\
&= -2\frac{2 - p^2}{(p+2)^2} < 0,
\end{aligned}$$

z czego wynika $q^2 < 2$. Innymi słowy, $q \in A$ i $q > p$.

Podobnie, jeśli $p \in B$ jest dowolnym elementem, można znaleźć $q < p$, taki, że $q \in B$.

Skoro każdy element w B jest większy od każdego elementu w A, to A jest ograniczony z góry, a podobnie B jest ograniczony z dołu. Istotnie, ograniczeniami górnymi zbioru A są dokładnie elementy zbioru B: gdyby A posiadał $\sup A$, to taki kres dolny byłby najmniejszym elementem B, czego nie ma; podobnie, gdyby B posiadał $\inf B$, to taki kres dolny byłby największym elementem A, czego nie ma. □

„Dziura" między A i B to po prostu „liczba" $\sqrt{2}$.

3.3 Jak skonstruować $\mathbb{R}$ na podstawie $\mathbb{N} \setminus \{0\}$?

3.3.1 Przejście od $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ do $\mathbb{N}$

Aby „wzbogacić" dowolny zbiór A jednym „nowym elementem"wystarczy wziąć dowolny $a \in A$ i zdefiniować

$$\widetilde{A} := A \cup \{\{a\}\}\,. \tag{32}$$

UWAGA na różnicę między elementem a a podzbiorem $\{a\}$: tylko drugi sprawdza się, ponieważ

$$A \cup \{a\} = A\,. \tag{33}$$

Więc, aby „wzbogacić" $A := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ elementem neutralnym, wystarczy wziąć swoją ulubioną liczbę, np. $7 \in A$ i zdefiniować

$$\widetilde{A} := A \cup \{\{7\}\}\,. \tag{34}$$

Proces rozszerzenia struktur nie ograniczy się jednak do samego zbioru – trzeba, jak mówi się technicznie, **dodefiniować wszystkie działania**, tj. zdefiniować działania dla argumentów, dla których jeszcze nie są określone. W niniejszym przypadku, skoro dodaliśmy tylko jeden element, wystarczy definiować

$$a + \{7\} := a\,, \quad \forall a \in A\,.$$

Potem, można pokazać, że $\{7\}$ spełnia własności elementu neutralnego – i **zmienić jego symbol**, np. na 0. Tak definiuje się $\mathbb{N}$.

Uwaga 3.1. Gdzieś indziej w literaturze oznacza się zbiór liczby naturalnych bez zera symbolem $\mathbb{N}$, zbiór liczby naturalnych łącznie z zerem symbolem $\mathbb{N}_0$.

3.3.2 Przejście od $\mathbb{N}$ do $\mathbb{Z}$

Dysponując zbiorem $\mathbb{N}$ można zdefiniować zbiór $\mathbb{Z}$ biorąc sumę iloczynów kartezjańskich

$$\mathbb{Z} := ((\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times \{1\}) \cup (\mathbb{N} \times \{0\})\,, \tag{35}$$

gdzie pary postaci

$$(n, 1)\,, \quad n > 0\,, \tag{36}$$

nazywamy **liczbami ujemnymi**, podczas gdy pary postaci

$$(n, 0)\,, \quad n > 0\,, \tag{37}$$

nazywamy **liczbami dodatnimi** – a parę

$$(0, 0) \tag{38}$$

nazywamy **zerem**. Następnie, trzeba dodefiniować operacje:

$$\begin{aligned}
(n,1) + (m,1) &:= (n+m,1)\,,\\
(n,0) + (m,0) &:= (n+m,0)\,,\\
(n,1) + (m,0) &:= (m-n,0)\,, \quad \text{jeśli } m \geq n\,,\\
(n,1) + (m,0) &:= (n-m,1)\,, \quad \text{jeśli } m < n\,.
\end{aligned}$$

Na samym końcu, można – z powodów estetycznych – zmienić notację:

$$\begin{aligned}(n,1) &:= -n\,,\\ (n,0) &:= n\,,\\ (0,0) &:= 0\,.\end{aligned}$$

Przykład 3.9. Taka konstrukcja jest wykorzystywana codziennie przez maszyny: 8–bitowy rejestr

$$R = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$$

można kodować $2^8 = 256$ liczb naturalnych, od 0 do 255; nikt jednak nie zabroni przeznaczyć bit a_0 na „znak" (np.: 1 dla ujemnych a o dla dodatnich) i stworzyć nowy układ arytmetyczny, składający się z 255 liczb, od -127 do +127 (liczbie zero odpowiadają dwa różne rejestry).

3.3.3 Przejście od $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Q}$

Dysponując zbiorem $\mathbb{Z}$ można zdefiniować zbiór $\mathbb{Q}$ biorąc klasy abstrakcji par

$$[(l,m)]_\sim \in (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/\!\sim\,, \tag{39}$$

gdzie pierwszą składową l nazywamy **licznikiem** a drugą składową m nazywamy **mianownikiem**. Dodawanie i mnożenie rozszerzamy wzorami:

$$\begin{aligned}[(l_1,m_1)]_\sim + [(l_2,m_2)]_\sim &:= [(l_1 \times m_2 + l_2 \times m_1, m_1 \times m_2)]_\sim\,,\\ [(l_1,m_1)]_\sim \times [(l_2,m_2)]_\sim &:= [(l_1 \times l_2, m_1 \times m_2)]_\sim\,,\end{aligned}$$

gdzie kolorem czerwonym oznaczaliśmy „nowe" operacje w $\mathbb{Q}$ a niebieskim „stare" operacje w $\mathbb{Z}$.

Relacja $\sim$ między paramy jest dana wzorem

$$(l_1,m_1) \sim (l_2,m_2) \overset{\text{def}}{\iff} l_1 m_2 = l_2 m_1\,.$$

Zazwyczaj klasa abstrakcji

$$[(l,m)]_\sim$$

oznaczona jest symbolem

$$\frac{l}{m}$$

i nazywa się **ułamkiem**, czy **liczbą wymierną**.

3.3.4 Przejście od $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{R}$

Dysponując liczbami wymiernymi, tj. ułamkami, można wprowadzić liczby rzeczywiste, jak np. $\sqrt{2}$; póki co wykorzystaliśmy pojęcia iloczynu kartezjańskiego oraz zbioru ilorazowego, co nie zmieniło przeliczalności: za raz wykorzystamy pojęcie zbioru części, co sprowadzi nas poza przeliczalnością.

Definicja 3.10. *Para* $(A,B) \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, *taka, że:*

1. $A \cup B = \mathbb{Q}$,
2. $A \cap B = \emptyset$,
3. $a < b\ \forall a \in A$ *oraz* $b \in B$,
4. $\forall a \in A\ \exists a' \in A$: $a' > a$,

nazywa się przekrojem Dedekinda. *Ponadto:*

1. *jeśli* $\exists q = \inf B$, *to* (A,B) *nazywa się* przekrojem wymiernym *i można go utożsamić z liczbą wymierną* $q \in \mathbb{Q}$;
2. *jeśli* $\nexists \inf B$, *to* (A,B) *nazywa się* przekrojem niewymiernym.

Widać wtedy, że powyższy przekrój, podany przez (29) oraz (30), jest niewymierny.

Twierdzenie 3.2. *Nie ma żadnej liczby wymiernej p, takiej, że $p^2 = 2$.*

Dowód. Załóżmy, że $p = \frac{m}{n}$ jest taki, że $p^2 = 2$. Można założyć, że co najmniej jedna z liczb m i n jest nieparzysta (wystarczy uprościć wspólne czynniki 2). To

$$p^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = 2n^2\,, \tag{40}$$

a to jest sprzeczność. Istotnie, m^2 musi być parzysta, a jedyny sposób, żeby m^2 była parzysta, to, żeby sama liczba m była parzysta. Ale z tego wynika, że m^2 jest podzielna przez 4 a więc n^2 jest podzielna przez 2, z czego wynika, że n też jest parzysta, a to jest sprzeczność. □

Można wtedy **zdefiniować nową liczbę** a utożsamiając ją z powyższym przekrojem, podanym przez (29) oraz (30):

$$a := (A, B)\,; \tag{41}$$

jeśli jednocześnie udaje nam się **rozszerzać pojęcie iloczynu liczb**, w taki sposób, że

$$(A, B) \cdot (A, B) = (\{q \in \mathbb{Q} \mid q < 2\}, \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 2\}) = 2\,, \tag{42}$$

to otrzymalibyśmy liczbę a, taką, że $a^2 = 2$. Skoro taka liczba odpowiadałaby przekrojowi niewymiernemu, to naturalne ją nazywać *liczbą niewymierną*.

Twierdzenie 3.3. *Niech*

$$\mathbb{R} := \mathbb{Q} \cup \{(A, B) \mid (A, B) \textit{ jest przekrojem Dedekinda niewymiernym}\}\,. \tag{43}$$

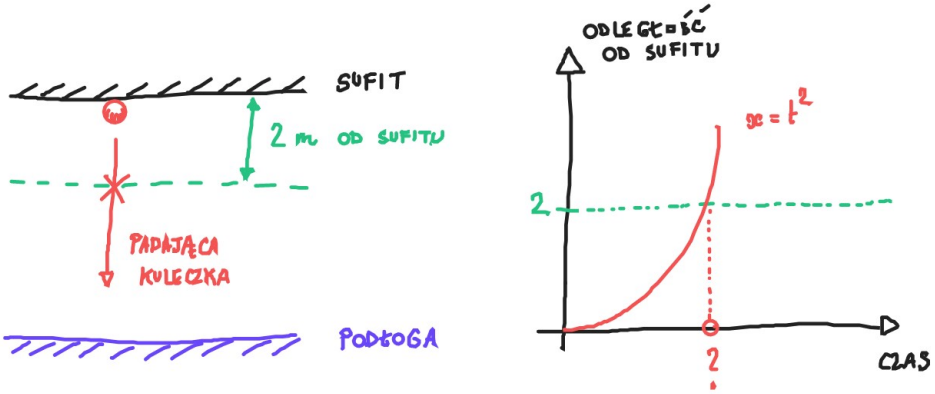
Można wyposażyć zbiór $\mathbb{R}$ w działania $+, \times$ oraz porządek $<$, takie że:

1. *w podzbiorze $\mathbb{Q}$, działania $+, \times$ oraz porządek $<$ odpowiadają znanym sumie, iloczynowi oraz porządkowi w liczbach wymiernych;*
2. *$(\mathbb{R}, +, \times, <)$ jest ciałem uporządkowanym posiadającym* ***własność istnienia kresów dolnych****.*

Dowód. Za trudny. □

Intuicyjnie, wzbogaciliśmy zbiór $\mathbb{Q}$ mu dodając „dziury" między elementami niewymiernych przekrojów Dedekinda: utożsamienie (41) mówi, że znajomość liczby niewymiernej a jest równoważna znajomości wszystkich jej przybliżeń (przez niedomiar/nadmiar).

Aby przekonać się do konieczności wprowadzenia liczb rzeczywistych, wystarczy zaobserwować, że model matematyczny takiego prostego zjawiska, jakim jest spadek kuleczki od sufitu, nie może się opierać na $\mathbb{Q}$ i potrzebne jest większy zbiór $\mathbb{R}$. Wszyscy widzimy moment, kiedy kuleczka przekracza poziom 2 metrów od sufitu: ale w modele matematycznym opartym na $\mathbb{Q}$, ten „moment" powinien być liczbą, której kwadrat wynosi 2 – a takiej liczby nie ma (por. paradoks Zenona).



Traktowanie „dziury" jako coś istniejącego nie powinno dziwić: w półprzewodniczących „dziury" – czyli brak elektronów – są traktowane jako cząsteczki. Filozoficznie, dziura istnieje, o ile tylko jesteśmy w stanie postrzegać wszystko, co ją otacza: w przypadku $\mathbb{R}$, my "zauważamy" liczbę rzeczywistą niewymierną r dzięki temu wszystkiemu, co ją otacza – czyli przekrojowi Dedekinda (A, B) odpowiadający liczbie r.

Definicja 3.11. *Zbiór $\mathbb{R}$ wszystkich liczb wymiernych oraz niewymiernych nazywa się* ***zbiorem liczb rzeczywistych****.*

3.4 Właściwości liczb rzeczywistych

3.4.1 Wartość bezwzględna i nierówność trójkątna

Definicja 3.12. *Liczbą $a \in \mathbb{R}$ nazywamy ujemną (odp., dodatnią) jeśli $a < 0$ (odp., $a > 0$). Wartość bezwzględna liczby $a \in \mathbb{R}$ to $\max\{a, -a\}$ i oznaczamy ją $|a|$.*

Twierdzenie 3.4 (Nierówność trójkątowa)**.** *Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi*

$$|a + b| \leq |a| + |b| \,. \tag{44}$$

Dowód. Dodając poniższe dwie nierówności

$$\begin{aligned} -|a| \leq \quad a \quad &\leq |a| \,, \\ -|b| \leq \quad b \quad &\leq |b| \,, \end{aligned}$$

otrzymamy

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b| \,. \tag{45}$$

Innymi słowy,

$$\begin{aligned} a + b \quad &\leq \quad |a| + |b| \,, \\ -(a + b) \quad &\leq \quad |a| + |b| \,, \end{aligned}$$

czyli

$$|a| + |b| \geq \max\{a + b, -(a + b)\} = |a + b| \,, \tag{46}$$

tak, jak chcieliśmy.

□

Wniosek 3.1. *Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi*

$$\begin{aligned} ||a| - |b|| \quad &\leq \quad |a + b| \,, \\ ||a| - |b|| \quad &\leq \quad |a - b| \,. \end{aligned}$$

Dowód. Rozważmy najpierw drugą nierówność. Mając

$$\begin{aligned} |a| + |b - a| \quad &\geq \quad |a + b - a| = |b| \,, \\ |b| + |a - b| \quad &\geq \quad |b + a - b| = |a| \,, \end{aligned}$$

przenosząc $|a|$ i $|b|$ na prawą stronę, otrzymamy, odpowiednio,

$$\begin{aligned} |b - a| = |a - b| \quad &\geq \quad |b| - |a| = -(|a| - |b|) \,, \\ |a - b| \quad &\geq \quad |a| - |b| \,, \end{aligned}$$

skąd wynika, że $|a - b| \geq ||a| - |b||$. Pierwszą nierówność można udowodnić analogiczne.

□

3.4.2 Rozszerzone liczby rzeczywiste

Definicja 3.13. *Zbiór rozszerzonych liczb rzeczewistych jest zbiorem $\mathbb{R}$ wraz z dwoma dodatkowymi elementami: ∞ oraz $-\infty$.*

Można przedłużyć porządek w $\mathbb{R}$ na liczby rozszerzone, ustalając, że

$$-\infty < a < \infty \,, \quad \forall a \in \mathbb{R} \,. \tag{47}$$

Tak otrzymany większy uporządkowany zbiór posiada jeszcze własność istnienia kresów dolnych, chociaż **nie jest ciałem!**

Stwierdzenie 3.2. *∞ jest ograniczeniem górnym każdego podzbioru $E \subseteq \mathbb{R}$; jeśli $\sup E = \infty$, to znaczy, że E nie jest ogranoczony z góry.*

Dowód. Pierwszy fakt zachodzi prosto z (47). Jeśli E nie jest ograniczony z góry, to znaczy, że E nie posiada żadnego ograniczenia górnego w $\mathbb{R}$: z tego wynika, że ∞ jest jedynym ograniczeniem górnym zbioru E i jako takim, najmniejszym. Innymi słowy, $\sup E = \infty$. □

Warto zaobserwować, że, skoro $a \leq \infty$ dla każdej liczby rozszerzonej a, to Stwierdzenie 3.2 zachodzi też, jeśli E jest podzbiorem liczb rozszerzonych.

Fakt, że liczby rozszerzone nie stanowią ciała, znaczy, że nie ma żadnego sposobu, aby zdefiniować działania $a + (\pm\infty)$, $a \cdot (\pm\infty)$ oraz $(\pm\infty) + (\pm\infty)$, $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty)$ w ten sposobie, żeby rozszerzone liczby rzeczywiste, wyposażone w takie przedłużone działania, stanowiły ciało.

Mimo tego, że rozszerzone liczby rzeczywiste nie mogą być wyposażone w strukturę ciała, ustalimy, że:

$$\begin{aligned}
a + (\pm\infty) &= \pm\infty\,, \quad \forall a \in \mathbb{R}\,, && (48)\\
a \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty\,, \quad \forall a \in \mathbb{R}\,, a > 0\,, && (49)\\
a \cdot (\pm\infty) &= \mp\infty\,, \quad \forall a \in \mathbb{R}\,, a < 0\,, && (50)\\
\infty + \infty &= \infty\,, && (51)\\
(-\infty) + (-\infty) &= -\infty\,, && (52)\\
\infty \cdot \infty &= \infty\,, && (53)\\
\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty &= -\infty\,, && (54)\\
(-\infty) \cdot (-\infty) &= \infty\,. && (55)
\end{aligned}$$

3.4.3 Forme nieoznaczone

Zaobserwujmy, że powyższe zasady nie wystarczają, aby zdefiniować $+$ i $\cdot$ na wszystkich parach rozszerzonych liczb rzeczywistych, bo jeszcze brakuje definicji $0 \cdot (\pm\infty)$ oraz $\infty + (-\infty)$. Te pozostawimy niezdefiniowane. Bardzo poważny błąd studentów to przypuszczenie, że $\infty + (-\infty) = 0$, innymi słowy, że „liczba" $-\infty$ jest przeciwieństwem „liczby" ∞. Fakt, że $\infty + (-\infty)$ pozostają bez definicji, pociąga, że nie można odzyskać liczby a z sumy $a + \infty$! Po dodawaniu z ∞, liczba a jest stracona na zawsze: ∞ jest czarną dziurą, a $-\infty$ nie jest anty–czarną dziurą, $-\infty$ jest po prostu inną czarną dziurą. Ale tak ma być: gdyby $-\infty$ był przeciwnym ∞, to byśmy mieli

$$(a + \infty) - \infty = a + (\infty - \infty) = a + 0 = a\,, \tag{56}$$

a jednocześnie

$$(a + \infty) - \infty = \infty - \infty = 0\,, \tag{57}$$

tzn., $a = 0$, dla każdego $a \in \mathbb{R}$: sprzeczność! Więc będziemy pisać

$$\infty + (-\infty) = \text{forma nieoznaczona}, \tag{58}$$

czyli wynik operacji pozostaje nieokreślony, niezdefiniowany: **operacja jest nielegalna**.

Wynik operacji $0 \cdot (\pm\infty)$ też trzeba pozostać niezdefiniowany: gdybyśmy przypisali jakąkolwiek wartość a wynikowi $0 \cdot (\pm\infty)$, to byśmy mieli

$$a = 0 \cdot (\pm\infty) = (1 + (-1)) \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) + (\mp\infty)\,,$$

co zaprzeczyłoby (58). Mamy wtedy kolejna formę nieoznaczoną:

$$0 \cdot (\pm\infty) = \text{forma nieoznaczona}. \tag{59}$$

W dodatku do definicji (48)–(55), ustalimy, że

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0\,, \quad \forall a \in \mathbb{R}\,, \tag{60}$$

tj. będziemy traktować 0 jako „odwrotność" $\pm\infty$. Piszemy specjalnie $\frac{a}{\pm\infty}$ zamiast $(\pm\infty)^{-1}$, żeby uniknąć pokuszenie wywnioskować, że $(\pm\infty) \cdot 0 = (\pm\infty) \cdot (\pm\infty)^{-1} = 1$.

Wszystkie powyższe działania (48)–(55) oraz (60) między rozszerzonymi liczbami rzeczywistymi będą jaśniejsze gdy pojęcie zbieżności zostanie wprowadzone.

4 Tydzień IV: 22. i 25. października 2024

4.1 Trochę geometrii osi liczb rzeczywistych

4.1.1 Czym jest geometria?

Jeśli wracamy do naszego szeregu kolejnych rozszerzeń

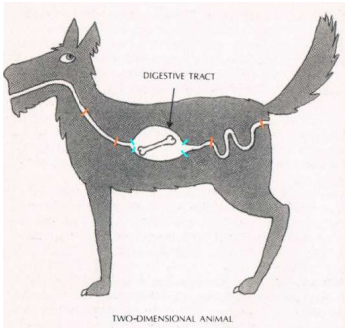
$$\mathbb{N} \setminus \{0\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \tag{61}$$

zauważamy, że wszystkie kroki, oprócz ostatniego, zostali wykonani, aby **upewnić pewną właściwość algebraiczną**: istnienie elementu neutralnego, istnienie elementów przeciwnych, istnienie elementów odwrotnych; ostatni krok, od $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{R}$, wykonaliśmy, aby **upewnić istnienie kresów dolnych, co jest właściwością geometryczną**.

> **Geometria** jest nauka, która zajmuje się **figurami**. Figura jest **podzbiorem** zbioru, który bierzemy jako **model naszego wszechświata**.

Przykład 4.1. Jeśli zakładamy, że nasz wszechświat jest trójwymiarowy, to *każdy z nas jest figurą*. Jeśli zakładamy, że nasz wszechświat jest czterowymiarowy, to *całe nasze życie jest figurą*.

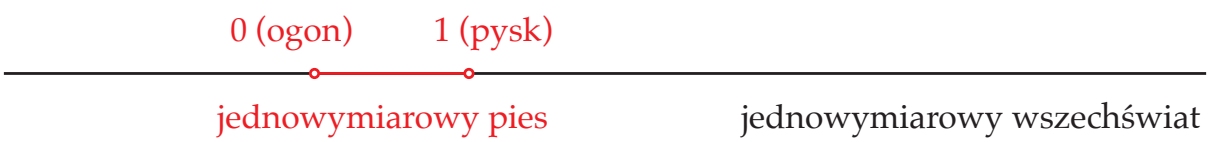
Przykład 4.2 (Pies Hawkinga). Nikt jednak nie zabroni zakładać, że nasz wszechświat jest dwuwymiarowy: w zdjęciu widać figurę odpowiadającą psu:



Stephen Hawking trafnie zaobserwował, że pies żyjący w dwuwymiarowym wszechświecie składałby się z dwóch części: ciekawe, że, aby spotykać się z nieoczekiwanymi zjawiskami, niekoniecznie trzeba przejść do więcej–wymiarowych wszechświatów: wystarczy szukać w mniej–wymiarowych wszechświatach!

4.1.2 Geometria jednowymiarowego wszechświata

Wyobraźmy sobie nawet bardziej skrajną sytuację. Pies jest jednowymiarowy i żyje w jednowymiarowym wszechświecie. **Pies jest odcinkiem, a wszechświat linią prostą**.



W takim prostym wszechświecie, pies posiada tylko odległość, ogon (oznaczmy go jako 0) a pysk (oznaczmy go jako 1). Niech L (jako „linia") będzie jednowymiarowym wszechświatem, gdzie ten pies znajduję się.

> Który spośród zbiorów (61) jest „dobrym modelem" jednowymiarowego wszechświata?

Na pewno $\mathbb{Z}$ nie sprawdza się, ponieważ nie wystarczy, aby pokrywać całego L, tj. nie da się skonstruować funkcji „na"

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} L\,.$$

Mniej oczywisty jest fakt, że nie da się skonstruować nawet funkcji f ze zbioru $\mathbb{Q}$ do zbioru L, która jest „na". Zilustrujmy to korzystając z naszego (jednowymiarowego) psa: jeśli mamy zdefiniować funkcję

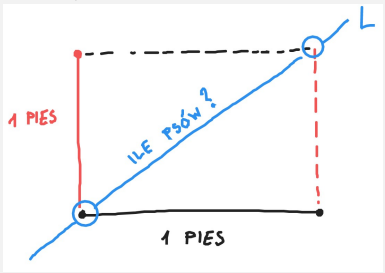
$$\mathbb{Q} \xrightarrow{f} L\,, \tag{62}$$

to możemy zacząć od jej wartości w 0 i w 1:

$$\begin{aligned} f(0) &:= \text{ogon}\,, \\ f(1) &:= \text{pysk}\,, \end{aligned}$$

Jak zdefiniować $f(2)$? Wystarczy wstawić drugiego psa, identycznego do naszego, w taki sposób, że ogon drugiego psa będzie w pysku pierwszego. To $f(2)$ będzie pyskiem drugiego psa. Łatwo wyobrazić sobie, jak zdefiniować $f(-1)$. Analogicznie zdefiniujemy $f(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$. A co z $f(1/n)$? Wystarczy znaleźć jednowymiarowego szczeniaka, takiego że, n takich szczeniaków w kolejności są równoważne jednemu psu: $f(1/n)$ będzie pyskiem pierwszego szczeniaka. Analogicznie zdefiniujemy $f(m/n)$ dla każdego $m/n \in \mathbb{Q}$.

Pytanie: czy otrzymaliśmy całą linię L, tj. czy to prawda, że $f(\mathbb{Q}) = L$?
Odpowiedź: **nie**, ponieważ można umieścić L na przekątnej kwadratu, którego krawędzi są psami i okazuje się, że dla żadnej liczby $a \in Q$, takiej, że punkty $f(0)$ oraz $f(a)$ opisują wierzchołki:



W dalszym ciągu, linia prosta L będzie po prostu synonimem zbioru $\mathbb{R}$: matematycy mówią o **ciele liczb rzeczywistych**, aby naciskać akcent na ich właściwościach algebraicznych – mówią o **osi/linii prostej liczb rzeczywistych**, aby naciskać akcent na ich właściwościach geometrycznych. Morał utożsamienia „abstrakcyjnego" zbioru $\mathbb{R}$ z „rzeczywistym" zbiorem L brzmi w sposób następujący: gdybyśmy mieszkali w jednowymiarowym wszechświecie L, to każdy punkt P naszego wszechświata L byłby jednoznacznie oznaczony przez liczbą rzeczywistą $r \in \mathbb{R}$.

Powyższe rozumowanie można traktować, jako **geometryczny dowód konieczności wprowadzenia liczb rzeczywistych**, aby mieć zadowalający model jednowymiarowej rzeczywistości: wracając do naszego dwój–, trój– (lub więcej–) wymiarowego wszechświata, można stwierdzić, że potrzebujemy liczb rzeczywistych, ponieważ $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ (lub $\mathbb{R}$ do jakiegoś większego wykładnika) jest **najlepszym miejscem, w którym można reprezentować naturalne zjawiska**. (Wyższą–wymiarową rzeczywistością będziemy się zajmować w Matematyce II.)

4.1.3 Przedziały liczbowe (ograniczone/nieograniczone) i ich oznaczenia

W linii prostej liczb rzeczywistych nie ma wielkiej rozmaitości figur: wyglądają one lub jako punkty, lub jako odcinki, lub jako ich różne sumy – pojęcie **przedziału** pozwala zatem opisywać wszystkie figury, które znajdują się w $\mathbb{R}$. Poniżej zdefiniujemy różne rodzaje przedziałów.

Niech $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$.

1. $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (przedział obustronnie otwarty)
2. $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
3. $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
4. $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (przedział obustronnie domknięty)

Niech $a \in \mathbb{R}$.

1. $]a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ (półprosta)
2. $[a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
3. $]-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
4. $]-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

Uwaga 4.1. Jeśli wzbogacamy $\mathbb{R}$ o obie nieskończoności, to

$$\widehat{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]\,.$$

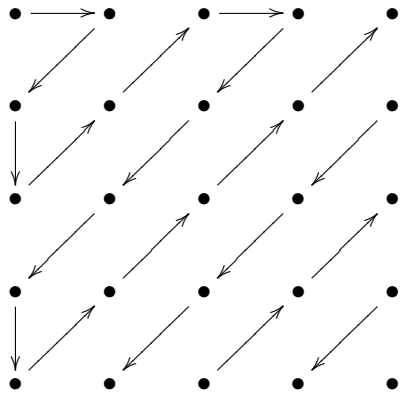
4.1.4 Nieprzeliczalność liczb rzeczywistych

Stwierdzenie 4.1. *Zbiór $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny.*

Dowód. Dla prostoty, będziemy udowadniać, że $|A| = |A \times A|$, dla $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dowód opiera się na tabelce

	1	2	3	4	5	...
1	•	•	•	•	•	...
2	•	•	•	•	•	...
3	•	•	•	•	•	...
4	•	•	•	•	•	...
5	•	•	•	•	•	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

przedstawiającej wszystkie elementy (czyli pary) zbioru $A \times A$; następnie, tworzy się nieskończenie długiego „węża”:



przechodzącego przez wszystkie punkty zbioru $A \times A$. Można zatem zdefiniować funkcję

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow A \times A\,, \\ i &\longmapsto f(i) := i\text{–ty punkt „węża”}\,, \end{aligned}$$

która jest widocznie „na”, skąd wynika, że A jest „mocniejszy” od $|A \times A|$, tj.

$$|A| \geq |A \times A|\,.$$

Skoro A można rozpatrywać jako podzbiór $A \times A$, mamy także

$$|A| \leq |A \times A|\,,$$

co kończy dowód. □

Wniosek 4.1. *Zbiór $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny.*

Dowód. Będziemy udowadniać, że zbiór

$$S := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$$

nie jest przeliczalny: ku sprzeczności, załóżmy, że istnieje funkcja „na”

$$f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow S$$

i przedstawmy każdy obraz $f(i)$ w postaci dziesiętnej:

$i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$f(i) \in S$	postać dziesiętna $f(i)$
1	$f(1)$	$0.a(1,1)a(1,2)a(1,3)a(1,4)a(1,5)\dots$
2	$f(2)$	$0.a(2,1)a(2,2)a(2,3)a(2,4)a(2,5)\dots$
3	$f(3)$	$0.a(3,1)a(3,2)a(3,3)a(3,4)a(3,5)\dots$
4	$f(4)$	$0.a(4,1)a(4,2)a(4,3)a(4,4)a(4,5)\dots$
5	$f(5)$	$0.a(5,1)a(5,2)a(5,3)a(5,4)a(5,5)\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

gdzie $a(i,j)$ jest j–tą cyferką liczby $f(i)$. Otóż można zdefiniować funkcję $b : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to S$:

$$b(i) := \begin{cases} 2 & \text{jeśli } a(i,1) \neq 2\,, \\ 1 & \text{jeśli } a(i,1) = 2\,. \end{cases}$$

Dlaczego taki wybór? Ponieważ w ten sposób, **nigdy nie zdarza się**, że $b(i) = a(i,i)$: pozwala to skonstruować element $x \in S$ o postaci dziesiętnej

$$x := 0.b(1)b(2)b(3)b(4)b(5)\dots\,,$$

który nie może należeć do obrazu f. Istotnie, gdyby tak było, to istniałoby $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, taki, że

$$f(n) = x\,,$$

z czego wynikałoby, że każda cyferka liczby x byłaby równa odpowiadającej cyferce liczby $f(n)$: w szczególności,

$$b(n) = a(n,b)\,,$$

co jest niemożliwe. □

Twierdzenie 4.1. *Zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **liczb niewymiernych** jest nieprzeliczalny.*

Dowód. Przedstawmy $\mathbb{R}$ jako suma

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

zbiorów liczb wymiernych i niewymiernych. Skoro $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny i $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny, różnica $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nie może być przeliczalna. □

Doszliśmy zatem do bardzo nieintuicyjnego faktu: ilość „dziur” jest o wiele większa od ilości „pozostających kawałków” osi liczb wymiernych.

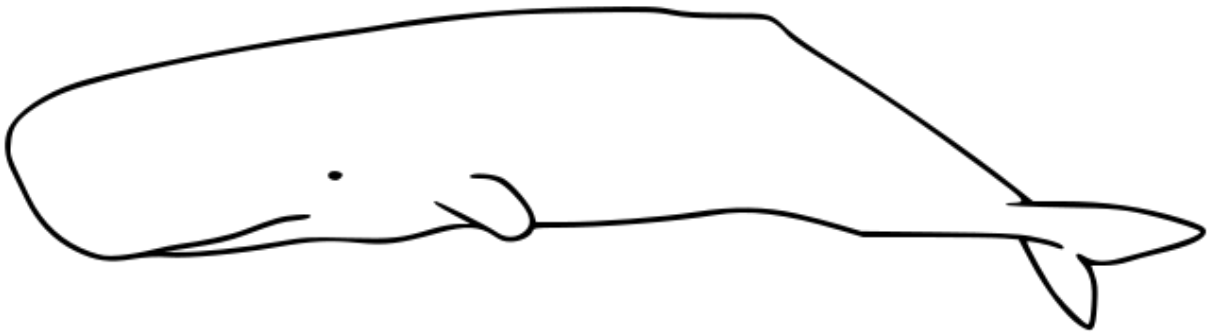
4.1.5 Archimedesowskość $\mathbb{R}$

Zaprezentujemy teraz pierwsze twierdzenie dotyczące liczb rzeczywistych, w który dowodzie wchodzą i właściwości algebraiczne i geometryczne zbioru $\mathbb{R}$: warto podkreślić, że, jeśli $\mathbb{R}$ jest rozpatrywany jako „jednowymiarowy” wszechświat, to poniższe twierdzenie jest całkowicie banalne.

Twierdzenie 4.2 (Archimedesowskość $\mathbb{R}$)**.** *Dla każdego $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, i dla każdego $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, istnieje $n \in \mathbb{N}$, taki że $nx > y$.*

W naszym jednowymiarowym wszechświecie, takie twierdzenie brzmiałoby „układając wystarczająco dużo psów jednego po drugim, można skonstruować łańcuch psów dłuższy niż wieloryb”. Jak Albert Einstein powiedziałby, *cała nauka to nic innego niż udoskonalenie codziennego myślenia.*





Dowód. Ku sprzeczności, załóżmy, że

$$nx \leq y\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{63}$$

Innymi słowy, podzbiór

$$A := \{nx \mid n \in \mathbb{N}\} \tag{64}$$

jest ograniczony z góry. Z własności istnienia kresów górnych zachodzi, że

$$\exists \alpha := \sup A\,. \tag{65}$$

Wówczas, skoro $x > 0$, $\alpha - x$ *nie jest* ograniczeniem górnym, wtedy istnieje m taki, że $mx > \alpha - x$. Dodając x otrzymamy $(m+1)x > \alpha$. To sprzeczność, ponieważ $(m+1)x \in A$ oraz $\alpha = \sup A$. □

(Istotna) różnica między dowodem „psem i wielorybem” a powyższym dowodem „po matematycznemu” polega na tym, że pierwsza jest ważna tylko dla $\mathbb{R}$, a druga dla każdego ciała uporządkowanego z własnością istnienia kresów górnych.

4.1.6 Gęstość $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$

Jedna z najbardziej podstawowych i niebanalnych właściwości geometrycznej osi liczb rzeczywistych łatwo pochodzi z powyższego „banalnego” twierdzenia: w matematyce niebanalne rzeczy zawsze rodzą się z banalnych.

Wniosek 4.2 (Gęstość $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$)**.** *Dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ takich, że, $x < y$, istnieje $q \in \mathbb{Q}$ taki, że $x < q < y$.*

Dowód. Na mocy Twierdzenia 4.2, istnieje $n \in \mathbb{N}$ taki, że

$$n(y - x) > 1\,. \tag{66}$$

Jeszcze raz stosując Twierdzenie 4.2, znajdźmy $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, takie, że

$$\begin{aligned} m_2 &> -nx\,, \\ m_1 &> nx\,. \end{aligned}$$

(Uwaga: powyżej używaliśmy **tylko raz** Twierdzenie 4.2, w zależności od znaku nx; istotnie, każda liczba ujemna jest ściśle mniejsza od liczby naturalnej 1.) Podsumowując,

$$-m_2 < nx < m_1\,. \tag{67}$$

Skoro $-m_2$ i m_1 są liczbami całkowitymi i $m_1 > -m_2$, musi istnieć $m \in \mathbb{Z}$ taki, że

$$-m_2 \leq m - 1 < nx < m \leq m_1 \,. \tag{68}$$

Istotnie, m jest najmniejszą liczbą całkowita pomiędzy $-m_2$ a m_1 taką, że $m > nx$.

Z (68) wynika $m < nx + 1$ i z (66) wynika $ny > nx + 1$. Wówczas $ny > m$. Czyli,

$$nx < m < ny \,, \tag{69}$$

co daje, po dzieleniu przez n,

$$x < q := \frac{m}{n} < y \,. \tag{70}$$

□

4.2 Funkcje rzeczywiste liczb rzeczywistych

Wbrew pozorom (i to jest bardzo niestrawne studentom) jedna z najbardziej podstawowych funkcji, o której możemy myśleć, tj. **potęgowanie**, w ramach osi liczb rzeczywistych, **ma naturę geometryczną**.

4.2.1 Potęgi liczb rzeczywistych

Twierdzenie 4.3. *Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x > 0$ i dowolnej liczby naturalnej istnieje jedna i tylko jedna dodatnia liczba rzeczywista y taka, że $y^n = x$.*

Powyższą liczbę nazywa się $x^{1/n}$.

Dowód. **Jedyność.** Jeśli mamy dwa różne elementy y_1 i y_2 takie, że $y_1^n = x$ i $y_2^n = x$, to otrzymamy sprzeczność, ponieważ $y_1 \neq y_2$ pociąga $y_1^n \neq y_2^n$, t.j. $x \neq x$.

Istnienie. Zdefiniujemy zbiór

$$E := \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0 \,, \quad t^n < x\} \tag{71}$$

i zaobserwujemy, że E jest niepusty i ograniczony z góry. Niepusty, ponieważ E zawiera element $\frac{x}{1+x}$. Istotnie,

$$\frac{x}{1+x} < 1 \,, \frac{x}{1+x} < x \Rightarrow \left(\frac{x}{1+x}\right)^n < \frac{x}{1+x} < x \Rightarrow \frac{x}{1+x} \in E \,. \tag{72}$$

Zaobserwujmy, że

$$1 + x > 1 \,, 1 + x > x \Rightarrow (1+x)^n > 1 + x > x \,. \tag{73}$$

Otóż liczba $1+x$ jest ograniczeniem górnym zbioru E: gdyby tak nie było, to istniałby element $\xi \in E$, taki że, $\xi > 1+x > 1$, z czego wynikałoby, że $\xi^n > (1+x)^n > x$, co zaprzeczałby to, że $\xi \in E \Rightarrow \xi^n < x$.

Wówczas istnieje kres górny $y := \sup E$. W reszcie dowodu należy sprawdzić, że ten y jest dokładnie tym elementem, co szukaliśmy, tj. $y^n = x$.

Niech będzie, ku sprzeczności, $y^n > x$ lub $y^n < x$.

Zacznijmy od przypadku, gdy $y^n < x$. Dla każdej $\delta > 0$, liczba $y + \delta$ jest większa od $\sup E$, wobec tego $y + \delta \notin E \Rightarrow (y + \delta)^n \geq x$. Wynika z tego, że

$$y^n < x \leq (y + \delta)^n \quad \forall \delta > 0 \,,$$

co sprowadzi do sprzeczności $y^n < y^n$.

Niech $y^n > x$. Dla każdej $\delta > 0$, liczba $y - \delta$ jest mniejsza od $\sup E$, wobec tego $y - \delta \in E \Rightarrow (y - \delta)^n < x$. Wynika z tego, że

$$y^n > x > (y - \delta)^n \quad \forall \delta > 0 \,,$$

co znowu sprowadzi do sprzeczności $y^n > y^n$.

□

Wniosek 4.3. *Jeżeli a i b są dodatnimi liczbami rzeczywistymi, a n jest liczbą naturalną, to*

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n} b^{1/n} \,. \tag{74}$$

Dowód. Dzięki Twierdzeniu 4.3, wystarczy udowodnić, że

$$(a^{1/n} b^{1/n})^n = ab \,, \tag{75}$$

co jest czymś banalnym. □

4.2.2 Pierwiastki nieparzystego stopnia

Istnieją dwie szkoły myślenia, jeśli chodzi o pierwiastki nieparzystego stopnia. Według jednej – którą przyjmujemy tu – pierwiastek

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

ma sens tylko dla $x \geq 0$ niezależnie od parzystości n; według drugiej

$$\sqrt[2k+1]{-x} = -\sqrt[2k+1]{x}\,, \quad \forall x \geq 0\,, \quad \forall k \in \mathbb{N}\,, \tag{76}$$

tj. pierwiastki nieparzystego stopnia są definiowane dla każdej liczby rzeczywistej. Niemniej jednak, z (76) wynikałoby, np., że

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2\,,$$

tj. definicja (76) nie jest kompatybilna z właściwości algebraicznych potęg, a mianowicie z wzorami rodzaju

$$x^{\frac{1}{3}} = (x^2)^{\frac{1}{6}}\,,$$

których będziemy potrzebowali w dalszym rozwoju teorii, przede wszystkim w definicji potęg o niewymiernych wykładnikach, np. x^{π}.

Problemy te znikną w Matematyce II po wprowadzeniu liczb zespolonych.

4.2.3 Algebra funkcji

Funkcje $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ posiadają pewne wspólne właściwości z liczbami rzeczywistymi. Można je dodawać i mnożyć. Można też porównywać je. Ale należy zauważyć, że:

- Elementem neutralnym względem dodawania jest *funkcja stała do zera*; jeśli nawet oznaczamy ją jako 0, jest ona funkcją a nie liczbą!
- Podobnie, elementem neutralnym względem mnożenia jest *funkcja stała do jedynki.*
- *Nie zawsze można porównać funkcje* (faktycznie, przepadki, kiedy to można zrobić są wyjątkowe): istnieją funkcje f, g, takie że żaden z przypadków $f < g$, $f = g$, $f > g$ nie zachodzi.
- Jest wielka różnica między zdaniem „funkcja f jest różna od 0" a „funkcja f jest różna od 0 dla *każdego* x"; w pierwszym przypadku, znaczy to, że *istnieje* x, taki że $f(x) \neq 0$; w drugim przypadku, mamy w szczególności, że *istnieje funkcja* $\frac{1}{f(x)}$ (czytamy to po prostu „jeden przez $f(x)$").
- Jest wielka różnica między *funkcją „jeden przez* $f(x)$*"* $\frac{1}{f(x)}$ a *funkcją odwrotną* $f^{-1}(x)$. Często studenci się tu mylą.

Jako przykład ostatniego przypadku, niech $f(x) = \operatorname{tg}(x)$. To $\frac{1}{f(x)} = \operatorname{ctg}(x)$, natomiast $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x)$. Zupełnie inna para kaloszy.

Definicja 4.1. *Funkcja f, taka że $f(-x) = f(x)$ (odp., $-f(x)$) nazywa się* parzysta *(odp.,* nieparzysta*). Jeśli $f(x+y) = f(x) + f(y)$, to f jest* liniowa*. Jeśli $f(x + kT) = f(x)$ dla każdej liczby $k \in \mathbb{Z}$, to f jest* funkcją okresową *a T jej okresem.*

4.2.4 Miejsce zerowe, monotoniczność

Definicja 4.2. Miejscem zerowym x_0 *funkcji f nazywamy argument taki, że $f(x_0)$=0.*

Uwaga 4.2. Zbiorem miejsc zerowych funkcji f jest *poziomica* $f^{-1}(0)$.

Następujące właściwości funkcji rzeczywistych (tzn. $f : X \to Y$, gdzie X, Y są podzbiorami $\mathbb{R}$) są często ważne w zastosowaniach.

Definicja 4.3 (Monotoniczność funkcji)**.**

- *Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy* rosnąca *na zbiorze $A \subset X \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$*
- *Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy* malejąca *na zbiorze $A \subset X \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$*
- *Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy* stała *na zbiorze $A \subset X \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2)$*

4.2.5 Ograniczoność funkcji

Definicja 4.4. *Funkcję f nazywamy* ograniczoną z do/lu

$$\Leftrightarrow \exists_{m\in\mathbb{R}} : \forall_{x\in D} : f(x) \geq m$$

Definicja 4.5. *Funkcję f nazywamy* ograniczoną z góry

$$\Leftrightarrow \exists_{M\in\mathbb{R}} : \forall_{x\in D} : f(x) \leq M$$

Definicja 4.6. *Funkcję f nazywamy* ograniczoną *jeśli jest jednocześnie ograniczona z góry i z dołu.*

Przykład 4.3. Funkcja $F_1 : \mathbb{R}_+ \ni x \to F_1(x) := \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ jest ograniczona z dołu; $F_2 : \mathbb{R}_- \ni x \to F_2(x) := \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ jest ograniczona z góry; $F_3 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \to F_3(x) := \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ nie jest ograniczona; a funkcja $F_4 : \mathbb{R} \ni x \to F_4(x) := \sin^2(x) \in \mathbb{R}$ jest ograniczona.

Definicja 4.7. *Funkcja $f : X \to Y$ przyjmuje* największą *wartość $y_{max} \in Y$ dla $x_0 \in X \Leftrightarrow f(x_0) = y_{max}$ oraz $\forall_{x\in X} : f(x) \leq f(x_0)$.*

Analogicznie

Definicja 4.8. *Funkcja $f : X \to Y$ przyjmuje* najmniejszą *wartość $y_{min} \in Y$ dla $x_0 \in X \Leftrightarrow f(x_0) = y_{min}$ oraz $\forall_{x\in X} : f(x) \geq f(x_0)$.*

4.2.6 Funkcje uwikłane

Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wówczas mamy podzbiór

$$Z := \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid F(x, y) = 0\} . \tag{77}$$

Niekoniecznie Z jest wykresem funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Przykład 4.4. Jeśli $F = y - x^2$, to Z jest parabolą; jeśli $F = x^2 + y^2 - 1$, to Z jest okręgiem; jeśli $F = y^2 - x^2 - 1$, to Z jest hiperbolą.

4.2.7 Funkcje wielomianowe

Najprostsza funkcja, która nie jest stała, to funkcja identycznościowa:

$$x \longmapsto x , \tag{78}$$

czyli $f(x) = x$. Stosując mnożenie i dodawanie, można otrzymać z tej funkcji wszystkie wielomiany:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n . \tag{79}$$

Ale w ten sposób otrzymujemy małą część wszechświata *wszystkich funkcji od $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$*. Na przykład, najbardziej interesujące funkcje (e^x, $\sin(x)$, itd.) *nie są wielomianami*! Dopiero po wprowadzeniu pojęcia szeregu, będziemy mogli konstruować e^x z x. Ale ta konstrukcja nie jest algebraiczna, ale raczej geometryczna: nie korzystamy z działań algebraicznych, ale raczej z pojęcia *zbieżności*.

5 Tydzień V: 29. października 2024

5.1 Ciągi i ich granice

5.1.1 Przekąska: niejednoznaczność nieskończonej sumy

Operacje dotąd spotykane były **operacjami dwuargumentowymi**, jakim jest, np. zwykła suma liczb:

$$\begin{aligned} \Sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} , \\ (a, b) &\longmapsto \Sigma(a, b) := a + b , \end{aligned}$$

Przykład 5.1. Branie elementu odwrotnego jest przykładem tzw. operacji jednoargumentowej, tj.

$$\begin{aligned} O : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \\ a &\longmapsto O(a) := a^{-1}\,. \end{aligned}$$

Zauważmy, że dwukrotnie branie odwrotności oddaje pierwotną liczbę, czyli $O^2 = \mathrm{id}$: taka operacja zwana jest **idempotentną**.

Jeśli operacja dwuargumentowa Σ jest łączna i przemienna, to można na jej podstawie zdefiniować **operację trójargumentową** $\Sigma^{(3)}$ w sposób jednoznaczny:

$$\begin{aligned} \Sigma^{(3)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\,, \\ (a,b,c) &\longmapsto \Sigma^{(3)}(a,b,c) := \Sigma(\Sigma(a+b),c) = a+b+c\,, \end{aligned}$$

skoro nie ma różnicy między napisami $(a+b)+c$ i $a+(b+c)$ i kolejność składników. Jesteśmy zatem kuszeni do definicji nieskończonej sumę $\Sigma^{(\infty)}$: **można to zrobić, ale skoro wynik nie jest jednoznacznie określony, matematycy wolą „zabronić" taką definicję**. Istotnie,

$$\begin{aligned} \Sigma^{(\infty)}(1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,\ldots) &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0\,, \\ &= 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots = 1\,, \\ &\vdots \\ &= \text{dowolna liczba całkowita.} \end{aligned}$$

5.1.2 Wyjątek: dobrze określona nieskończona suma

Weźmy pod uwagę kwadrat o krawędzi 1. Podzielmy go na dwa, i oznaczmy

$$x_1 := \frac{1}{2} \tag{80}$$

pole powierzchni jednej połowy. Podzielmy pozostającą połowę na dwa i niech

$$x_2 := \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \tag{81}$$

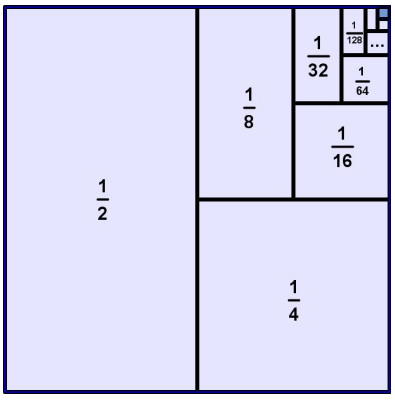
będzie polem powierzchni wielokąta składającego się z pierwszej połowy i jednej czwartej. Podzielmy pozostającą czwartą na dwa i niech

$$x_2 := \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \tag{82}$$

będzie polem powierzchni wielokąta składająca się z pierwszej połowy, z pierwszej czwartej i jednej ósmej. Tak robiąc, otrzymamy

$$x_n := x_{n-1} + \frac{1}{2^n} \tag{83}$$

dla każdego n.



Powyżej zdefiniowana funkcja

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & x_n \end{array}$$

jest przykładem *ciągu*.

Definicja 5.1. **Ciągiem** o rzeczywistych wyrazach *jest podzbiór*

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n\} \subset \mathbb{R}\,. \tag{84}$$

Element x_n *nazywamy* n–tym **wyrazem** *ciągu.*

Definicja 5.2. *Ciąg* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *taki, że*

$$x_{n+1} \geq x_n\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, \tag{85}$$

jest rosnącym ciągiem. *Analogicznie można zdefiniować* ciąg malejący. *Ciąg, który jest albo rosnący albo malejący, nazywa się* **monotoniczny**.

Przykład 5.2. Z konstrukcji, ciąg (83) jest rosnący.

Niech x_0 będzie polem powierzchni całego prostokąta. Skoro każdy wielokąt zrobiony z kawałków kwadratu jest, bez żadnej wątpliwości, zawarty w kwadracie, mamy

$$x_n \leq x_0 = 1\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{86}$$

Nasz ciąg jest *ograniczony.*

Intuicja sugeruje, że

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = x_0 = 1\,, \tag{87}$$

ponieważ, z grubsza mówiąc, „ostatecznie cały kwadrat zostanie pokryty przez jego własne kawałki".

To typowy przykład, kiedy matematyka jeszcze nie posiada odpowiedniego pojęcia, aby formalizować intuicję. W szczególności, jak pokazano powyżej w Sekcji 5.1.1, wyrażenie po lewej stronie (87) **nie ma żadnego sensu**.

Mimo tego, że nieskończona suma $\Sigma^{(\infty)}$ nie jest jednoznacznie zdefiniowana dla ogólnego wyboru składników, dla pewnych szczegółowych wyborów, np.

$$\Sigma^{(\infty)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n} + \cdots\right) = 1\,,$$

ma sens i przyjmuje konkretną wartość. Zbiór nieskończenie wielu składników, które dają się zsumować, nazywa się **szeregiem zbieżnym**.

5.1.3 Pojęcia zbieżności i granicy

Cecha, która pozwala odróżniać szeregi nieskończenie wielu składników, które „da się zsumować", zwana jest **zbieżnością**: ona nie ma natury algebraicznej (nie wyraża się poprzez operacje algebraiczne i ich właściwości) – ma raczej naturę geometryczną.

W odniesieniu do ciągu (83), jesteśmy przekonanymi, że nie można otrzymać całego pola powierzchni kwadratu (czyli 1) przez działania algebraiczne na polach powierzchni kawałków (czyli $\frac{1}{2^n}$): spróbujmy zatem sprawdzić, czy można go otrzymać **dowolnie dobrą precyzją**.

Wprowadzimy zaraz **najsłynniejszy symbol analizy matematycznej: grecka literka epsilon**.

Niech liczba dodatnia ϵ oznacza **precyzję**, t.j. **największy błąd, który jesteśmy gotowi przyjąć**.

Pytanie: czy można wybrać n takie, że błąd, tzn. różnica pomiędzy doskonałą wartością ($= 1$) a przybliżoną wartością ($= x_n$) będzie mniejszy niż największy dopuszczalny błąd, tzn. ϵ?

Odpowiedz: tak, ponieważ widać, że

$$x_0 - x_n = 1 - x_n = \frac{1}{2^n} < \epsilon \tag{88}$$

(patrz powyższy rysunek) o ile tylko

$$n > \log_2(\tfrac{1}{\epsilon})\,. \tag{89}$$

Widać zarówno, że, jeśli n_0 jest najmniejszą liczbą naturalną spełniającą (89), to każda liczba $n \geq n_0$ go spełnia też.

Podsumowując, okazuje się, że:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid |x_n - 1| \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0\,. \tag{90}$$

W takim razie, się mówi, że ciąg $\{x_n\}$ jest **zbieżny** i 1 jest jego **granicą**.

Definicja 5.3. *Niech*

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{91}$$

będzie ciągiem o rzeczywistych wyrazach. Jeśli istnieje liczba l taka, że

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid |x_n - l| \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0\,, \tag{92}$$

to ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny *a liczba l jest jego* granicą. *W takim razie, piszemy*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l\,. \tag{93}$$

Ciąg, granica którego wynosi $\pm\infty$, nazywa się rozbieżny. *W pozostających przypadkach, mówi się, że ciąg* nie posiada granicy.

Przykład 5.3. Niech

$$x_n = a\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, \tag{94}$$

będzie ciągiem stałym do $a \in \mathbb{R}$. To można ustalić $l := a$, skąd widać, że

$$|x_n - l| = |a - a| = 0 < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, \tag{95}$$

t.j., warunek (92) jest spełniony dla każdego n.

Przykład 5.4. Niech

$$x_n = \frac{1}{n}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{96}$$

Skoro x_n „jest co raz mniejsze", rozsądnie jest podejrzewać, że $l := 0$ jest granicą. Sprawdźmy. Widać, że

$$|x_n - 0| = |\tfrac{1}{n} - 0| = \tfrac{1}{n} < \epsilon \tag{97}$$

o ile tylko

$$n \geq n_0 := \text{ najmniejsza liczba naturalna większa od } \frac{1}{\epsilon}. \tag{98}$$

Innymi słowy, istnieje ten n_0 wspomniany w warunku (92).

5.1.4 Właściwości granic

Twierdzenie 5.1. *Granica ciągu, jeśli istnieje, jest jedyna.*

Dowód. Ku sprzeczności, założmy, że istnieją l_1 oraz l_2 spełniający (92), takie, że $l_1 \neq l_2$.

Wówczas odległość $|l_1 - l_2|$ jest > 0. Niech ϵ będzie $\frac{1}{2}$ tej odległości:

$$\epsilon := \tfrac{1}{2}|l_1 - l_2| > 0\,. \tag{99}$$

Na mocy (92) dla l_1 i l_2, muszą istnieć $n_0^{(1)}$ i $n_0^{(2)}$ takie, że

$$|x_n - l_1| < \epsilon\,, \quad |x_n - l_2| < \epsilon\,, \tag{100}$$

o ile tylko $n \geq n_0 := \max\{n_0^{(1)}, n_0^{(2)}\}$.

Ale

$$]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon[\cap]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[= \emptyset\,. \tag{101}$$

□

Stwierdzenie 5.1 (Własności arytmetyczne granic)**.** *Niech $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ będą zbieżnymi ciągami. Wówczas:*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n\,, \tag{102}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n\,, \tag{103}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n\,, \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{104}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}\,, \tag{105}$$

gdzie w ostatnim wierszu $y_n \neq 0$ dla każdego n oraz $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$. ***UWAGA:*** *powyższe operacje obejmują liczby rozszerzone, czyli przyjmiemy (48)–(55) oraz (60)*

Twierdzenie 5.2 (Bolzano–Weierstrassa)**.** *Niech $\{x_n\}$ będzie rosnącym (odp., malejącym) ciągiem. Wówczas $\{x_n\}$ jest ograniczony z góry (odp., z dołu) wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny.*

Wniosek 5.1. *Ciąg monotoniczny ale nie ograniczony musi być rozbieżny.*

W takich przypadkach mówimy, że

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty\,. \tag{106}$$

(Ze znakiem + jeśli ciąg wzrasta i − jeśli maleje.)

Twierdzenie 5.1 można uogólnić do takich rozbieżnych ciągów, korzystając z rozszerzonych liczb rzeczywistych i biorąc pod uwagę, że symbole $\pm\infty$ nie są liczbami!

Twierdzenie 5.3 (O trzech ciągach)**.** *Niech $\{x_n\}$ i $\{z_n\}$ będą zbieżnymi ciągami o tej samej granicy l. Załóżmy, że*

$$x_n \leq y_n \leq z_n\,, \tag{107}$$

gdzie $\{y_n\}$ jest dowolnym ciągiem. Wówczas $\{y_n\}$ jest zbieżny i jego granicą jest l.

5.1.5 Kryterium ilorazowe

Twierdzenie 5.4. *Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem o* ***dodatnich*** *rzeczywistych wyrazach. Jeśli*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = l < 1\,, \tag{108}$$

to

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0\,. \tag{109}$$

Jeśli

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = L > 1\,, \tag{110}$$

to

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty\,. \tag{111}$$

Dowód. Niech $\epsilon > 0$ taki, że $l + \epsilon < 1$. Wówczas istnieje n_0 takie, że

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq l + \epsilon\,, \quad \forall n \geq n_0\,. \tag{112}$$

Wtedy

$$x_n \leq (l+\epsilon)^{n-n_0} x_{n_0}\,, \quad \forall n > n_0\,, \tag{113}$$

z czego wynika

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} (l+\epsilon)^{n-n_0} x_{n_0} = 0\,. \tag{114}$$

Podobnie, niech $\epsilon > 0$ taki, że $L - \epsilon > 1$. Wówczas istnieje n_0 takie, że

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq L - \epsilon\,, \quad \forall n \geq n_0\,. \tag{115}$$

Wtedy

$$x_n \geq (L-\epsilon)^{n-n_0} x_{n_0}\,, \quad \forall n > n_0\,, \tag{116}$$

z czego wynika

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} (L-\epsilon)^{n-n_0} x_{n_0} = +\infty\,. \tag{117}$$

□

Przykład 5.5 (Z ćwiczeń). Musimy wykazać, że $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n}) = +\infty$. Do tego celu, zaobserwujmy, że

$$x_n := \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{n+1}{n}\frac{n+2}{n}\cdots\frac{n+n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n^{n+1}} \tag{118}$$

Obliczmy

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!\,(n+1)^{n+2}}\frac{n!\,n^{n+1}}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)n^{n+1}}{(n+1)^{n+3}} = \frac{2(2n+1)n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} = 2\frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \tag{119}$$

wtedy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} 2\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{4}{e} > 1 \tag{120}$$

Wynik zachodzi z twierdzenia 5.4.

5.1.6 Liczby rzeczywiste jako ciągi Cauchy'ego

Weźmy pod uwagę okrąg o promieniu 1. To jego pole powierzchni wynosi

$$\pi \cdot 1^2 = \pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \tag{121}$$

Załóżmy, że mamy do naszej dyspozycji kwadratowe płyty o krawędzi 1. Ich pole powierzchni wynosi 1. Widać, że można wkładać tylko jeden egzemplarz takiej płyty w okrąg.

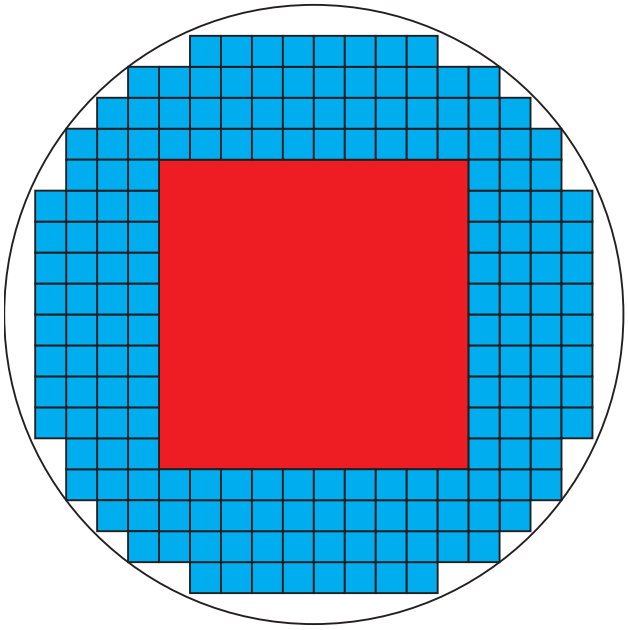
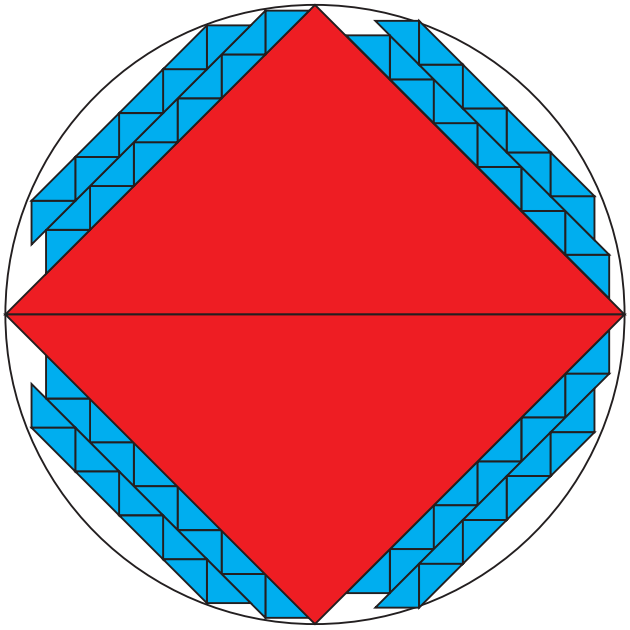
Niech

$$q_1 := \text{ pole powierzchni wszystkich płyt o krawędzi 1 pasujących w okręgu} = 1\,.$$

Przyjdźmy teraz do płyt o krawędzi $\frac{1}{10}$, tzn. o polu powierzchni $\frac{1}{100}$. Widać, że zmieszczą 176 takich płyt:

$$q_1 := \text{ pole powierzchni wszystkich płyt o krawędzi 1 i } \tfrac{1}{10} \text{ pasujących w okręgu} = 1 + \frac{176}{100} = 2,76\,.$$

Zdefiniujmy analogicznie q_n, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Widać, że ciąg liczb **wymiernych** $\{q_n\}$ jest rosnący i ograniczony, a jego granicą jest liczba **niewymierną** π.

W sekcji (3.3.4) zdefiniowaliśmy liczby niewymierne za pomocą podziałów Dedekinda: załóżmy, że tego nigdy nie zrobiliśmy i **wymyślmy inną definicję liczb rzeczywistych**, opartą na powyższym przykładzie z liczbą π. Konkretniej: jak zdefiniować π? Jedna możliwość to

$$\pi \text{ jest, z definicji, ciągiem } \{q_n\}\,. \tag{122}$$

Ale ktoś mógłby protestować: dlaczego korzystać z kwadratowych płyt a nie trójkątowych? Istotnie (patrz rysunek) byśmy otrzymywali inny ciąg $\{p_n\}$ liczb wymiernych, dążący do tego samego π. Który jest lepszy? Żaden. Należy rozpatrywać razem **wszystkie** ciągi, dążących to tej samej granicy. Ale jak formalizować fakt, że dążą do π, jeśli π jeszcze nie jest znany? Łatwo:

$$\begin{aligned} & q_n \longrightarrow \pi \\ (-) \quad & p_n \longrightarrow \pi \\ \Rightarrow \quad & q_n - p_n \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Czyli, można wprowadzić **relację**

$$\{q_n\} \sim \{p_n\} \Leftrightarrow \lim q_n - p_n = 0 \tag{123}$$

i łatwo sprawdzić, że relacja $\sim$ jest **relacją równoważności**.

Można wtedy spróbować zdefiniować

$$\text{zbiór liczb rzeczywistych} := \text{zbiór klas równoważności ciągów liczb wymiernych.} \tag{124}$$

Pamiętajmy, że *klas równoważności* pewnego elementu x jest podzbiorem wszystkich elementów, których są równoważni temu x.

Ale niestety, powyższa jeszcze nie jest dobrą definicją. Dlaczego? Ponieważ takie ciągi postaci, n.p., $\{x_n := n\}_{n\in N}$ lub $\{y_n := (-1)^n\}_{n\in N}$, nie odpowiadają żadnej liczby (one są rozbieżne!) Jak temu zapobiegać?

Nie można poprawić sytuację, po prosto mówiąc: „to weźmy tylko zbieżne ciągi". Istotnie, **aby mówić o zbieżności potrzebujemy pojęcia liczby rzeczywistej—to co akurat próbujemy definiować**!

Rozpatrzmy jeszcze raz na okrąg pokryty przez kwadratowe płyty. Fakt, że

$$\pi - q_n \longrightarrow 0 \tag{125}$$

jest oczywisty. Mniej oczywisty, ale rozsądny, to fakt, że

$$q_m - q_n \text{ zbliża się do 0 dla dostatecznych dużych } n, m\,. \tag{126}$$

Warunek (126) pochodzi prosto od warunku (126), ale jego zaletą jest fakt, że **w niego nie występuje żadna liczba niewymierna**!

Definicja 5.4. *Ciąg* $\{x_n\}$ *nazywa się* ciągiem Cauchy'ego, *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; taki,\; że\; |x_m - x_n| < \epsilon \quad \forall m, n \geq n_0 \,. \tag{127}$$

Na reszcie jesteśmy w stanie, aby właściwie zdefiniować zbiór liczb rzeczywistych nie używając podziałów Dedekinda – ale raczej ciągów Cauchy'ego liczb wymiernych:

Definicja 5.5. *Zbiorem liczb rzeczywistych jest zbiór*

$$\mathbb{R} := \{[\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \mid \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} \; jest\; ciągiem\; Cauchy'ego\} \tag{128}$$

klas równoważności ***ciągów Cauchy'ego*** *liczb wymiernych.*

Twierdzenie 5.5. *Niech* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *będzie ciągiem o rzeczywistych wyrazach. Wówczas* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *jest ciągiem zbieżnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągiem Cauchy'ego.*

5.1.7 Przybliżenie liczby niewymiernej poprzez ciąg liczb wymiernych

Twierdzenie 5.6. *Dla każdego* $r \in \mathbb{R}$ *istnieje rosnący ciąg* $\{q_n\}$ *liczb wymiernych taki, że* $\lim_{n\to\infty} q_n = r$.

Dowód. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, przedział

$$]r - \tfrac{1}{n}, r - \tfrac{1}{n+1}[\tag{129}$$

zawiera przynajmniej jedną liczbę wymierną. Niech ona będzie naszym q_n. Jak udowodnić, że każdy przedział $]a, b[\subset \mathbb{R}$ zawiera przynajmniej jedną liczbę wymierną?

Wynika to bezpośrednio z Wniosku 4.2. □

5.1.8 Potęgi o rzeczywistych wykładnikach

Teraz można zdefiniować a^r dla dowolnego wykładnika $r \in \mathbb{R}$. Pamiętajmy, że należy przypuszczać $a > 0$. Weźmy sobie jakiś rosnący ciąg $\{q_n\}$ liczb wymiernych taki, że $\lim_{n\to\infty} q_n = r$ i zdefiniujmy

$$a^r := \lim_{n\to\infty} a^{q_n} \,. \tag{130}$$

Twierdzenie 5.7. *Powyższa definicja ma sens i* $a^{r+s} = a^r a^s$ *dla każdych* $r, s \in \mathbb{R}$.

Dowód. Pamiętajmy, że

$$a^0 = 1 \,, \quad a^{p+q} = a^p a^q \,, \quad \forall p, q \in \mathbb{Q} \,. \tag{131}$$

Zakładamy $a > 1$ i $q_n > 0$. Wówczas

$$q_{n+1} \geq q_n \Rightarrow a^{q_{n+1}} = a^{q_{n+1}-q_n+q_n} = a^{q_{n+1}-q_n} a^{q_n} \geq a^{q_n} \,, \tag{132}$$

t.j., $\{a^{q_n}\}$ jest rosnący. Podobnie można wykazać, że z ograniczoności $\{q_n\}$ zachodzi ograniczoność $\{a^{q_n}\}$. Z tego wynika, że granica (130) istnieje. Inne przypadki są analogiczne.

Na mocy Twierdzenia 5.6, istnieją rosnące ciągi $\{p_n\}$ oraz $\{q_n\}$ liczb wymiernych takie, że $\lim_{n\to\infty} p_n = r$ oraz $\lim_{n\to\infty} q_n = s$. Wówczas $\{p_n+q_n\}$ jest ciągiem (rosnącym) liczb wymiernych taki, że $\lim_{n\to\infty}(p_n+q_n) = r+s$, a więc

$$a^{r+s} = \lim_{n\to\infty} a^{p_n+q_n} = \lim_{n\to\infty} a^{p_n} a^{q_n} = \left(\lim_{n\to\infty} a^{p_n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} a^{q_n}\right) = a^r a^s \,. \tag{133}$$

□

5.2 Funkcje wykładnicze i liczba Nepera

5.2.1 Definicja funkcji wykładniczej poprzez prostą styczną

Jesteśmy teraz w stanie zdefiniować „sławną" liczbę e oraz związaną z nią funkcję e^x. Wstępnie, zauważmy, że, dla każdego $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ funkcja $f(x) := a^x$ spełnia poniższe warunki:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1\,, \\ f(1) &= a\,, \\ f(x+y) &= f(x)\cdot f(y)\,. \end{aligned}$$

Niech $g(x) := b^x$. Zauważmy, że f i g nie są porównywalne. Ale, jeśli $b > a$, wykres g jest nad wykresem f dla $x > 0$ i pod wykresem f dla $x < 0$.

Definicja 5.6. *Jedyna liczba $a \in \mathbb{R}$, taka że prosta styczna do wykresu a^x w punkcie $(0,1)$ jest równoległa do $y = x$, nazywa się* liczbą Nepera *i oznaczamy ją symbolem e. Funkcja* $\exp(x) := e^x$ *jest* funkcją wykładniczą.

Widać, zę $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ jest bijekcją.

5.2.2 Definicja funkcji wykładniczej poprzez granicę ciągu funkcyjnej

Będziemy potrzebowali nierówności Bernoulli'ego: $(1+a)^n \geq 1 + na$, $\forall a > -1$, i pojęcia „od pewnego miejsca". Ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy jakikolwiek *podciąg* postaci $\{x_n\}_{n\geq n_0}$ jest zbieżny. Mówimy, że rozpatrzymy ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tylko *od pewnego miejsca.*

Będziemy potrzebowali też powyższego lematu.

Lemat 5.1. *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, *to*

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^n = 1\,. \tag{134}$$

Dowód. Oparty na twierdzeniu o trzech ciągach oraz nierówności Bernoulli'ego. Istotnie,

$$\frac{1}{(1+a_n)^n} = \left(1 - \frac{a_n}{1+a_n}\right)^n \geq 1 - \frac{na_n}{1+a_n} \tag{135}$$

oraz

$$(1+a_n)^n \geq 1 + na_n \Rightarrow \frac{1}{(1+a_n)^n} \leq \frac{1}{1+a_n} \tag{136}$$

dla dostatecznych dużych n. Wówczas

$$1 - \frac{na_n}{1+a_n} \leq \frac{1}{(1+a_n)^n} \leq \frac{1}{1+a_n} \tag{137}$$

i obydwa zewnętrze ciągi dążą do 1. □

Twierdzenie 5.8 (• • • **Zadanie egzaminacyjne nr. 1**)**.** *Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ ciąg*

$$a_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{138}$$

jest zbieżny i jego granica wynosi e^x.

Dowód. Ustalmy x i udowodnijmy, że $\{a_n(x)\}$ jest rosnący i ograniczony. Z tego będzie wynikało, że istnieje granica

$$a(x) := \lim_{n\to\infty} a_n(x)\,. \tag{139}$$

Oczywiście, wystarczy, że monotoniczność zachodzi „od pewnego miejsca”: rozpatrujmy tylko $n > |x|$, i spróbujmy udowodnić, że $a_{n+1}(x) > a_n(x)$. Do tego celu, warto zaobserwować, że

$$\begin{aligned} a_{n+1}(x) > a_n(x) &\Leftrightarrow \\ \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} > 1 &\Leftrightarrow \\ \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}} \geq 1 &\Leftrightarrow \\ \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}} \geq \frac{1}{1+\frac{x}{n}} = \frac{n}{n+x} &\Leftrightarrow \\ \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{(n+1+x)n}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \geq \frac{n}{n+x} &\Leftrightarrow \\ \left(\frac{(n+1+x)n}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \geq \frac{n}{n+x} = 1-(n+1)\frac{x}{(n+1)(n+x)}\,. & \end{aligned}$$

Istotnie, dzięki naszemu założeniu, $n + x > 0$, z czego wynika $\frac{n+x}{n} = 1 + \frac{x}{n} > 0$ i $a_n(x) > 0$.

Ale nierówność

$$\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \geq 1-(n+1)\frac{x}{(n+1)(n+x)} \tag{140}$$

zachodzi, będąc przykładem nierówności Bernoulli'ego. Wtedy $a_n(x)$ rośnie od „pewnego miejsca”, mianowicie $n > |x|$.

Aby sprawdzić ograniczoność, załóżmy, że $x < 0$. Wówczas, od „pewnego miejsca”, mamy

$$0 < 1 + \frac{x}{n} < 1\,, \tag{141}$$

z czego wynika

$$a_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n < 1\,, \tag{142}$$

t.j., ciąg jest ograniczony. Wtedy istnieje granica $a(x)$, dla $x < 0$. Dla $x = 0$ granica wynosi 1.

Niech $x > 0$. Rozpiszmy

$$a_n(x) = \frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{a_n(-x)} \tag{143}$$

i zaobserwujmy, że

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x^2}{n^2}\right) = 0\,. \tag{144}$$

Wówczas, Lemat 5.1 pociąga

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1\,, \tag{145}$$

w związku z tym

$$a(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n(-x)} = a(-x)^{-1}\,. \tag{146}$$

Wówczas, $a(x)$ istnieje dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Teraz udowodnijmy, że

$$a(x+y) = a(x)a(y) \quad x, y \in \mathbb{R}\,. \tag{147}$$

To samo, jak udowodnić, że

$$\frac{a(x)a(y)}{a(x+y)} = 1\,. \tag{148}$$

Z definicji,

$$\begin{aligned}\frac{a(x)a(y)}{a(x+y)} &= \frac{\lim_{n\to\infty} a_n(x)\lim_{n\to\infty} a_n(y)}{\lim_{n\to\infty} a_n(x+y)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n .\end{aligned}$$

Przy tym,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right) = 0\,, \tag{149}$$

wobec tego Lemat 5.1 pociąga

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n = 1\,, \tag{150}$$

tak, jak chcieliśmy.

Podsumowując,

$$\begin{aligned} a:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\,,\\ x &\longmapsto a(x)\,,\end{aligned}$$

jest funkcją taką, że

$$a(0)=1\,,\quad a(x+y)=a(x)a(y)\,,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\,. \tag{151}$$

Jak udowodnić, że $a(x)=e^x$?

Podejście jest oparte na następującej uwadze. Załóżmy, że $x\in\mathbb{N}$. Wówczas

$$a(x)=a(1+1+\cdots+1)=a(1)a(1)\cdots a(1)=(a(1))^x\,. \tag{152}$$

Podobnie, weźmy sobie $\frac{1}{n}$ i zaobserwujmy, że

$$a(\tfrac{1}{n})^n = a(\tfrac{1}{n})a(\tfrac{1}{n})\cdots a(\tfrac{1}{n}) = a(\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n}+\cdots+\tfrac{1}{n}) = a(1)\,, \tag{153}$$

wobec tego

$$a(\tfrac{1}{n}) = a(1)^{\frac{1}{n}}\,. \tag{154}$$

Wówczas, już wiemy, że

$$a(x)=a^x\,,\quad \forall x\in\mathbb{Q}\,, \tag{155}$$

gdzie $a:=a(1)$. Czyli, aby skończyć dowód, wystarczy uogólnić (155) do wszystkich liczb rzeczywistych i sprawdzić, że linia styczna do wykresu funkcji $y=a(x)$ w punkcie $(0,1)$, jest równoległa do osi $y=x$. Istotnie, to pociąga $a=e$.

Strategia jest następująca: dla każdego $x\in\mathbb{R}$ istnieje rosnący ciąg $\{q_n\}$ liczb wymiernych taki, że $\lim_{n\to\infty} q_n = x$. Wówczas

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{q_n} = \lim_{n\to\infty} a(q_n) \tag{156}$$

i tylko potrzebujemy

$$\lim_{n\to\infty} a(q_n) = a(\lim_{n\to\infty} q_n) = a(x) \tag{157}$$

aby stwierdzić, że $a^x=a(x)$. Zaobserwujmy, że $\lim_{n\to\infty} q_n = x$ implikuje, że

$$\lim_{n\to\infty} x-q_n = 0\,. \tag{158}$$

Będziemy teraz potrzebowali nierówności

$$0 \leq a(x) - 1 - x \leq 2x^2\,, \quad |x| < \frac{1}{2}\,, \tag{159}$$

która zostanie udowodniona przed końcem całego dowodu.

Istotnie, dzięki (159), widać, że

$$\begin{aligned} |a(x-q_n)-1| &= |a(x-q_n)-1-(x-q_n)+(x-q_n)| \\ &\leq |a(x-q_n)-1-(x-q_n)| + |(x-q_n)| \\ &\leq 2(x-q_n)^2 + |(x-q_n)| \\ &\leq 3|(x-q_n)| \end{aligned}$$

dąży do zera, w związku z czym

$$\lim_{n\to\infty} a(x-q_n) - 1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a(x-q_n) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a(q_n)a(x)^{-1} = 1\,, \tag{160}$$

tj. $a(q_n)$ dąży do $a(x)$.

Mamy wtedy upragnione uogólnienie wzoru (155):

$$a(x) = a^x\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{161}$$

Prosta przez $(0,1) = (0,a^0)$ i punkt $(\frac{1}{m}, a^{\frac{1}{m}})$ ma nachylenie

$$s_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}}\,, \tag{162}$$

w związku z tym wystarczy sprawdzić, że

$$\lim_{m\to\infty} s_m = 1\,, \tag{163}$$

co jest

$$\lim_{m\to\infty} (s_m - 1) = \lim_{m\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{m}} - 1 - \frac{1}{m}}{\frac{1}{m}} = 0\,. \tag{164}$$

Dzięki nierówności (159)

$$0 \leq \frac{a^{\frac{1}{m}} - 1 - \frac{1}{m}}{\frac{1}{m}} \leq \frac{2(\frac{1}{m})^2}{\frac{1}{m}} = \frac{2}{m} \tag{165}$$

dąży do 0.

Pozostały do sprawdzenia nierówności (159). Pierwsza, tzn., $a(x) \geq 1 + x$ pochodzi prosto z nierówności Bernoulli'ego (o ile tylko $n \geq |x|$). Geometrycznie, mówi ona, że wykres funkcji $y = a(x)$ leży *nad* wykresem funkcji $y = 1 + x$ (jedyny punkt przekroczenia to $(0,1)$).

W szczególności, $a(-x) \geq 1 + (-x) = 1 - x$, a więc

$$a(x) = \frac{1}{a(-x)} \leq \frac{1}{1-x}\,, \tag{166}$$

co znaczy, że wykres funkcji $y = a(x)$ leży *pod* wykresem funkcji $y = \frac{1}{1-x}$.

Mamy wtedy $\frac{1}{2} < 1 - x < \frac{3}{2}$, a więc

$$a(x) - 1 - x \leq \frac{1}{1-x} - 1 - x = \frac{1 - 1 + x - x + x^2}{1-x} = \frac{x^2}{1-x} \leq 2x^2\,, \tag{167}$$

t.j. druga nierówność. □

6 Tydzień VI: 5. i 8. listopada 2024

6.1 Ciągłość funkcji

Definicja 6.1. *Przedziały*

$$[a,b]\,,\quad]a,b]\,,\quad [a,b[\,,\quad]a,b[\,, \tag{168}$$

takie, że $a < x < b$*, nazywają się* **otoczeniami (obustronnymi)** *punktu* x*.*
Przedziały

$$[x,b]\,,\quad [x,b[\,, \tag{169}$$

nazywają się **otoczeniami (lewostronnymi)** *punktu* x*.*
Przedziały

$$[a,x]\,,\quad]a,x]\,, \tag{170}$$

nazywają się **otoczeniami (prawostronnymi)** *punktu* x*.*
Podzbiory postaci

$$]-\infty,-M[\,,\quad M,\infty[\,, \tag{171}$$

nazywają się **otoczeniami $\mp$nieskończoności**.

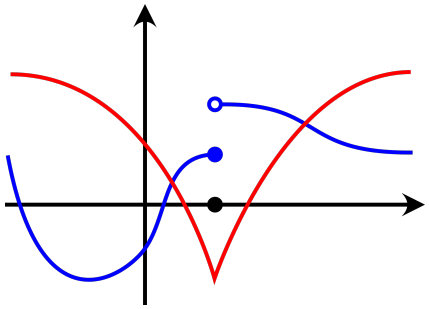
Uwaga 6.1. Warto zaobserwować, że, w powyższych otoczeniach $\mp$nieskończoności, tj. $]-\infty,-M[$ lub $]M,\infty[$, odpowiednio, liczba $M > 0$ jest z reguły „ bardzo wielką", ponieważ, potocznie mówiąc, M powinna być „blisko" ∞ (ale sama definicja nie zabronić wziąć, np. $M = 0.00001$).

6.1.1 Definicja ciągłości i granicy

Z grubsza mówiąc:

> funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest *ciągła*, jeśli można narysować jej wykres **bez odrywania ręki**.

Na przykład, w poniższym rysunku, funkcja czerwona jest ciągła ale ta niebieska nie.



Definicja 6.2. *Mówimy, że* granicą funkcji $f(x)$ dla x dążącego do x_0 *jest* y_0 *i piszemy*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0\,, \tag{172}$$

wtedy i tylko wtedy gdy warunek

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \ t.ż.\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \epsilon \tag{173}$$

jest spełniony.

Po ludzku:

> funkcja f **dąży** do y_0 wtedy i tylko wtedy, gdy można uczynić odległość
>
> $$|f(x) - y_0|$$
>
> dowolnie małą.

Definicja 6.3. *Funkcja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest* ciągła *w punkcie* $x_0 \in \mathbb{R}$*, jeśli*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,. \tag{174}$$

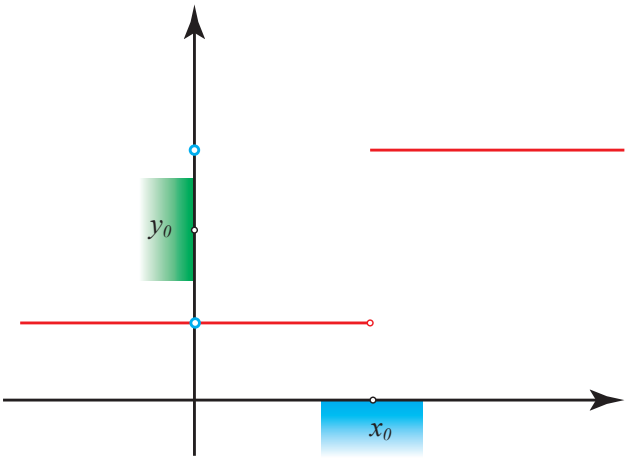
Funkcja f *jest ciągła* ***na podzbiorze*** $A \subseteq \mathbb{R}$ *(można* $A = \mathbb{R}$*) jeśli jest ciągła w każdym punkcie* $x_0 \in A$*.*

6.1.2 Definicja ciągłości w języku otoczeń

Warunek (173) można przedstawić korzystając z pojęcia otoczenia, mianowicie:

dla każdego otoczeniu $U :=]y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon[$ punktu y_0
istnieje otoczenie $V :=]x_0 - \epsilon, x_0 + \delta[$ punktu x_0
takie, że $f(V) \subseteq U$.

Widać, że funkcja naszkicowana powyżej nie jest ciągła, ponieważ, jeśli otoczenie U punktu y_0 (przedstawione na zielono) jest wybrane w taki sposób, że leży ono między najmniejszą a największą wartością funkcji (niebieskie kółeczka), nie ważne jak małe bierzemy otoczenie V punktu x_0 (przedstawione na niebiesko), nigdy nie będzie zachodziło, że $f(V) \subseteq U$.



Wówczas, intuicyjna definicja ciągłości z tym „bez odrywania ręki" jest równoważna właściwej definicji „z epsilonami i deltami" (mniej lubiana przez studentów).

6.1.3 „Most" między pojęciami granicy ciągu a granicy funkcji

Zechcemy teraz porównać pojęcie granicy ciągu z pojęciem granicy funkcji.

Podstawową różnicą jest fakt, że w $\mathbb{N}$, „liczba" $+\infty$ jest jedyną liczbą, do której możemy zbliżać się w nieskończenie wiele (monotonicznych) krokach, **nigdy tam nie dochodząc**. Istotnie, do każdej (skończonej) liczby $n_0 \in \mathbb{N}$, nieważne skąd zaczynamy, zawsze dojdziemy po skończenie wielu (monotonicznych) krokach. To dlatego piszemy

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = l\,, \tag{175}$$

a nigdy nie widać

$$\lim_{n \to n_0} x_n\,. \tag{176}$$

Powyższe wyrażenie znaczy po prostu wyraz x_{n_0} naszego ciągu $\{x_n\}$.

Z drugiej strony, prawie z definicji, można zbliżać się do każdej liczby rzeczywistej w monotonicznym sposobie (n.p., rosnącym) nigdy tam nie dochodząc. W związku z tym, w wyrażeniu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0\,, \tag{177}$$

liczba x_0 jest dowolna (a nie tylko $\pm\infty$).

Związek między tymi dwoma pojęciami jest wyjaśniony przez następujące Twierdzenie.

Uwaga 6.2. Definicja (174) jest czasami zwana **definicją ciągłości według Cauchy'ego**, podczas gdy poniższa (równoważna) definicja (179) – **definicją według Heinego**.

Twierdzenie 6.1 (•• Zadanie egzaminacyjne nr. 2). *Zachodzi*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0\,, \tag{178}$$

wtedy i tylko wtedy gdy

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = y_0 \quad \forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0\,. \tag{179}$$

Dowód nie jest trudny, ale jego postać zwykle straszy studentów, będąc „wielką ucztą epsilonów i delt".

Dowód. Udowodnijmy najpierw, że (178) implikuje (179).

Wiemy, z definicji granicy **funkcji**, że

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \text{ t.ż. } |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-y_0|<\epsilon\,. \tag{180}$$

Teraz musimy wziąć sobie dowolny ciąg $\{x_n\}$, dążący do x_0 i sprawdzić, że ciąg $\{f(x_n)\}$ dąży do y_0.

Wobec tego, wiemy, z definicji granicy **ciągów**, że

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists n_0\in\mathbb{N} \mid |x_n-x_0|\le\epsilon \quad \forall n\ge n_0\,, \tag{181}$$

a chcemy udowodnić, że

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists n_0\in\mathbb{N} \mid |f(x_n)-y_0|\le\epsilon \quad \forall n\ge n_0\,. \tag{182}$$

Cała impreza polega na tym, że musimy pokazać, że (180) i (181) pociągają (182). Źródłem trudności jest fakt, że w trzech innych miejscach pojawi się ten sam symbol „ϵ"—każdym razem z innym znaczeniem. W związku z tym należy być bardziej precyzyjnym.

Ustalmy $\epsilon>0$ w (182). Teraz, na mocy (180), istnieje δ taki, że $|f(x)-y_0|<\epsilon$ o ile tylko $|x-x_0|<\delta$. Można wtedy wprowadzić ten ostatni δ w (181) i być pewnym, że istnieje n_0 taki, że $|x_n-x_0|\le\delta$ o ile tylko $n\ge n_0$. Ten ostatni n_0 jest dokładnie ten n_0, co szukaliśmy.

Subtelność była, że **symbol δ z pierwszego warunku (180) grał rolę symbolu ϵ w drugim warunku (181)**.

Aby skończyć dowód, udowodnijmy teraz, że negacja (178) implikuje negację (179). Innymi słowy, że z tego faktu:

$$\begin{gathered}\text{istnieje otoczenie } U:=]y_0-\epsilon,y_0+\epsilon[\text{ punktu } y_0\\ \text{takie, że dla żadnego otoczeniu } V:=]x_0-\delta,x_0+\delta[\text{ punktu } x_0\\ \text{nie zachodzi, że } f(V)\subseteq U\end{gathered}$$

wynika fakt:

$$\begin{gathered}\text{istnieje ciąg } \{x_n\} \text{ dążący do } x_0\\ \text{taki, że ciąg } \{f(x_n)\} \text{ nie dąży do } y_0\ .\end{gathered}$$

Czyli należy konstruować ręcznie ten ciąg $\{x_n\}$. Sknonstrujumy jego n–ty wyraz. Niech $n\in\mathbb{N}$ i $\delta:=\frac{1}{n}$. Z założenia wynika, że $f(V)\not\subseteq U$, t.j., istnieje punkt $x_n\in V$ taki, że $f(x_n)\notin U$. To znaczy, że odległość punktu x_n od punktu x_0 jest mniejsza od $\frac{1}{n}$ ale odległość punktu $f(x_n)$ od punktu y_0 jest większa od ϵ. Z tego wynika, że $x_n\to x_0$, ale $f(x_n)\not\to y_0$. □

6.1.4 Kilka konsekwencji Twierdzenia „mostu"

Wniosek 6.1. *Jeśli f ma granicę, to granica jest tylko jedna.*

Wniosek 6.2. *Jeśli f i h mają taką samą granicę y_0 w punkcie x_0, a g jest funkcją taką, że*

$$f(x)\le g(x)\le h(x)\,, \quad \forall x \text{ w otoczeniu punktu } x_0\,, \tag{183}$$

to g też ma granicę w x_0, a granicą jest y_0.

Twierdzenie 6.2. *Niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) =: a$ oraz $\exists \lim_{x\to x_0} g(x) =: b$. Wówczas*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) &= a + b\,, \\ \lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= a \cdot b\,, \\ \lim_{x\to x_0} (\tfrac{1}{f(x)}) &= \tfrac{1}{a}\,, \quad \textit{jeśli } a \neq 0\,. \end{aligned}$$

Twierdzenie 6.3. *Niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą takie, że f jest ciągła w x_0 a g jest ciągła w $f(x_0)$. Wówczas $g \circ f$ jest ciągła w x_0.*

Wniosek 6.3. *Niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi na całym $\mathbb{R}$. Wówczas*

$$f + g\,, \quad f \cdot g\,, \quad \tfrac{f}{g}\,, \quad f \circ g\,, \tag{184}$$

są też ciągłe (z odpowiednią uwagą na $\frac{f}{g}$).

Przykład 6.1. Łatwo sprawdzić z definicji, że funkcja stała $f(x) = a$ a funkcja identyczność $f(x) = x$ są ciągłe. Z powyższego wniosku wynika, że każdy wielomian

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{185}$$

jest funkcją ciągłą. Ciągłość takich funkcji, jak e^x, $\sin(x)$, itd. nie pochodzi prosto z ciągłości wielomianów.

6.1.5 Granice jednostronne

Warto wprowadzić następujące pojęcia:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = y_0\,, \tag{186}$$

t.j., *granica prawostronna* równa się y_0 wtedy i tylko wtedy dla każdego otoczeniu punktu y_0 postaci $U :=]y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon[$ istnieje podzbiór postaci $V :=]x_0, x_0 + \delta[$ taki, że $f(V) \subset U$.

Podobnie,

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = y_0\,, \tag{187}$$

t.j., *granica lewostronna* równa się y_0 wtedy i tylko wtedy dla każdego otoczeniu punktu y_0 postaci $U :=]y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon[$ istnieje podzbiór postaci $V :=]x_0 - \delta, x_0[$ taki, że $f(V) \subset U$.

Twierdzenie 6.4. *Istnieje $\lim_{x\to x_0} f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$. W takim razie,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x). \tag{188}$$

Wykorzystując pojęcie otoczenia $\pm$ nieskończoności (171), łatwo nadać znaczenie symbolom

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\,, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)\,, \tag{189}$$

patrz także Uwagę 6.1.

Uwaga 6.3. W definicji granicy – zarówno obustronnej, jak i prawo/lewostronnej – punkt x_0 **nie musi zawierać się w dziedzinie** D_f funkcji f. Istotnie, w języku otoczeń, warunek (173) przyjmuje postać

$$\forall \text{ otoczenia } U \ni y_0 \ \exists \text{ otoczenie } V \ni x_0 : f(V \setminus \{x_0\}) \subseteq U\,. \tag{190}$$

Biorąc prawo/lewostronne otoczenia zamiast obustronnych, otrzymamy definicję granicy prawo/lewostronnej, odpowiednio.

Punkt x_0 nie może być w dziedzinie – ale musi być „nieskończenie blisko"niej: musi być tzw. punktem skupienia (zaawansowane pojęcie topologiczne).

6.1.6 Ciągłość jednostajna

Definicja 6.4. *Funkcja $f : P \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na przedziale P jeśli $\forall \epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \tag{191}$$

o ile tylko

$$|x_1 - x_2| < \delta\,. \tag{192}$$

Twierdzenie 6.5. *Jeśli $f : P \to \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale P i P jest domknięty i ograniczony, to $f : P \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na P.*

Pojęcie dowodu. Dla każdego $x_1 \in P$, funkcja f jest ciągła w nim. Wobec tego, istnieje $\delta(x_1)$ **zależna od** x_1 taka, że

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \tag{193}$$

o ile tylko

$$|x_1 - x_2| < \delta(x_1)\,. \tag{194}$$

Skoro P jest domknięty, można wziąć **najmniejszą z tych delt**

$$\delta := \min_{x_1 \in P} \delta(x_1)\,. \tag{195}$$

Widać teraz, że z taką δ, warunek (191) jest spełniony, o ile tylko warunek (192) jest spełniony. □

Przykład 6.2. Funkcja $\cos(\frac{1}{x})$ jest ciągła na $(0, 1]$ ale nie jest jednostajnie ciągła.

6.2 Funkcje wymierne

6.2.1 Definicja funkcji wymiernej

Definicja 6.5. Funkcją wymierną *jest funkcja postaci*

$$f(x) := \frac{W(x)}{Q(x)}\,, \tag{196}$$

gdzie $W(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami.

Widać, że dziedziną f jest $\mathbb{R} \setminus Q^{-1}(0)$.

6.2.2 Algorytmy na uproszczenie wielomianów

Twierdzenie 6.6. *Każdy wielomian $Q(x)$ rzędu m o rzeczywistych współczynnikach można przedstawić jednoznacznie jako*

$$Q(x) = d(x - \alpha_1)^{r_1} \cdots (x - \alpha_h)^{r_h}(x^2 + 2p_1x + q_1)^{s_1} \cdots (x^2 + 2p_kx + q_k)^{s_k}\,, \tag{197}$$

gdzie $d, \alpha_i, p_j, q_j \in \mathbb{R}$ oraz $r_i, s_j \in \mathbb{N}$, takie, że

$$r_1 + \cdots + r_h + 2s_1 + \cdots + 2s_k = m\,. \tag{198}$$

Liczby α_i, różne od siebie, są wszystkimi rozwiązaniami wielomianu $Q(x)$, każde ze swoją wielokrotnością r_i. Czynniki $x^2 + 2p_jx + q_j$ też są różne od siebie i nie posiadają żadnego rozwiązania, t.j.,

$$p_j^2 - q_j < 0\,, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k\,. \tag{199}$$

Twierdzenie 6.7 (Algorytm na dzielenie wielomianów)**.** *Niech $W(x)$ oraz $Q(x)$ będą wielomianami: jeśli $Q(x) \neq 0$, to istnieją i są jedyne wielomiany $I(x)$ oraz $R(x)$, takie, że*

$$W(x) = Q(x) \cdot I(x) + R(x)\,, \quad \deg(R(x)) < \deg(Q(x))\,. \tag{200}$$

W formule (200) $I(x)$ nazywa się *ilorazem* (lub rezultatem/wynikiem dzielenia) wielomianu $W(x)$ przez wielomian $Q(x)$, natomiast $R(x)$ jest *resztą dzielenia*. Jeśli $R(x) = 0$, to znaczy, że $W(x)$ jest *podzielny* przez $Q(x)$. Zauważmy, że jeśli $\deg(Q(x)) > \deg(W(x))$, to $I(x) = 0$ i $R(x) = W(x)$.

6.2.3 Rozkładanie funkcji wymiernych na ułamki proste

Wniosek 6.4 (Rozkładanie funkcji wymiernych na ułamki proste)**.** *Każdą funkcję wymierna można rozpisać w postaci*

$$\frac{W(x)}{Q(x)} = I(x) + \frac{1}{d}\left(F_1(x) + \cdots + F_h(x) + \overline{F}_1(x) + \cdots + \overline{F}_k(x)\right), \tag{201}$$

gdzie każdy $F_i(x)$ *ma postać*

$$F_i(x) = \frac{A_{i1}}{x-\alpha_i} + \frac{A_{i2}}{(x-\alpha_i)^2} + \cdots + \frac{A_{ir_i}}{(x-\alpha_i)^{r_i}}, \tag{202}$$

natomiast każdy $\overline{F}_j(x)$ *ma postać*

$$\overline{F}_j(x) = \frac{B_{j1}x + C_{j1}}{(x^2+2p_jx+q_j)} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2+2p_jx+q_j)^2} + \cdots + \frac{B_{js_j}x + C_{js_j}}{(x^2+2p_jx+q_j)^{s_j}} \tag{203}$$

dla odpowiedniego wielomianu $I(x)$ *i stałych* α_i, p_j, q_j, $A_{i\ell}$, $B_{j\mu}$ *oraz* $C_{j\mu}$ *takich, że* $p_j^2 - q_j < 0$.

Dowód Wniosku 6.4 nie jest wymagający, ale lepiej go pominąć. Jego prawdziwość, będzie widoczna dzięki licznym przykładom, co będziemy omawiać.

Definicja 6.6. *Funkcją wymierną*

$$\frac{A}{(x-\alpha)^r}, \quad A, \alpha \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}, \tag{204}$$

nazywamy ułamkiem prostym **pierwszego rodzaju**.

Definicja 6.7. *Funkcją wymierną*

$$\frac{Bx+C}{(x^2+2px+q)^s}, \quad B, C, p, q \in \mathbb{R}, p^2 - q < 0, s \in \mathbb{N}, \tag{205}$$

nazywamy ułamkiem prostym **drugiego rodzaju**.

7 Tydzień VII: 12. i 15. listopada 2024

7.1 Funkcje hiperboliczne

Oprócz wielomianów i funkcji wymiernych, póki co wprowadziliśmy tylko funkcję wykładniczą, patrz Definicję 5.6; otóż to tylko szczyt góry lodowej: większość funkcji, których będziemy używać, *nie jest* ani wielomianem, ani funkcją wymierną.

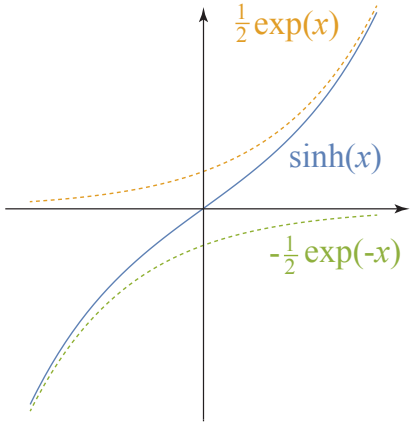
7.1.1 Logarytm naturalny i sinus hiperboliczny

Definicja 7.1. ***Funkcja odwrotna*** $\exp^{-1} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *nazywa się* logarytmem naturalnym *i oznaczamy ją symbolem* ln.

Uwaga: funkcja „jeden przez f" do funkcji e^x to po prostu e^{-x}. Dzięki działaniom algebraicznym z funkcjami, można rozważyć, między innymi, średnią funkcji e^x i *funkcji przeciwnej do* $1/f$, t.j. $-e^{-x}$:

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tag{206}$$

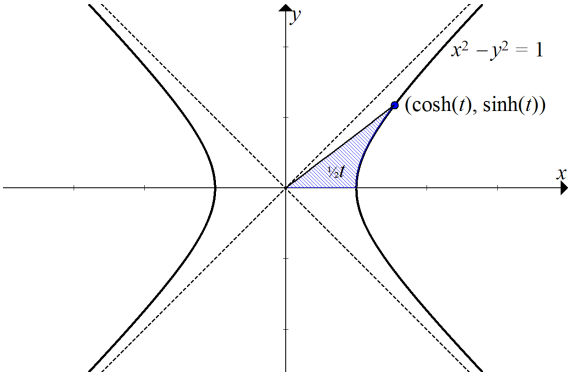
która nazywa się *sinusem hiperbolicznym*.



7.1.2 Arcus sinus hiperboliczny

Dziedzina i zbiór wartości sinusa hiperbolicznego to cały zbiór $\mathbb{R}$. Jest to bijekcja. Wobec tego, jej funkcja odwrotna też ma $\mathbb{R}$ i jako dziedzina i jako zbiór wartości. Jej funkcja odwrotna nazywa się *arcus sinusem hiperbolicznym* i oznaczamy ją jako $\operatorname{arsinh}(x)$.

Funkcje trygonometryczne hiperboliczne posiadają analogiczną interpretację geometryczną, jak zwykłe (i bardziej znane) funkcje trygonometryczne $\sin(x)$ i $\cos(x)$. Wystarczy **rozważyć hiperbolę** $x^2 - y^2 = 1$ **zamiast okręgu** $x^2 + y^2 = 1$.



7.1.3 Cosinus hiperboliczny

Zdefiniujmy

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \tag{207}$$

i zaobserwujmy, że

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} \\ &= \frac{2e^x \cdot (2e^{-x})}{4} = 1\end{aligned}$$

na mocy wzoru

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)\,. \tag{208}$$

Udowodniono zatem, że zachodzi podstawowa tożsamość

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1\,. \tag{209}$$

7.1.4 Kąt hiperboliczny

Wzór (209) znaczy, że punkt o współrzędnych $(\cosh(x), \sinh(x))$ leży na hiperboli o równaniu $x^2 - y^2 = 1$. (Zauważmy, że ten sam symbol x oznacza i argument sinusa hiperbolicznego i pierwszą składową punktu hiperboli.)

Subtelniejsze od wzoru (209) jest następujące Twierdzenie:

Twierdzenie 7.1. *Każdy punkt hiperboli jest postaci* $(\cosh(\alpha), \sinh(\alpha))$*, tj. dla każdego* (x, y)*, takiego, że* $x^2 - y^2 = 1$*, istnieje* α*, taka, że*

$$(x, y) = (\cosh(\alpha), \sinh(\alpha))\,.$$

Dowód. Do tego właśnie służy funkcja odwrotna arcus sinus hiperboliczny: niech y będzie dowolną liczbą i szukajmy „kąta”[2] α, takiego że

$$\sinh(\alpha) = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = y\,. \tag{210}$$

Przesuwając coś i mnożąc przez e^{α} (można to zrobić!), otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = y &\Leftrightarrow \\ e^{\alpha} - e^{-\alpha} = 2y &\Leftrightarrow \\ e^{\alpha} - 2y - e^{-\alpha} = 0 &\Leftrightarrow \\ (e^{\alpha})^2 - 2ye^{\alpha} - 1 = 0\,, & \end{aligned}$$

t.j. równanie drugiego rzędu nieznanej e^{α}:

$$e^{\alpha} = y \pm \sqrt{1 + y^2}\,, \tag{211}$$

z czego wynika

$$\alpha = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \tag{212}$$

(ln jest dobrze zdefiniowany tylko dla dodatnich liczb!)

Funkcja (212) to *area sinus hiperboliczny* $\operatorname{arsinh}(y)$. Jej dziedzina to cały zbiór $\mathbb{R}$. Jest funkcją nieparzystą:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}(-y) &= \ln(-y + \sqrt{(-y)^2 + 1}) \\ &= \ln(-y + \sqrt{y^2 + 1}) \\ &= \ln\left(\frac{(-y + \sqrt{y^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1})}{y + \sqrt{y^2 + 1}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{-y^2 + y^2 + 1}{y + \sqrt{y^2 + 1}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{y + \sqrt{y^2 + 1}}\right) \\ &= -\operatorname{arsinh}(y)\,. \end{aligned}$$

Analogicznie, zaczynając od x i równania

$$\cosh(\beta) = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} = x\,, \tag{213}$$

otrzymamy

$$\beta = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\,. \tag{214}$$

[2] Zapamiętajmy, że mamy do czynienia z *hiperbolicznym kątem*. Taki kąt odpowiada dokładnie pojęciu wycinku kołowego: pole powierzchni wycinku wynosi dokładnie połowa kąta wycinku.

Funkcja (214) to *area cosinus hiperboliczny* $\operatorname{arcosh}(y)$. Jej dziedzina to przedział $[1, +\infty[$. Jest funkcją parzystą.

Ciekawą rzeczą jest fakt, że, jeśli (x, y) jest punktem hyperboli, to $\alpha = \beta$. Załóżmy, że (x, y) leży na pierwszej ćwiartce.

Wówczas, $x^2 - y^2 = 1$ pociąga $x^2 - 1 = y^2$ i $x = \sqrt{y^2 + 1}$. Podstawiając te ostatnie tożsamości w (214) otrzymamy dokładnie (212). (Pamiętajmy, że $x > 1$, co pociąga $x^2 - 1 > 0$.)

Jeśli (x, y) leży na czwartej ćwiartce, to korzystajmy z nieparzystości $\operatorname{arcosh}(y)$. □

Uwaga 7.1. Powyższy dowód nie powinien być zaskakujący, ponieważ w „zwykłym" przypadku (tzn. z „okrągłymi" sinusami i cosinusami), jeśli mamy dowolny punkt (x, y), gdzie $x, y \leq 1$, to $\arcsin(y) = \arccos(x)$ wtedy i tylko wtedy (x, y) leży na okręgu.

7.1.5 Tangens i kotangens hiperboliczne i ich odwrotności

Definicja 7.2. Tangens i kotangens hiperboliczne *zdefiniujemy jako*

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh}(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \\ \operatorname{ctgh}(x) &= \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \end{aligned}$$

na całym $\mathbb{R}$ *i na* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$*, odpowiednio. Funkcje odwrotne są*

$$\begin{aligned} \operatorname{artgh}(x) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \\ \operatorname{arctgh}(x) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \end{aligned}$$

na $]-1, 1[$ *i na* $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$*, odpowiednio. Wszystkie są nieparzyste.*

Zaobserwujmy, że $|\frac{y}{x}| < 1$ dla każdego (x, y) na hiperboli. Można wówczas odzyskać wartości α z (x, y) wzorem

$$\alpha = \operatorname{artgh}(y/x). \tag{215}$$

7.1.6 Własności algebraiczne funkcji hiperbolicznych

Stwierdzenie 7.1. *Zachodzą następujące wzory:*

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y), \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y), \\ \sinh(2x) &= 2\sinh(x)\cosh(x), \\ \cosh(2x) &= \sinh^2(x) + \cosh^2(x) \end{aligned}$$

Dowód. Wystarczy zastosować definicję:

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} \\ &= \frac{e^x e^y - e^{-x} e^{-y}}{2}. \end{aligned}$$

Podobnie,

$$\begin{aligned} \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} \\ &= \frac{e^x e^y + e^x e^{-y} - e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y} + e^x e^y - e^x e^{-y} + e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y}}{4}, \end{aligned}$$

i widać, że wyniki są te same. Reszta analogicznie. □

7.1.7 Podstawienie tangensa hiperbolicznego połowy kąta

Następujący wniosek pokazuje istotność pojęcia funkcji odwrotnej.

Wniosek 7.1 (Podstawienie tangensa hiperbolicznego połowy kąta)**.** *Niech*

$$t := \operatorname{tgh}\left(\frac{x}{2}\right). \tag{216}$$

Wówczas

$$\begin{aligned}
\sinh(x) &= \frac{2t}{1-t^2}, \\
\cosh(x) &= \frac{1+t^2}{1-t^2}, \\
\operatorname{tgh}(x) &= \frac{2t}{1+t^2}, \\
\operatorname{ctgh}(x) &= \frac{1+t^2}{2t}.
\end{aligned}$$

Dowód. Rozpiszmy x jako $2\frac{x}{2}$. Wówczas

$$\sinh(x) = \sinh\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\sinh\left(\frac{x}{2}\right)\cosh\left(\frac{x}{2}\right). \tag{217}$$

Równolegle zaobserwujmy, że

$$\frac{x}{2} = \operatorname{artgh}(t). \tag{218}$$

Sztuka polega na tym, że można wyrazić i $\sinh\left(\frac{x}{2}\right)$ i $\cosh\left(\frac{x}{2}\right)$ przez $\operatorname{tgh}\left(\frac{x}{2}\right)$. Ogólnie, mamy

$$\begin{aligned}
& \operatorname{tgh}(\alpha) = \tfrac{\sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha)} \\
\Rightarrow \quad & \operatorname{tgh}^2(\alpha) = \tfrac{\sinh^2(\alpha)}{\cosh^2(\alpha)} = \tfrac{\sinh^2(\alpha)}{1+\sinh^2(\alpha)} \\
\Rightarrow \quad & (1+\sinh^2(\alpha))\operatorname{tgh}^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 0 \\
\Rightarrow \quad & \operatorname{tgh}^2(\alpha) + \sinh^2(\alpha)(\operatorname{tgh}^2(\alpha) - 1) = 0 \\
\Rightarrow \quad & \sinh^2(\alpha) = \tfrac{\operatorname{tgh}^2(\alpha)}{1-\operatorname{tgh}^2(\alpha)} \\
\Rightarrow \quad & \sinh(\alpha) = \tfrac{\operatorname{tgh}(\alpha)}{\sqrt{1-\operatorname{tgh}^2(\alpha)}}.
\end{aligned}$$

Podobnie,

$$\cosh(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tgh}^2(\alpha)}}. \tag{219}$$

W szczególności, dla $\alpha = x/2$ otrzymamy

$$\begin{aligned}
\sinh(x) &= 2\sinh\left(\frac{x}{2}\right)\cosh\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= 2\frac{\operatorname{tgh}(\frac{x}{2})}{\sqrt{1-\operatorname{tgh}^2(\frac{x}{2})}}\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tgh}^2(\frac{x}{2})}} \\
&= 2\frac{\operatorname{tgh}(\operatorname{artgh}(t))}{\sqrt{1-\operatorname{tgh}^2(\operatorname{artgh}(t))}}\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tgh}^2(\operatorname{artgh}(t))}} \\
&= 2\frac{t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-t^2}} = \frac{2t}{1-t^2},
\end{aligned}$$

tak, jak chcieliśmy. Resztę można wykazać analogicznie. □

Powyższe podstawienie będzie użyteczne w całkowaniu.

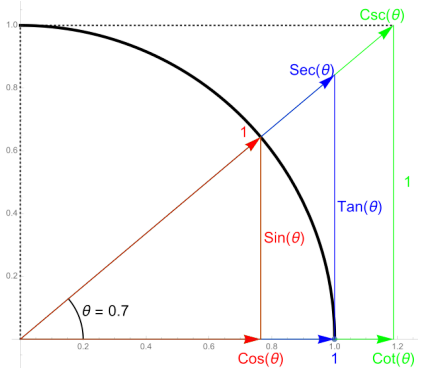
7.2 Funkcje trygonometryczne

Dlaczego omówiliśmy najpierw hiperboliczne i potem trygonometryczne funkcje? W zasadzie, funkcje trygonometryczne są bardziej znane: to jeden powód. Drugi powód: dowód wszystkich własności funkcji trygonometrycznych analogicznych do powyższych własności funkcji hiperbolicznych **jest nieco skomplikowany bez pomocy liczb zespolonych**.

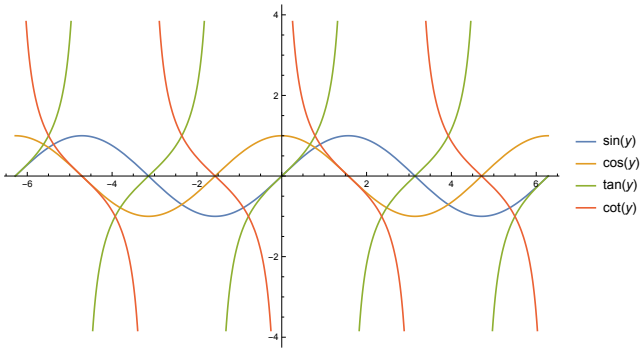
Dodajemy powyższej te wzory bez dowodu.

7.2.1 Geometryczna definicja funkcji trygonometrycznych

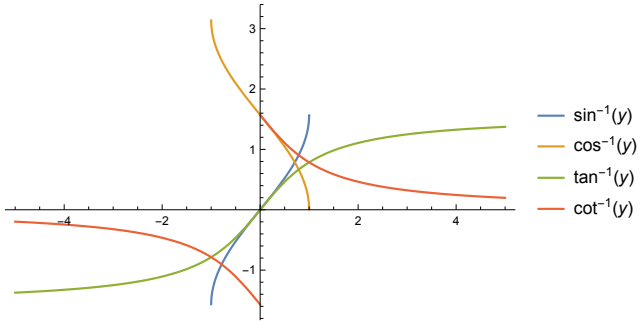
Przypuśćmy, że definicja sinusa i cosinusa jest znana (przynajmniej geometrycznie):



Wykresy funkcji trygonometrycznych:



Wykresy funkcji trygonometrycznych odwrotnych:



7.2.2 Kilka własności funkcji trygonometrycznych

$$
\begin{aligned}
\sin^2(x)+\cos^2(x) &= 1 \\
\sin(-x) &= -\sin(x) \\
\cos(-x) &= \cos(x)\,, \\
\sin(\tfrac{\pi}{2}-x) &= \cos(x) && (220)\\
\cos(\tfrac{\pi}{2}-x) &= \sin(x) && (221)\\
\arcsin &:= \sin^{-1} : [-1,1] \longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]\,, \\
\arccos &:= \cos^{-1} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]\,, \\
\operatorname{arctg} &:= \operatorname{tg}^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\,, \\
\operatorname{arcctg} &:= \operatorname{ctg}^{-1} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\,, \\
\sin(x+2k\pi) &= \sin(x)\,, \quad \forall k\in\mathbb{Z}\,, \\
\operatorname{tg}(x+k\pi) &= \operatorname{tg}(x)\,, \quad \forall k\in\mathbb{Z}\,, \\
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y) && (222)\\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y) \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) && (223)\\
\cos(2x) &= 1-2\sin^2(x)\,.
\end{aligned}
$$

Powyższy wzór (222) nadaje się do łatwego dowodu geometrycznego, który wykonujemy po wprowadzeniu parę narzędzi związanych z przestrzenią euklidesową w Sekcji 7.2.6.

7.2.3 Podstawienie tangensa połowy kąta

Wniosek 7.2 (Podstawienie tangensa połowy kąta)**.** *Niech*

$$t := \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\,. \tag{224}$$

Wówczas

$$
\begin{aligned}
\sin(x) &= \frac{2t}{1+t^2}\,, \\
\cos(x) &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \\
\operatorname{tg}(x) &= \frac{2t}{1-t^2}\,, \\
\operatorname{ctg}(x) &= \frac{1-t^2}{2t}\,.
\end{aligned}
$$

Powyższe podstawienie będzie użyteczne w całkowaniu.

7.2.4 Dygresja 1: odległość euklidesowa w $\mathbb{R}^2$

Przestrzeń $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ nazywa się *płaszczyzną euklidesową*. Jej elementy są *punktami* lub *wektorami*. Można dodawać wektory i mnożyć je przez skalar.

Stwierdzenie 7.2. ***Odległość euklidesowa***

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{225}$$

spełnia właściwości

- $d(P,Q)\geq 0$*;*
- $d(P,Q)=0$ *wtedy i tylko wtedy* $P=Q$*;*
- $d(P,Q)\leq d(P,R)+d(R,Q)$*.*

Dowód. Pierwsza i druga: oczywiste.

Co do trzeciej, warto wprowadzić **iloczyn kartezjański** dwóch wektorów $P = (x, y)$ i $Q = (x', y')$:

$$\langle P, Q\rangle = P \cdot Q := xx' + yy' \,, \tag{226}$$

oraz **normę** wektora $P = (x, y)$:

$$\|P\|^2 := \langle P, P\rangle \geq 0 \,. \tag{227}$$

Widać, że iloczyn kartezjański jest **dwuliniowy** i **przemienny**, w sensie, że

$$\langle P, Q\rangle = \langle Q, P\rangle \;, \quad \langle P + R, Q\rangle = \langle P, Q\rangle + \langle R, Q\rangle \;, \quad \langle \alpha P, Q\rangle = \alpha \langle P, Q\rangle \;, \tag{228}$$

dla każdych wektorów P, Q, R oraz skalaru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Norma **nie jest liniowa**, ale

$$\begin{aligned} \|P + Q\|^2 &= \langle P + Q, P + Q\rangle = \langle P, P + Q\rangle + \langle Q, P + Q\rangle = \langle P, P\rangle + \langle P, Q\rangle + \langle Q, P\rangle + \langle Q, Q\rangle \\ &= \|P\|^2 + 2\langle P, Q\rangle + \|Q\|^2 \,. \end{aligned} \tag{229}$$

Potrzebujemy teraz istotnej **nierówności Cauchy–Schwarza**:

$$|\langle P, Q\rangle| \leq \|P\|\|Q\| \,. \tag{230}$$

Dowód nierówności. Weźmy sobie P i $-\alpha Q$ i zastosujmy powyższy wzór (229):

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|P - \alpha Q\|^2 = \\ &= \|P\|^2 - 2\alpha \langle P, Q\rangle + \alpha^2 \|Q\|^2 \,, \end{aligned}$$

a potem w miejsce skalaru α wpiszmy konkretną wartość $\alpha = \frac{\langle P,Q\rangle}{\|Q\|^2}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|P\|^2 - 2\frac{\langle P, Q\rangle}{\|Q\|^2}\langle P, Q\rangle + \left(\frac{\langle P, Q\rangle}{\|Q\|^2}\right)^2 \|Q\|^2 \\ &= \|P\|^2 - \frac{\langle P, Q\rangle^2}{\|Q\|^2} \,, \end{aligned}$$

z czego wynika od razu (230).

Z kolei, z (229) i (230) wynika, że

$$\begin{aligned} \|P + Q\|^2 &\leq \|P\|^2 + 2|\langle P, Q\rangle| + \|Q\|^2 \\ &\leq \|P\|^2 + 2\|P\|\|Q\| + \|Q\|^2 \\ &= (\|P\| + \|Q\|)^2 \,, \end{aligned}$$

czyli

$$\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\| \,. \tag{231}$$

Zaobserwujmy teraz, że $d(P, Q) = \|P - Q\|$. Rozpiszmy $P - Q = (P - R) + (R - Q)$:

$$d(P, Q) = \|P - Q\| = \|(P - R) + (R - Q)\| \leq \|(P - R)\| + \|(R - Q)\| = d(P, R) + d(R, Q) \,,$$

na mocy (231). □

Warto zaobserwować, że odległość „taksówkarza” też spełnia powyższe warunki.

7.2.5 Dygresja 2: kąt między wektorami w $\mathbb{R}^2$

Niech P i Q będą wektorami $\mathbb{R}^2$, różnymi od 0. Wówczas

$$\textbf{kąt} \text{ między } P \text{ i } Q = \arccos\left(\frac{\langle P, Q\rangle}{\|P\| \cdot \|Q\|}\right) \tag{232}$$

Dowód. Przypuśćmy, że $P = (1,0)$ a $Q = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Wówczas, α jest dokładnie kątem między P oraz Q. Skoro $\|P\| = 1$ i $\|Q\| = \sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)} = 1$,

$$\arccos\left(\frac{\langle P, Q\rangle}{\|P\| \cdot \|Q\|}\right) = \arccos\left(\frac{\langle (1,0), (\cos(\alpha), \sin(\alpha))\rangle}{1 \cdot 1}\right) = \arccos(\cos(\alpha)) = \alpha\,, \tag{233}$$

tak, jak chcieliśmy.

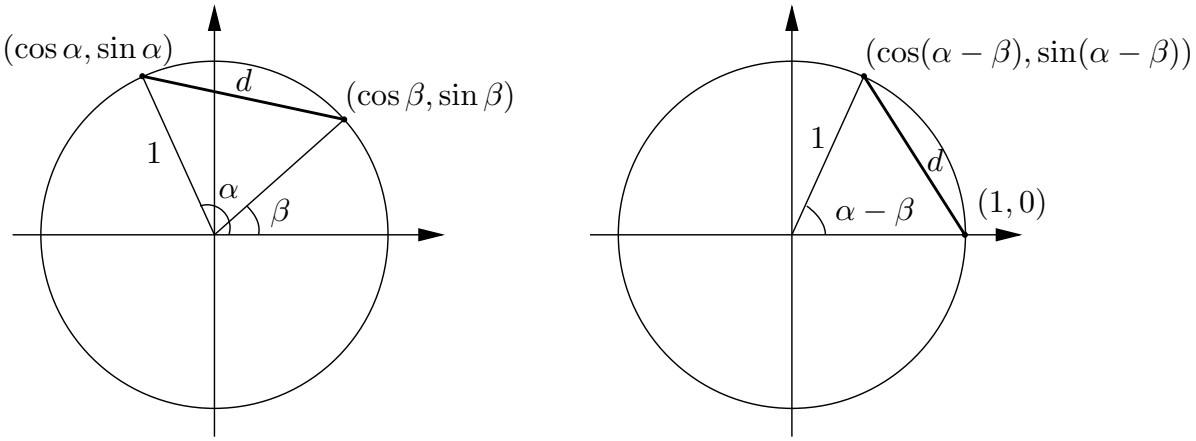
Ogólny przypadek może być przeniesiony do powyższego przez obrót i przez skalowanie. □

W ścegółlności, P i Q są prostopadłe wtedy i tylko wtedy gdy $\langle P, Q\rangle = 0$.

Przykład 7.1. Niech $f = ax + b$. Wykres f jest linią równoległą do wektora $(1, a)$ (punkt $P \in \mathbb{R}^2$ rozpatrzymy jako „strzałkę", której ogon jest w punkcie 0 a której wierzchołek jest w punkcie P). Łatwo znaleźć jakiś wektor (λ, μ) prostopadły do $(1, a)$, różny od 0. Na przykład, $(\lambda, \mu) = (1, -\frac{1}{a})$. Wówczas każda funkcja $g = -\frac{1}{a}x + c$ jest taka, że jej wykres jest prostopadły do wykresu funkcji f.

7.2.6 Geometryczny dowód wzoru na sinus sumy kątów

Dowód wzorów (222). Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ będą dwoma kątami. Zaobserwujmy, że długość d w poniższych rysunkach jest tą samą.



Obliczmy d z pierwszego rysunku:

$$d = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}\,. \tag{234}$$

Podobnie, z drugiego rysunku:

$$d = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2}\,. \tag{235}$$

Wówczas,

$$\begin{aligned}
(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 &= (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2 \Rightarrow \\
\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta &= \cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta) \\
\Rightarrow 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) &= 2 - 2\cos(\alpha - \beta) \Rightarrow \\
\cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,.
\end{aligned}$$

W szczególności, jeśli w miejsce β wstawimy $-\beta$ otrzymamy

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)\,, \tag{236}$$

co znaczy

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,. \tag{237}$$

Analogiczny wzór dla sinusa otrzymujemy dzięki wzorom (220) oraz (221).

□

8 Tydzień VIII: 19. i 22. listopada 2024

8.1 Funkcje pochodne

8.1.1 Pochodna funkcji w punkcie

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją jednej zmiennej x. Ustalmy punkt $x \in \mathbb{R}$ i zdefinujmy **nową funkję nowej zmiennej** t:

$$\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\,. \tag{238}$$

Zauważmy, że w powyższym wyrażeniu, x **gra rolę stałej**. Granica

$$f'(x) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}\,, \tag{239}$$

jeśli istnieje, nazywa się *pochodną funkcji f w punkcie x.*

8.1.2 Różniczkowalność funkcji

Definicja 8.1. *Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna **w punkcie** $x \in \mathbb{R}$ jeśli pochodna $f'(x)$ istnieje. Jest różniczkowalna **na podzbiorze** $A \subseteq \mathbb{R}$ (nawet $A = \mathbb{R}$) jeśli jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in A$.*

Jeśli f jest różniczkowalna na całym $\mathbb{R}$, to mamy nową funkcję

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\,, \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

nazywającą się *pochodną* funkcji f. Zauważmy, że, aby obliczyć wartość $f'(x)$ należy wziąć pod uwagę nową funkcję **dla każdej wartości zmiennej** x.

Twierdzenie 8.1. *Jeśli f jest różniczkowalna w x_0, to f jest ciągła w x_0.*

Dowód. Wystarczy zaobserwować, że

$$\lim_{t\to 0}(f(x_0+t) - f(x_0)) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} t = f'(x) \lim_{t\to 0} t = f'(x_0)\cdot 0 = 0\,, \tag{240}$$

aby stwierdzić, że

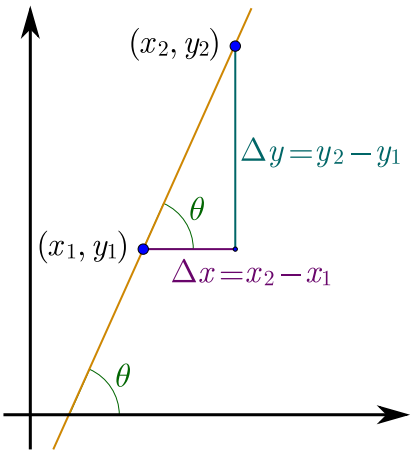
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,. \tag{241}$$

□

Odwrotna implikacja nie zachodzi. N.p., funkcja $|x|$ jest ciągłą (na $\mathbb{R}$) ale nie jest różniczkowalna w 0.

8.1.3 Prosta styczna do wykresu funkcji

Z geometrycznego punktu widzenia, wartość $f'(x)$ odpowiada **nachyleniu prostej stycznej** do wykresu funkcji f w punkcie $(x, f(x))$. Zauważmy, że nachylenie może posiadać znak: w poniższym rysunku nachylenie $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}(\theta)$ jest dodatnie, ale gdyby żółta prosta byłą odbita względem osi y–ów, znak by był przeciwny.



Twierdzenie 8.2. *Niech f będzie funkcją różniczkowalną w x_0. Oznaczmy jako s_t* ***prostą sieczną*** *przez punkty*

$$A := (x_0, f(x_0))\,, \quad B_t := (x_0 + t, f(x_0 + t))\,. \tag{242}$$

Wówczas istnieje „granica"

$$s_0 := \lim_{t\to 0} s_t \tag{243}$$

i nazywamy ją ***prostą styczną*** *wykresu funkcji f w punkcie A.*

Dlaczego „granica" w cudzysłowie? Dlatego, że nigdy nie zgłębiliśmy pojęcia granicy ciągu linii prostych! Ale łatwo iść dalej korzystając tylko z intuicji.

Dowód. Niech

$$y = a_t x + b_t \tag{244}$$

będzie równaniem prostej siecznej s_t. Wówczas nachylenie a_t wynosi

$$a_t = \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}\,. \tag{245}$$

Skoro s_t przechodzi przez punkt A, znajdziemy, że $b_t = f(x_0) - a_t x_0$, z czego wynika

$$y = a_t(x - x_0) + f(x_0)\,. \tag{246}$$

Zauważmy, że w (246) mamy 4 zmienne: x, x_0, t oraz y. Punkt x_0 jest ustalony; t opisuje z jaką prostą sieczną mamy do czynienia; (x, y) jest dowolnym punktem takiej prosty.

Teraz, nawet bez właściwej definicji granicy ciągu linii prostych, łatwo się przekonać, że, skoro s_t jest jednoznacznie opisana przez a_t, granica s_0 musi być opisana przez

$$\lim_{t\to 0} a_t = f'(x_0)\,. \tag{247}$$

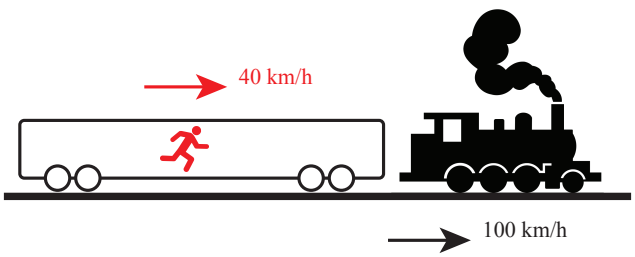
Ostatnia granica istnieje, ponieważ f jest różniczkowalna w x_0. □

8.1.4 Właściwości funkcji pochodnej

Twierdzenie 8.3. *Jeśli f i g są różniczkowalne, to*

$$(f+g)' = f' + g' \tag{248}$$
$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \tag{249}$$
$$(\tfrac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2} \quad \textit{jeśli } f(x) \neq \forall x \tag{250}$$
$$(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)\,, \tag{251}$$
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}\,, \quad \textit{gdzie } y = f(x) \textit{ i } f \textit{ jest odwracalna}\,. \tag{252}$$

Przykład 8.1. Pewien pociąg jeździ 100 km/h. Tym pociągiem jedzie Usain Bolt. Załóżmy, że, powodowanym gwałtownym pragnieniem, zaczyna on biec ku toalecie. W takich ekstremalnych warunkach, ten facet może osiągnąć prędkość 40 km/h! Nawet małe dziecko, przyglądające się takiemu zjawisku, zrozumiałoby, że Bolt wygląda, jakby biegł z prędkością 140 km/h. Nieświadomie, dziecko zastosowało wzór (248).



Istotnie, niech

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{pozycja pociągu względem powierzchni ziemi w czasie } t\,, \\ g(t) &= \text{pozycja Bolta względem pociągu w czasie } t\,. \end{aligned}$$

Wówczas $f'(t) = 100$ i $g'(t) = 40$.

Ale funkcja $f + g$ odpowiada pozycji Bolta *względem powierzchni ziemi*, wobec tego jej pochodna $(f + g)'$ opisuje jego prędkość względem powierzchni ziemi: wynosi dokładnie 140, jak tego oczekiwaliśmy.

Przykład 8.2. Studenci często zastanawiają się „dlaczego wzór (249) wygląda jak wzór (249)?" Istotnie, bardziej oczekiwany, by był wzór

$$(fg)' = f'g'\,. \tag{253}$$

Teraz wyjaśnimy, dlaczego wzór (253) nie odpowiada rzeczywistości. Pierwsza sprawa: powinniśmy przyzwyczaić się przyglądać się pochodnej jako

sposobu pomiaru zmiany.

Z grubsza mówiąc, załóżmy, że nasza funkcja odpowiada pewnemu zjawiskowi. Wówczas

$$\begin{aligned} \text{pochodna } &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{nic nie zmieniło się,} \\ \text{pochodna } &> 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{coś zwiększyło się,} \\ \text{pochodna } &< 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{coś zmniejszyło się.} \end{aligned}$$

Na przykład, niech naszym zjawiskiem będzie zużycie paliwa naszego samochodu. Następna tabelka jest rozsądna:

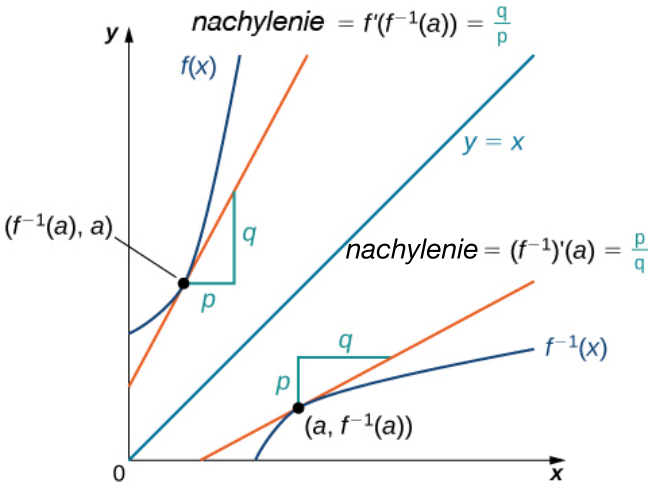
prędkość (km/h)	waga (liczba osób)	zużycie paliwa (l/100km)
100	2	5
140	2	7
100	4	10
140	4	14

Czyli, pomijając czynnik $\frac{1}{40}$, zużycie paliwa z jest iloczynem $p \cdot w$, gdzie p odpowiada prędkości a w wadze. Przyglądajmy się drugiemu i trzeciemu wierszowi: lub prędkość lub waga nie zmieniły się. To znaczy, że albo p' albo w' wynosi 0. Gdyby wzór (253) był poprawny, to byśmy otrzymali $z' = 0$, t.j., że zużycie paliwa nie zmieniło się, w przeciwieństwie do tego, co mówi ostatnia kolumna!

Oto powód, dlaczego wzór (249) odpowiada rzeczywistości: w wzorze (249) dwa wpływy zmiany są sumowane a nie mnożone. W związku z tym, fakt, że jeden zeruje się, nie spowoduje, że całe wyrażenie też zeruje się.

Dowód twierdzenia 8.3. Nie będziemy udowodnić twierdzenia 8.3 tutaj. Dowód jest prosty i znajduje się w każdej książce z Analizy.

Chociaż warto się skupić na (252) z powodu jego geometrycznej zawartości. Studenci zastanawiają się: „czy geometryczny dowód jest rygorystycznym dowodem?" Tak, dopóki jednak, student jest w stanie, aby prowadzić wszystkie szczegóły. Na przykład, poniższy rysunek już stanowi dowód, że pochodna funkcji f^{-1} w punkcie a jest jeden przez pochodną funkcji f w punkcie $f^{-1}(a)$.



Ale należy wyjaśnić dlaczego, n.p., wykres funkcji odwrotnej jest odbiciem wykresu podanej funkcji względem prostej $y = x$. To mało wymagające, ale studenci powinni być gotowi stawić czoło takiemu pytaniu. □

8.1.5 Pochodne wielomianów

Łatwo przekonać się, że $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$ a $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$. Z tego można od razu otrzymać wzór

$$(x^n)' = nx^{n-1}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{254}$$

Z tego wynika, że każdy wielomian jest różniczkowalny.

8.1.6 Pochodne funkcji innych od wielomianów

A co do takich funkcji, jak e^x lub $\sin(x)$?

Należy korzystać z definicji. N.p., niech $f(x) = e^x$. Wówczas

$$f'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{e^{x+t} - e^x}{t} = \lim_{t\to 0} e^x \frac{e^t - 1}{t} = f(x)\lim_{t\to 0}\frac{e^t - 1}{t} = f(x)f'(0)\,. \tag{255}$$

Ale, z naszej definicji liczby e, wiemy, że $f'(0) = 1$. Odkryliśmy więc podstawowy wzór

$$(e^x)' = e^x\,. \tag{256}$$

Z tego można łatwo otrzymać analogiczne wzory dla funkcji hiperbolicznych, n.p.,

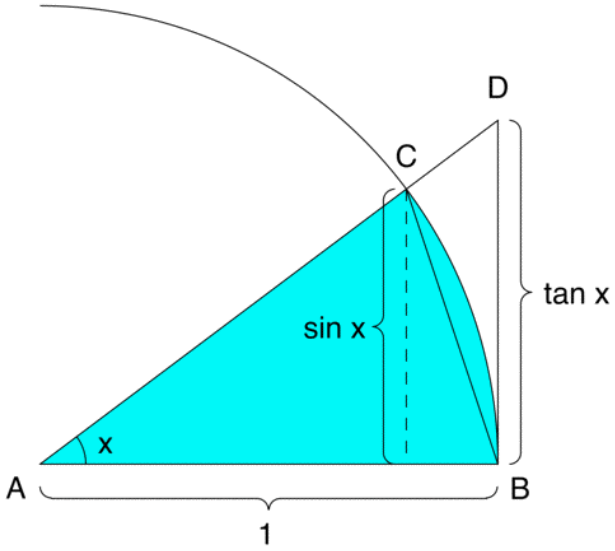
$$(\sinh(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \cosh(x)\,. \tag{257}$$

Analogie dla zwykłych funkcji trygonometrycznych nie są takie proste i wymagają pomocy geometrii.

Twierdzenie 8.4 (• **Zadanie egzaminacyjne nr. 3**)**.** *Zachodzi*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1\,. \tag{258}$$

Dowód. Rozpatrzmy rysunek



Widać, że pole powierzchni trójkąta ABC jest mniejsze niż pole powierzchni wycinku kołowego o kącie x, co jest z kolei mniejsze niż pole powierzchni trójkąta ABD. Innymi słowy,

$$\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\mathrm{tg}(x)}{2} = \frac{\sin(x)}{2\cos(x)} \tag{259}$$

Załóżmy $x > 0$.

Pomnóżmy przez 2 i odwróćmy wszystkie ułamki:

$$\frac{1}{\sin(x)} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \tag{260}$$

Skoro $\sin(x) > 0$, można mnożyć przez $\sin(x)$ i otrzymać

$$1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x)\,, \tag{261}$$

skąd widać, że

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,. \tag{262}$$

Ale i $\frac{\sin(x)}{x}$ i $\cos(x)$ są funkcjami parzystami, (261) zachodzi też dla $x < 0$, w związku z tym

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,. \tag{263}$$

□

Twierdzenie 8.5. *Zachodzą następujące wzory:*

$$
\begin{aligned}
(x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1}\,, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}\,, && (264)\\
(\sin(x))' &= \cos(x)\,, && (265)\\
(\cos(x))' &= -\sin(x)\,, && (266)\\
(\operatorname{tg}(x))' &= \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\operatorname{tg}^2(x)\,, && (267)\\
(\operatorname{ctg}(x))' &= -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1-\operatorname{ctg}^2(x)\,, && (268)\\
(\sinh(x))' &= \cosh(x)\,, && (269)\\
(\cosh(x))' &= \sinh(x)\,, && (270)\\
(\ln(x))' &= \frac{1}{x}\,, \quad \forall x>0\,, && (271)\\
(e^{f(x)})' &= f'(x)e^{f(x)}\,, && (272)\\
(\ln(f(x)))' &= \frac{f'(x)}{f(x)}\,, \quad \forall f \ t.\dot{z}.\ f(x)>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\,, && (273)\\
(\arcsin(x))' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad \forall x\in[-1,1]\,, && (274)\\
(\arccos(x))' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad \forall x\in[-1,1]\,, && (275)\\
(\operatorname{arctg}(x))' &= \frac{1}{1+x^2}\,, && (276)\\
(\operatorname{arcctg}(x))' &= -\frac{1}{1+x^2}\,, && (277)\\
(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))' &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} && (278)
\end{aligned}
$$

Dowód. Mamy

$$
\begin{aligned}
(\sin(x))' &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(x+t)-\sin(x)}{t} =\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(x)\cos(t)+\sin(t)\cos(x)-\sin(x)}{t} =\\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin(x)(\cos(t)-1)}{t}+\frac{\sin(t)\cos(x)}{t}\right) =\\
&= \cos(x)+\sin(x)\lim_{t\to 0}\frac{\cos(t)-1}{t} =\\
&= \cos(x)+\sin(x)\lim_{t\to 0}\frac{\cos^2(t)-1}{t(\cos(t)+1)} =\\
&= \cos(x)+\sin(x)\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2(t)}{t(\cos(t)+1)} =\\
&= \cos(x)+\sin(x)\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{\cos(t)+1} =\\
&= \cos(x)+\sin(x)\frac{0}{1+1} = \cos(x)\,,
\end{aligned}
$$

t.j. (265). Można otrzymać (266) w analogiczny sposób, ale warto zaobserwować, że biorąc pochodne obydwóch stron równania $1=\sin^2(x)+\cos^2(x)$:

$$
0 = 1' = (\sin^2(x)+\cos^2(x))' = 2\sin(x)\cos(x)+2\cos(x)\cos'(x)\,, \tag{279}
$$

otrzymamy

$$
\cos'(x) = -\sin(x)\,, \tag{280}
$$

tzn. (266), ale *tylko w punktach gdzie* $\cos(x)\neq 0$, t.j. punktach postaci $\frac{k\pi}{2}$.

Co do (267):

$$\begin{aligned}(\mathrm{tg}'(x)) &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \\ &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{tg}^2(x)\,.\end{aligned}$$

Analogicznie (268):

$$\begin{aligned}(\mathrm{ctg}'(x)) &= \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)' = \\ &= \frac{\cos'(x)\sin(x) - \cos(x)\sin'(x)}{\sin^2(x)} = \\ &= \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \\ &= -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \mathrm{ctg}^2(x)\,.\end{aligned}$$

Wzór (269) już udowodniliśmy, patrz (257), a (270) jest analogiczny.

Rozpatrzmy $\ln(y)$ jako funkcję odwrotną funkcji e^x. Niech $y = e^x$. Wówczas $y > 0$ oraz

$$\ln'(y) = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}\,, \tag{281}$$

t.j. (271).

Wiedząc, że $(e^x)' = e^x$,

$$(x^\alpha)' = (e^{\ln(x^\alpha)})' = e^{\ln(x^\alpha)} \cdot (\alpha \ln(x)') = x^\alpha \cdot \alpha\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}\,, \tag{282}$$

t.j. (264).

Wzory (272) oraz (273) pochodzą prosto z (251).

Przejdźmy do (274). Rozpatrzmy $\arcsin(y)$ jako funkcję odwrotną funkcji $\sin(x)$. Niech $y = \sin(x)$, dla $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Wówczas

$$\begin{aligned}(\arcsin(y))' &= \frac{1}{\sin'(x)} = \\ &= \frac{1}{\cos(x)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\,,\end{aligned}$$

ponieważ $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$ dla każdego $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Analogicznie traktujemy (275). Rozpatrzmy $\arccos(y)$ jako funkcję odwrotną funkcji $\cos(x)$. Niech $y = \cos(x)$, dla $x \in [0, \pi]$. Wówczas

$$
\begin{aligned}
(\arccos(y))' &= \frac{1}{\cos'(x)} = \\
&= \frac{1}{-\sin(x)} = \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} = \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}\,,
\end{aligned}
$$

ponieważ $\sin(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)}$ dla każdego $x \in [0,\pi]$.

W przypadku funkcji arctg, niech $y = \operatorname{tg}(x)$, dla $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Wówczas

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{arctg}(y))' &= \frac{1}{\operatorname{tg}'(x)} = \\
&= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(x)} = \\
&= \frac{1}{1+y^2}\,,
\end{aligned}
$$

t.j. (276). Analogicznie, jeśli $y = \operatorname{arctg}(x)$, dla $x \in]0,\pi[$, to

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{arcctg}(y))' &= \frac{1}{\operatorname{ctg}'(x)} = \\
&= \frac{1}{-1-\operatorname{ctg}^2(x)} = \\
&= \frac{-1}{1+y^2}\,,
\end{aligned}
$$

t.j. (277). Przejdźmy do ostatniego wzoru (278) i zaobserwujmy, że

$$
x + \sqrt{1+x^2} > 0\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{283}
$$

Wobec tego, $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ jest wszędzie dobrze zdefiniowany. Wówczas,

$$
\begin{aligned}
\ln(x+\sqrt{1+x^2})' &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\,\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,,
\end{aligned}
$$

tak, jak chcieliśmy.

□

8.2 Twierdzenie Weierstrassa

Pamiętajmy, że podciągiem ciągu $\{x_n\}$ jest nieskończony podzbiór $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ zbioru $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Stwierdzenie 8.1 (• **Zadanie egzaminacyjne nr. 4**). *Każdy ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych ma podciąg $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ monotoniczny.*

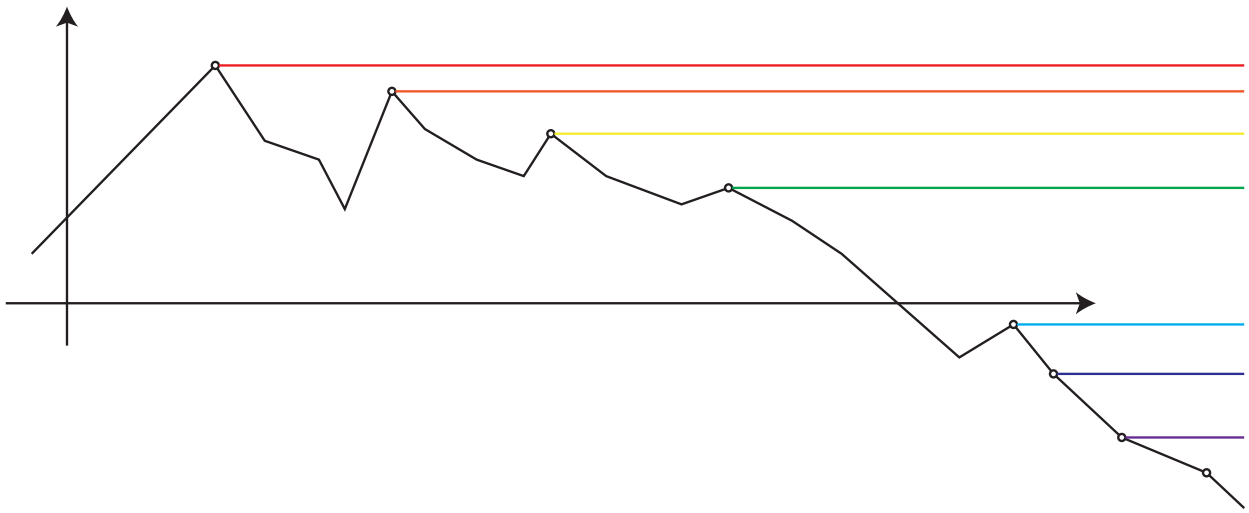
Dowód. Nazwijmy element x_n *wierzchołkiem* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$
x_n \geq x_m\,, \quad \forall m \geq n\,. \tag{284}
$$

Mamy dwie możliwości: albo istnieje nieskończenie wiele wierzchołków

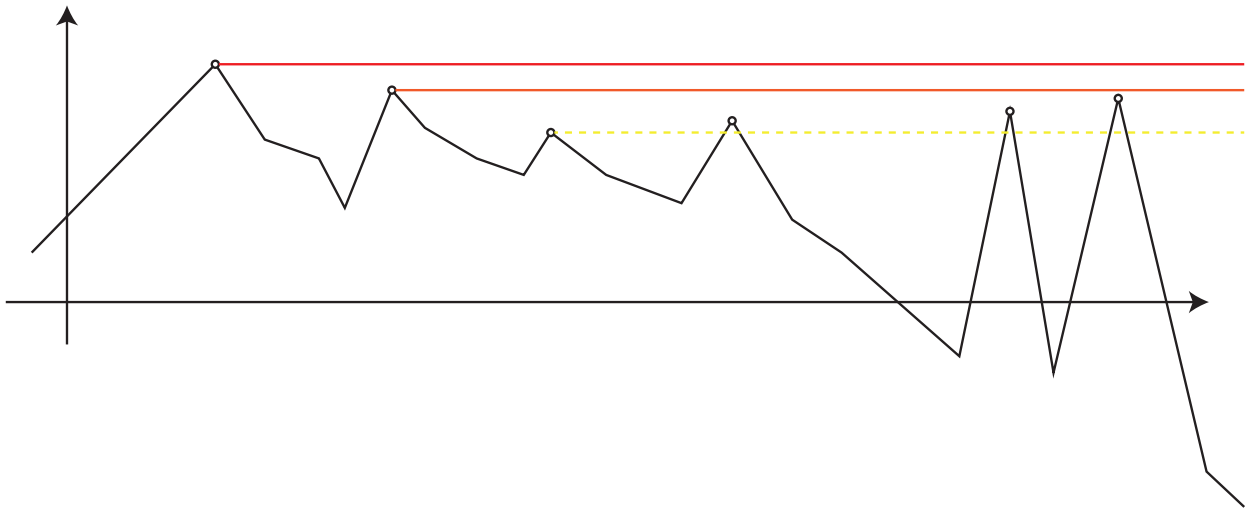
$$x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq x_{n_3} \geq \dots \tag{285}$$

i już mamy upragniony monotoniczny podciąg (patrz rysunek),



albo istnieje tylko skończenie wiele wierzchołków. W tym drugim przypadku, niech x_{n_0} oznacza ostatni wierzchołek. To znaczy, że x_{n_0+1} *nie jest* wierzchołkiem (jeśli wcale nie ma wierzchołków, to można wziąć $n_0 = 0$), w związku z tym musi istnieć jakiś x_{n_1}, dla $n_1 \geq n_0 + 1$, taki, że, $x_{n_1} \geq x_{n_0+1}$. Ale x_{n_1} też nie może być wierzchołkiem, w związku z tym musi istnieć jakiś x_{n_2}, dla $n_2 > n_2$, taki, że, $x_{n_2} \geq x_{n_1}$. Tak robiąc, stworzymy rosnący podciąg (patrze rysunek)

$$x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq x_{n_3} \leq \dots \,. \tag{286}$$



□

Twierdzenie 8.6 (Weierstrassa, **•• Zadanie egzaminacyjne nr. 5**)**.** *Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to istnieją $m, M \in [a, b]$, takie, że*

$$f(m) = \inf f([a, b]) \,, \quad f(M) = \sup f([a, b]) \,. \tag{287}$$

Twierdzenie Weierstrassa mówi, że każda funkcja ciągła w domkniętym przedziale przybiera największą i najmniejszą wartość. Widać, że funkcja $\frac{1}{x}$ *nie posiada* ani największej ani najmniejszej wartości, dokładnie dla tego, że nie jest ciągłą, n.p., w $[-1, 1]$.

Dowód. Szukajmy tyko M: drugi przypadek jest analogiczny.

Dowód składa się z dwóch części: najpierw udowodnijmy, że $f([a, b])$ jest ograniczony z góry a potem znajdziemy element $M \in [a, b]$ taki, że $f(M)$ jest kresem górnym zbioru $f([a, b])$.

Ku sprzeczności, załóżmy, że $\sup f([a,b]) = +\infty$. Z tego wynika, że, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $x_n \in [a,b]$ taki, że, $f(x_n) > n$. Dzięki Stwierdzeniu 8.1 można konstruować monotoniczny podciąg $\{x_n\}$ w $[a,b]$. (Używajmy ten sam symbol.) Będąc monotoniczny i ograniczony (taki ma być, leżący w $[a,b]$), posiada on granicę

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0\,. \tag{288}$$

Z ciągłości funkcji f wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)\,. \tag{289}$$

Pamiętajmy, że x_n został wybrany w taki sposób, żebyśmy mieli $f(x_n) > n$. Ale ciąg $1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots$ dąży do $+\infty$, co pociąga, że ciąg $\{f(x_n)\}$ też dąży do $+\infty$. To sprzeczność, ponieważ $f(x_0)$ jest skończoną liczbą.

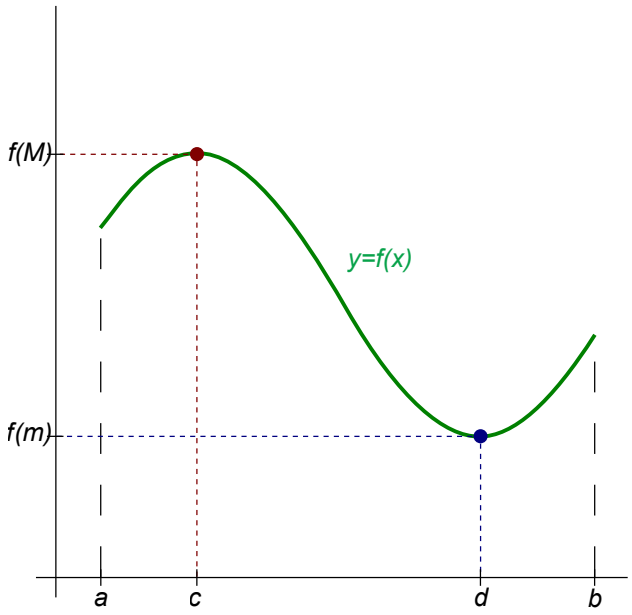
Czyli wiemy, że istnieje $\mu \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\mu = \sup f([a,b])\,. \tag{290}$$

Z definicji kresu górnego, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $f(x_n) > \mu - \frac{1}{n}$. Z konstrukcji, ciąg $\{f(x_n)\}$ dąży do μ. Jak wcześniej, z ciągu $\{x_n\}$ można wyciągnąć monotoniczny podciąg (oznaczony przez ten sam symbol). Będąc monotoniczny i ograniczony, $\{x_n\}$ dąży do jakiegoś $M \in [a,b]$. Z ciągłości funkcji f wynika, że

$$\mu = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(M)\,, \tag{291}$$

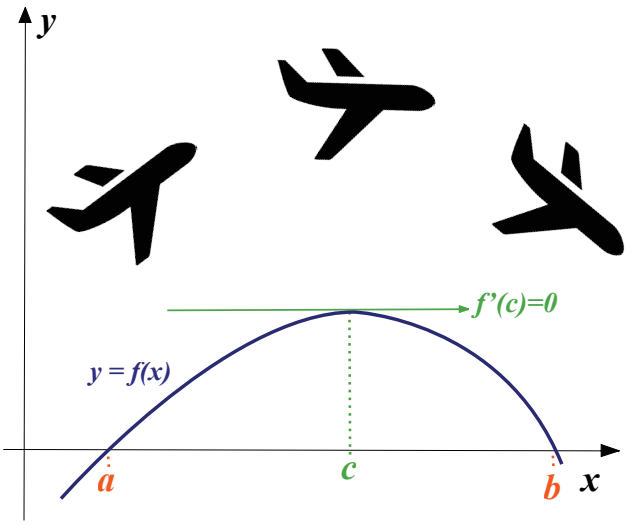
tak, jak chcieliśmy. □



8.3 Twierdzenie Lagrange'a

Twierdzenie 8.7 (Rolle'a •• **Zadanie egzaminacyjne nr. 6**)**.** *Załóżmy, że funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna w każdym punkcie $x \in]a,b[$. Jeśli $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $c \in]a,b[$, że $f'(c) = 0$.*

Pomyślmy o samolocie, który odlatuje z jednego lotniska i dolatuje do innego lotniska, leżącego na tej samej wysokości jak pierwszy. Wówczas musi istnieć przynajmniej jedna chwila, kiedy samolot jest dokładnie poziomy (ufam, że więcej niż jedna chwila!).



Dowód. Jeśli f jest stała, to w każdym punkcie c pochodna funkcji f zeruje się.

Jeśli f nie jest stałą, to mamy m, M takie, że

$$f(m) = \inf f([a,b]) < \sup f([a,b]) = f(M)\,. \tag{292}$$

Punkty m i M nie mogą być obydwa na brzegu, tzn. w $\{a,b\}$. Istotnie, nasze założenie $f(a) = f(b)$ pociągałoby $f(m) = f(M)$: sprzeczność.

Wówczas, jeden z tych, n.p., M jest w $]a,b[$. Dla dostatecznie małego ϵ, punkt $M+t$ jeszcze leży w $]a,b[$, dla każdego t takiego, że $|t| < \epsilon$. Skoro $f(M)$ jest kresem górnym, zachodzi, że

$$f(M) \geq f(M+t)\,, \quad \forall t \text{ t.ż. } |t| < \epsilon\,. \tag{293}$$

Innymi słowy,

$$f(M+t) - f(M) \leq 0\,, \quad \forall t \text{ t.ż. } |t| < \epsilon\,. \tag{294}$$

W szczególności, dla dodatnich t mamy

$$\frac{f(M+t) - f(M)}{t} \leq 0 \tag{295}$$

a dla ujemnych t,

$$\frac{f(M+t) - f(M)}{t} \geq 0\,. \tag{296}$$

Z pierwszej nierówności wynika

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(M+t) - f(M)}{t} \leq 0 \tag{297}$$

a z drugiej

$$\lim_{t\to 0-} \frac{f(M+t) - f(M)}{t} \geq 0\,. \tag{298}$$

Ale f jest różniczkowalna w M, w związku z tym

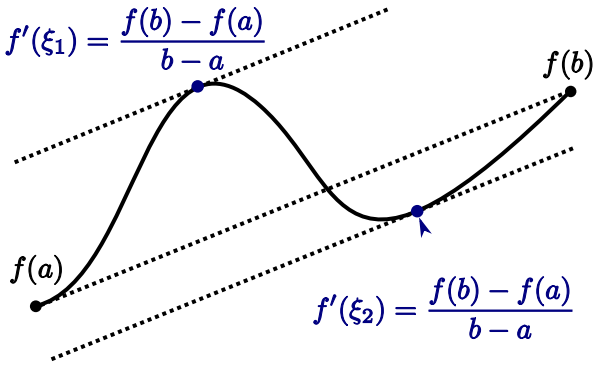
$$f'(M) = \lim_{t\to 0+} \frac{f(M+t) - f(M)}{t} = \lim_{t\to 0-} \frac{f(M+t) - f(M)}{t} = 0\,. \tag{299}$$

□

Wniosek 8.1 (Lagrange'a • **Zadanie egzaminacyjne nr. 7**). *Załóżmy, że $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Wówczas istnieje $\xi \in]a,b[$ taki, że*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{300}$$

Innymi słowy, prosta styczna w punkcie $(\xi, f(\xi))$ jest równoległa do prostej przechodzącej przez $(a, f(b))$ i $(b, f(b))$.



Dowód. Prosta przechodząca przez $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ ma równanie

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\,. \tag{301}$$

Wobec tego funkcja

$$d(x) := f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(x) \tag{302}$$

odpowiada „pionowej odległości" między tą prostą i wykresem funkcji f. Jako taka, d zeruje się w a i w b. Z twierdzenia 8.7 wynika, że istnieje $\xi \in]a, b[$ taki, że

$$d'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(\xi) = 0\,, \tag{303}$$

tak, jak chcieliśmy. □

8.4 Reguły de l'Hospitala

Twierdzenie 8.8 (Reguła de l'Hospitala (I) • **Zadanie egzaminacyjne nr. 8**)**.** *Załóżmy, że* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *są różniczkowalne w* x_0*, a ponadto*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0\,, \quad g'(x_0) \neq 0\,. \tag{304}$$

Wówczas istnieje granica

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}\,, \tag{305}$$

i wynosi dokładnie

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\,. \tag{306}$$

Poniższy dowód stanowi „uproszczoną wersją" kompletnego dowodu: zakładamy tu, że $f(x_0) = 0$ oraz $g(x_0) = 0$.

Dowód. Wystarczy zaobserwować, że

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \\ &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,\frac{x-x_0}{g(x)-g(x_0)} \\ &\longrightarrow \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\end{aligned}$$

dla $x \to x_0$.

□

Dowód „drugiej wersji” reguły de l'Hospitala jest bardziej wymagający i tylko go naszkicujemy.

Twierdzenie 8.9 (Reguła de l'Hospitala (II) •• **Zadanie egzaminacyjne nr. 9**)**.** *Załóżmy, że* $f, g : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ *są różniczkowalne w jakimś otwartym podzbiorze* $U \subseteq \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$*, a ponadto*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty\,, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty\,, \quad g'(x) \neq 0\,, \quad \forall x \in U\,. \tag{307}$$

Wówczas granica

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}\,, \tag{308}$$

istnieje i równa się granicy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,. \tag{309}$$

Szkic dowodu. Zawsze zakładamy, że $x, x' \in U$.

Rozpiszmy

$$\frac{f(x)-f(x')}{g(x)-g(x')} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1-\frac{f(x')}{f(x)}}{1-\frac{g(x')}{g(x)}}\,. \tag{310}$$

Załóżmy, że $x < x'$. Wówczas, dzięki wnioskowi 8.1, istnieją

$$\xi,\ \xi' \in]x, x'[\tag{311}$$

takie, że

$$\frac{(x'-x)f'(\xi)}{(x'-x)g'(\xi')} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi')} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1-\frac{f(x')}{f(x)}}{1-\frac{g(x')}{g(x)}}\,. \tag{312}$$

Weźmy granicę dla $x \to x_0$:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi')} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}\,, \tag{313}$$

a potem granicę dla $x' \to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}\,, \tag{314}$$

tak, jak chcieliśmy. □

8.5 „Patologiczny” przykład różniczkowalności

Niech

$$f(x) := x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \tag{315}$$

będzie funkcją $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Skoro

$$|f(x)| = x^2 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x^2\,, \tag{316}$$

a $x^2 \to 0$, również mamy

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0\,. \tag{317}$$

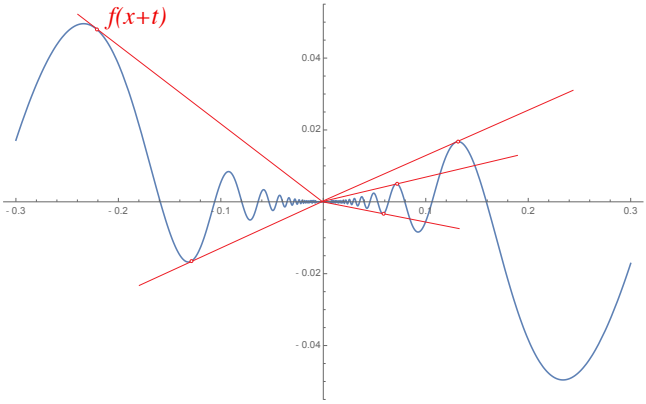
Z tego wynika, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zdefiniowana przez wzór

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{dla} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0\,, \end{cases} \tag{318}$$

jest ciągła w zerze. Aby obliczyć pochodną w punkcie 0 należy rozważyć iloraz

$$\frac{f(0+t)-f(0)}{t} = \frac{f(t)}{t} = t \sin\left(\frac{1}{t}\right)\,, \tag{319}$$

co jeszcze raz dąży do 0, dla $t \to 0$. To raczej oczywiste.

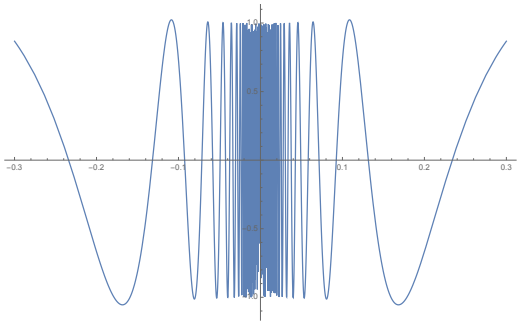


Powyższy rysunek pokazuje, że nachylenie siecznej przechodzącej przez 0 i punkt $(t, f(t))$ jest im mniejsze, tym t jest bliższy do 0. Według definicji, funkcja f **jest różniczkowalna w zerze**.

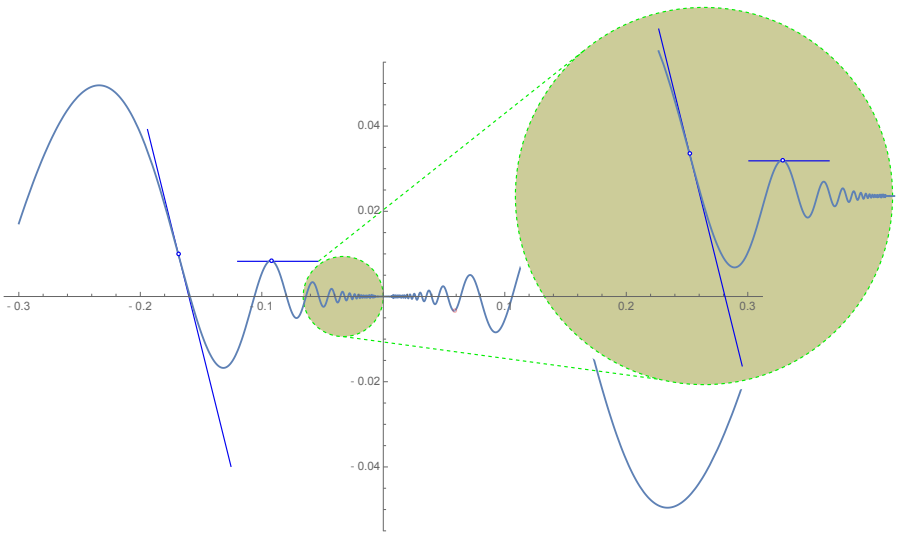
Obliczmy teraz pochodną $f'(x)$, dla $x \neq 0$. Mniej oczywiste, że $f'(x)$ **nie dąży** do zera. O tym można się przekonać i graficznie i przez obliczenia. Drugą drogą, widać, że

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \tag{320}$$

ciągle oscyluje, jak x dąży do zera, wobec tego, nie posiada granicy, patrz poniżej:



Ale warto przyglądać się sytuacji z punktu widzenia geometrii: powodem takiego zachowywania się pochodnej jest fakt, że pochodna nie mierzy **bezwzględnej zmiany wartości funkcji** (tzn. $f(x+t) - f(x)$) ale **względną** zmianę wartości funkcji, tzn. $f(x+t) - f(x)$ przez t. Innymi słowy, jeśli nawet oscylacje funkcji f są co raz mniejsze, zmiany nachylenia są zawsze te same. Takie zjawisko zachodzi dzięki „nieskończonej elastyczności" osi liczb rzeczywistych: sytuacja, co powstaje w skali, powiedzmy, od 0 do 1, ma tą samą postać, jaką sytuacji w skali od 1 do $\frac{1}{10}$. Ale pochodna nie czuje zmiany skali, ponieważ pojecie nachylenia prostej stycznej nie zależy od skali. Patrz poniższy rysunek:



Następujące twierdzenie (bez dowodu) będzie **użyteczne aby sprawdzać różniczkowalność**.

Twierdzenie 8.10. *Niech f będzie funkcją ciągłą w x_0 i różniczkowalną w każdym punkcie $x \neq x_0$. Wówczas,* ***jeśli istnieje granica***

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) \tag{321}$$

to f jest różniczkowalna również w x_0. Ponadto,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)\,. \tag{322}$$

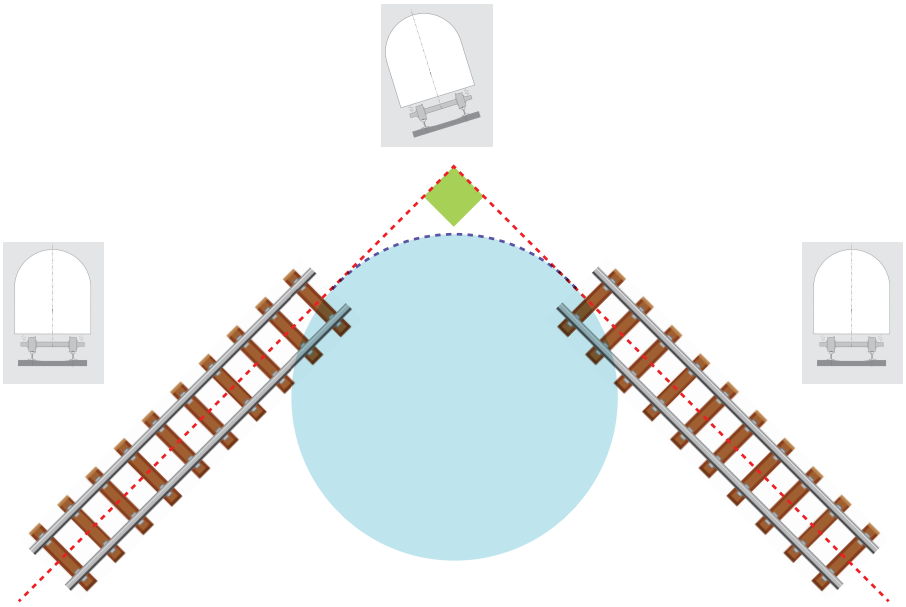
Studenci powinni pamiętać, że powyższe twierdzenie jest użyteczne, tylko jeśli granica pochodnej istnieje. Nasz „patologiczny przykład" stanowi wyjątek. W takiej sytuacji, różniczkowalność można sprawdzić tylko „ręcznie", t.j., obliczając pochodną w x_0 z definicji.

9 Tydzień IX: 26. i 29.listopada 2024

9.1 Pochodne wyższego rzędu

9.1.1 Eksperyment: dokończenie trasy kolejowej

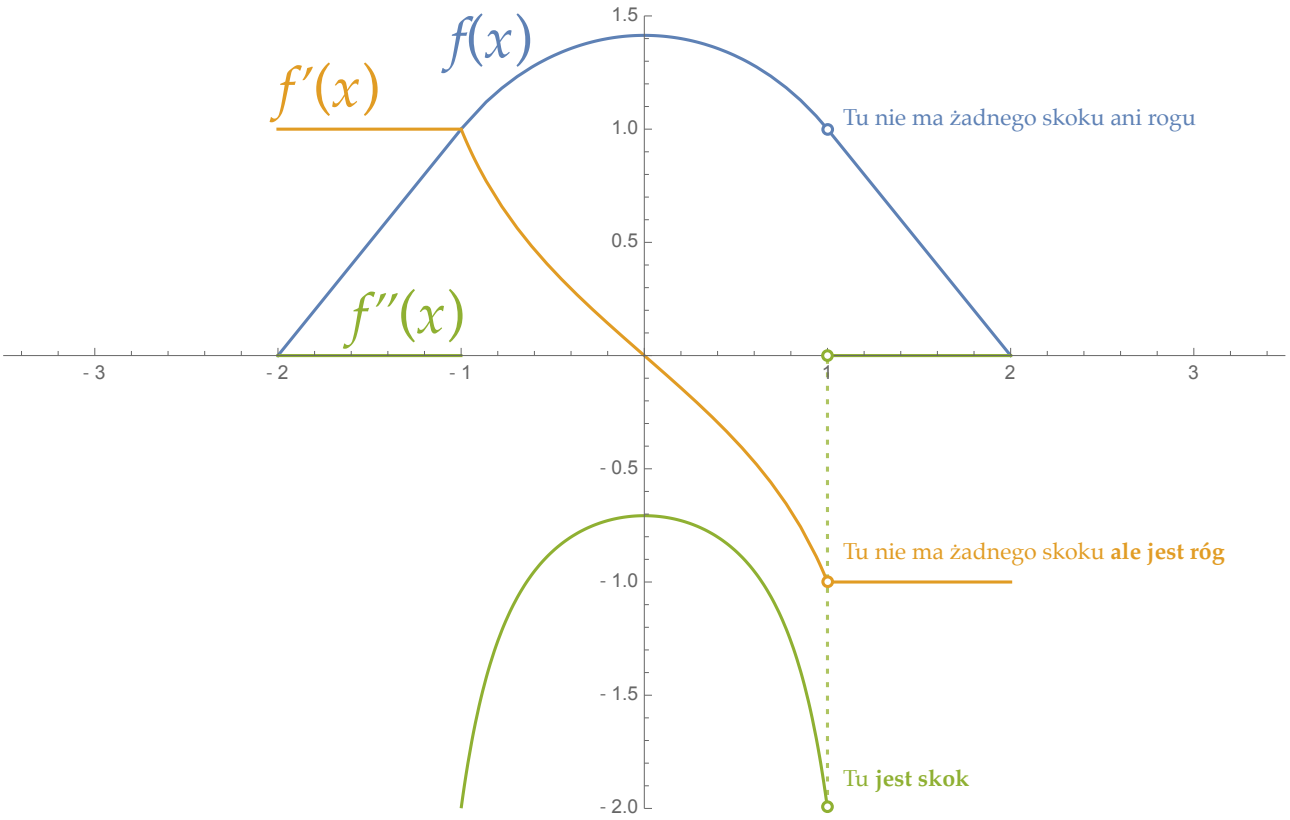
Załóżmy, że mamy dokończyć trasę kolejową poniższej postaci:



Stwierdzę, że, jeśli wybieramy jako kształt jedną czwartą okręgu, to pociąg wykolei się, nawet jeśli dodajemy odpowiednią przechyłkę toru. Istotnie, aby przeciwdziałać sile odśrodkowej, należy zgiąć tor. Ale nie można wprowadzić od razu całej przechyłki: należy zrobić to stopniowo: ale w międzyczasie pociąg wykolei się!

Warto podkreślić, że powodem wykolejenia **nie jest siła odśrodkowa** ale raczej **jej gwałtowna zmiana**. Innymi słowy, obecność jakiejś nieciągłości w pierwszej pochodnej.

Przykład ten prowadzi nas do pojęcia „ciągłości wyższego rzędu": jeśli nawet nowy kawałek toru został ładnie przyspawany (t.j., nie ma żadnej widocznej nieciągłości), pociąg wykolei się, jakby była jakaś „dziura" gdziekolwiek. Ale, aby widzieć taką dziurę, należy przejść do drugiej pochodnej.



Powyższy rysunek pokazuje kształt spawanej trasy, jako wykres odpowiedniej funkcji (przedstawionej w niebieskim kolorze), mianowicie

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla} \quad x \leq -1 \\ \sqrt{2-x^2} & \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ -x+2 & \text{dla} \quad x \geq 1 \end{cases} \tag{323}$$

Widać, że, w punktach spawania (jeden zaznaczony przez niebieskie kółeczko), wykres nie robi żadnego skoku i nie tworzy żadnego rogu. Fakt, że nie robi żadnego skoku, odpowiada faktowi, że f jest **ciąga**. Fakt, że nie tworzy żadnego rogu, odpowiada faktowi, że **jej pochodna** f'

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \leq -1 \\ -\frac{x}{\sqrt{2-x^2}} & \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{dla} \quad x \geq 1 \end{cases} \tag{324}$$

jest **ciąga**. Istotnie, wykres f' można rysować bez odrywana ręki (patrz żółty wykres).

9.1.2 Funkcje klasy $\mathcal{C}^1$

Definicja 9.1. *Funkcja ciągła $f : P \to \mathbb{R}$ na przedziale P jest* klasy $\mathcal{C}^1$ *jeśli f jest* ***różniczkowalna*** *na P i f' jest* ***ciągła*** *w P.*

Funkcja jest klasy $\mathcal{C}^1 \iff$ jej pochodna **istnieje** i jest **ciągła**.

Definicja 9.2. *Zbiór wszystkich funkcji klasy $\mathcal{C}^1$ na P oznaczamy symbolem $\mathcal{C}^1(P)$.*

Napis

$$f \in \mathcal{C}^1(P)$$

czytamy „niech f będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^1$ na P”.

Przykład 9.1. „Patologiczna” funkcja f (318) z powyższego rozdziału pokazuje, że **funkcja różniczkowalna nie musi być klasy** $\mathcal{C}^1$. Funkcja (323) jest przykładem funkcji klasy $\mathcal{C}^1$.

9.1.3 Pochodna pochodnej, czyli druga pochodna

W odniesieniu do funkcji (323), skoro $f'(x)$ jest ciągła, można próbować obliczyć pochodną funkcji $f'(x)$ w pewnym punkcie x_0. Oczywiście, z stałości f' aż do argumentu $x_0 = -1$, wynika, że

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f'(x_0+t) - f'(x_0)}{t} = 0\,,$$

tj. prosta styczna do wykresu f jest pozioma od $-\infty$ to -1.

Z drugiej strony, nachylenie prostej przechodzącej przez punkty $(-1,1)$ i $(x, \frac{x}{\sqrt{2-x^2}})$ wynosi

$$\begin{aligned}
\frac{-\frac{x}{\sqrt{2-x^2}} - 1}{x-(-1)} &= -\frac{x+\sqrt{2-x^2}}{(x+1)\sqrt{2-x^2}} = \\
&= -\frac{x^2-(2-x^2)}{(x+1)\sqrt{2-x^2}(x-\sqrt{2-x^2})} = \\
&= -2\frac{x^2-1}{(x+1)(x\sqrt{2-x^2}-(2-x^2))} = \\
&= -2\frac{x-1}{x\sqrt{2-x^2}-2+x^2}\,,
\end{aligned}$$

co dąży do -2 dla $x \longrightarrow -1^+$, tj. prosty sieczny do wykresu f w punkcie $x_0 = -1$ nie dążą do prostej poziomej – funkcja f' nie jest wtedy różniczkowalna w $x_0 = -1$. W przeciwnym razie, możemy podać następującą definicję.

Definicja 9.3. Drugą pochodną *funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 jest pochodna funkcji $f'(x)$ w punkcie x_0 (jeśli ona **istnieje**). Oznaczamy ją*

$$f''(x_0)\,. \tag{325}$$

Jeśli $f''(x)$ istnieje dla każdego x z dziedziny definicji f, to mamy **funkcję** drugiej pochodnej*, oznaczonej przez ten samy symbol $f''(x)$.*

Czytelnik musi sam zdecydować, czy $f''(x)$ oznacza funkcję czy jej wartość w punkcje x.

9.1.4 Wyższe pochodne i funkcje klasy $\mathcal{C}^n$

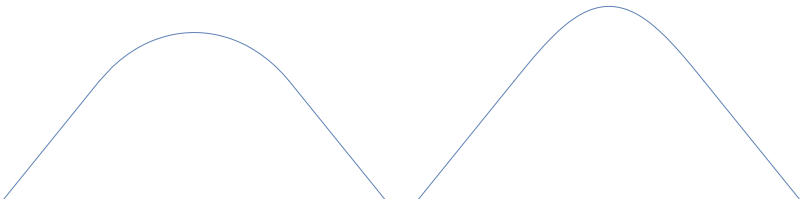
Jeszcze raz, istnienie drugiej pochodnej w każdym punkcie nie gwarantuje, że funkcja druga pochodna jest ciągła. Nasz przykład trasy kolejowej stanowi wyjątek: skok zrobiony przez funkcją drugą pochodną (w zielonym kolorze) odpowiada tej gwałtownej sile, co wypycha pociąg poza tory. Innymi słowy, f jest funkcją klasy $\mathcal{C}^1$ ale nie klasy $\mathcal{C}^2$.

Definicja 9.4. *Oznaczywszy $f^{(1)}$ pierwsza pochodna f' funkcji $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$,* pochodną n–tego stopnia *(lub po prostu n–tą* pochodną*) funkcji f (jeśli **istnieje**) jest funkcja dana wzorem rekurencyjnym*

$$f^{(n+1)} := (f^{(n)})'\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Definicja 9.5. *Funkcja ciągła $f : P \to \mathbb{R}$ na przedziale P jest klasy $\mathcal{C}^n$ na P jeśli f jest różniczkowalna na P, f' jest ciągła i różniczkowalna na P, f'' jest ciągła i różniczkowalna na P, ..., $f^{(n-1)}$ jest ciągła i różniczkowalna na P i $f^{(n)}$ jest ciągła na P.*

Innymi słowy, funkcja klasy $\mathcal{C}^n$ jest funkcją, która posiada wszystkie pochodne aż do n–tego rzędu a ponad to, **wszystkie są ciągłe**.



Nawet gołym okiem, widać, że kształt po prawej stronie jest gładszy niż ten po lewej stronie: nawet jeśli żaden nie tworzy żadnego rogu, jeden jest „bardziej gładki” niż drugi. Dokładniej, jeden jest klasy

$\mathcal{C}^2$ a drugi tylko klasy $\mathcal{C}^1$. Naukowe badania pokazały, że ludzkie oko nie umie zauważyć różnicy między klasą $\mathcal{C}^3$ a wyższymi. Taka uwaga ma poważne zastosowanie w designu, n.p., samochodów: bardziej przyjemna ludzkiemu oku (a nie tylko bardziej aerodynamiczna) sylwetka ma wyższą klasę, ale jej konstrukcja jest zarówno bardziej wymagająca z punktu widzenia techniki.


sylwetka klasy $\mathcal{C}^0$


sylwetka klasy $\mathcal{C}^1$


sylwetka klasy $\mathcal{C}^2$

9.1.5 Funkcje gładkie, czyli klasy $\mathcal{C}^\infty$

Według filozofii naturalnej, **gwałtowne zjawiska nie istnieją**: nawet wybuch bomby atomowej jest bardzo delikatnym procesem—to nasz problem, że czas naszego układu odniesienia mija wielokrotnie wolniej niż czas wszechświata subatomowego. Skoro zjawiska są opisane przez funkcje i ich pochodne, taka zasada odpowiada faktowi, że **wszystkie funkcje opisujące naturalne zjawiska posiadają ciągłe pochodne dowolnie wysokiego rzędu**: mamy do czynienia z funkcjami klasy $\mathcal{C}^\infty$, lub **funkcjami gładkimi**. (Funkcja klasy $\mathcal{C}^0$ jest funkcją ciągłą ale niekonieczne różniczkowalną.)

Istotnie, najbardziej „popularne” funkcje, n.p.,

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\,, \quad e^x\,, \quad \ln(x)\,, \quad \sin(x)\,, \quad \operatorname{arctg}(x)\,, \tag{326}$$

i.t.d., są gładkie. Student może—stosunkowo bezpiecznie—przypuścić, że zawsze mamy do czynienia z funkcjami gładkimi, t.j., że można wziąć bez stresu pochodne dowolnie wysokiego rzędu. Takie pochodne grają kluczową rolę, kiedy próbujemy przybliżać jakąś „dziwną funkcję” (n.p., $\operatorname{arctg}(x)$) przez „bardziej ludzkie funkcje” (mianowicie: wielomiany). Precyzja takiej metody jest oparta na możliwości obliczenia pochodnych wyższego rzędu.

9.2 Rozwinięcie szeregu Taylora

9.2.1 Główne Twierdzenie

Twierdzenie 9.1 (Taylora •• **Zadanie egzaminacyjne nr. 10**). *Niech $f : I \to \mathbb{R}$, gdzie $I =]a, b[$, będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^{n-1}$, taką, że istnieje n–ta pochodna $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$. Niech $x_0, x \in I$ i zdefiniujmy wielomian w nieznanej t*

$$P(t) := f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(t - x_0)^k\,. \tag{327}$$

Wówczas istnieje $\xi \in [x_0, x]$ taki, że

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n\,. \tag{328}$$

Twierdzenie 9.1 stanowi jeden z najgłębszych osiągań matematyki teoretycznej i gra kluczową rolę w zastosowaniach. Studenci powinni być w stanie, aby go zastosować w różnych sytuacjach, a również pamiętać jakiś szkic jego dowodu. Dowód nie jest technicznie skomplikowany i jest oparty na wielokrotnym zastosowaniu twierdzenia Lagrange'a.

> Aby uprościć trawienie takiego twierdzenia, student może zakładać, że $I = \mathbb{R}$, a funkcja f jest **gładka** (to, co się dzieje w większości przypadków): wówczas nie mamy ani a ani b, i twierdzenie zachodzi dla każdego n.

Zanim zaczniemy dowód, ustalmy $n = 1$. Wówczas

$$P(t) = f(x_0)\,, \tag{329}$$

t.z. **stały wielomian** w t. W związku z tym, (328) staje się

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)\,, \tag{330}$$

t.j.,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)\,, \tag{331}$$

dla pewnego $\xi\in[x_0,x]$. Innymi słowy, Twierdzenie Taylora zmniejsza się do Twierdzenia Lagrange'a. Można wtedy rozpatrywać Twierdzenie Taylora jako Twierdzenie Lagrange'a „wyższego rzędu".

Dowód Twierdzenia 9.1. Jeśli $x=x_0$, (328) staje się $f(x_0)=f(x_0)$ i nic nie należy udowodnić. Niech więc $x\neq x_0$ (załóżmy nawet $x>x_0$) i zdefiniujmy liczbę

$$M:=\frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n}\,. \tag{332}$$

Aby udowodnić (328), będziemy musieli pokazać, że

$$\exists\xi\in[x_0,x] \quad : \quad M=\frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,. \tag{333}$$
$$\uparrow\uparrow\uparrow \quad \textbf{TO NASZ CEL TERAZ} \quad \uparrow\uparrow\uparrow$$

Czytelnikowi będzie dobrze porównać wzór (331) ze wzorem (333). Zamiast **stałej** $f(x_0)$ mamy **wielomian** $(n-1)$**–ego rzędu** $P(x)$; zamiast **pierwszej pochodnej** funkcji f w punkcie ξ mamy n**–tą pochodną** funkcji f w punkcie ξ przez $n!$; nie podzielimy przez $x-x_0$, ale podzielimy przez $(x-x_0)^n$.

Mimo takich różnic, podejście jest to samo.

Rozpiszmy (333) jako $n!M=f^{(n)}(\xi)$, czyli

$$\exists\xi\in[x_0,x] \quad : \quad f^{(n)}(\xi)-n!M=0\,, \tag{334}$$
$$\uparrow\uparrow\uparrow \quad \textbf{TO NASZ CEL TERAZ} \quad \uparrow\uparrow\uparrow$$

i zaobserwujmy, że liczba $n!M$ możemy traktować jako n–**tą pochodną** funkcji $M(t-x_0)^n$ (względem t):

$$\begin{aligned}
(M(t-x_0)^n)' &= nM(t-x_0)^{n-1}\,,\\
(M(t-x_0)^n)'' &= n(n-1)M(t-x_0)^{n-2}\,,\\
(M(t-x_0)^n)''' &= n(n-1)(n-2)M(t-x_0)^{n-3}\,,\\
\dots \quad &\dots \quad \dots\\
(M(t-x_0)^n)^{(n)} &= n!M\,.
\end{aligned}$$

W świetle tego, możemy dalej przeformułować nasz cel (334):

$$\exists\xi\in[x_0,x] \quad : \quad (f(t)-M(t-x_0)^n)^{(n)} \text{ zeruje się dla } t=\xi\,. \tag{335}$$
$$\uparrow\uparrow\uparrow \quad \textbf{TO NASZ CEL TERAZ} \quad \uparrow\uparrow\uparrow$$

Niestety, to nie koniec tego szeregu przeformułowań (za chwilę czytelnik zrozumie dlaczego je wykonaliśmy): skoro (327) jest **wielomianem** $(n-1)$**–ego rzędu**, jego n–ta pochodna wynosi 0, w związku z czym nie przeszkadza wzorowi (335) dodawanie mu $P^{(n)}(t)$, tj.

$$\exists\xi\in[x_0,x] \quad : \quad (f(t)-P(t)-M(t-x_0)^n)^{(n)} \text{ zeruje się dla } t=\xi\,. \tag{336}$$
$$\uparrow\uparrow\uparrow \quad \textbf{TO NASZ CEL TERAZ} \quad \uparrow\uparrow\uparrow$$

W tym ostatnim przeformułowaniu (336) tezy (328) naszego Twierdzenia 9.1 pojawi się **funkcja pomocnicza** $g(t)$ dana wzorem

$$g(t) := f(t) - P(t) - M(t-x_0)^n\,. \tag{337}$$

Znaczy to, że, aby skończyć dowód naszego Twierdzenia, trzeba:

znaleźć $\xi \in [x_0, x]$ takie, że n–ta pochodna funkcji $g(t)$ zeruje się dla $t = \xi$.

Zaczyna się tu zabawniejsza cześć dowodu.

Wstępnie, zaobserwujmy, że wszystkie pochodne $g^{(k)}(t)$ funkcji $g(t)$, dla $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$, zerują się w $t = x_0$:

$$\begin{aligned} g(x_0) &= f(x_0) - P(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0\,,\\ g'(x_0) &= f'(x_0) - P'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0\,,\\ \ldots \quad &\ldots \quad \ldots\\ g^{(n-1)}(x_0) &= f^{(n-1)}(x_0) - P^{(n-1)}(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n-1)}(x_0) = 0\,. \end{aligned}$$

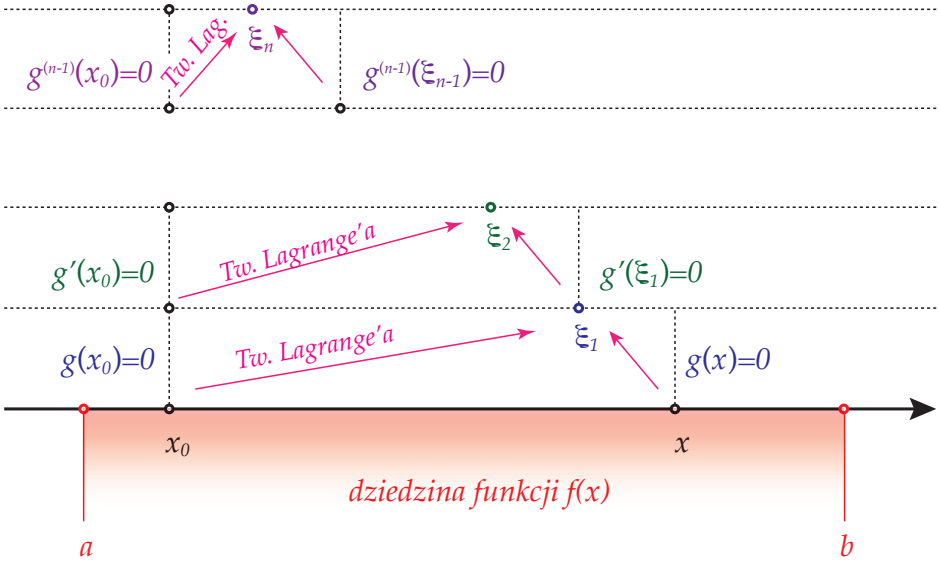
Skoro funkcja $g(t)$ zeruje się dla $t = x$, czyli $g(x) = f(x) - P(x) - M(x-x_0)^n = 0$ (z definicji (332) liczby M), na mocy Twierdzenia Lagrange'a, istnieje $\xi_1 \in [x_0, x]$ takie, że

$$g'(\xi_1) = 0\,. \tag{338}$$

Skoro $g'(x_0) = 0$, jeszcze raz na mocy Twierdzenia Lagrange'a, istnieje $\xi_2 \in [x_0, \xi_1]$ takie, że

$$g''(\xi_2) = 0\,. \tag{339}$$

Tak robiąc, otrzymamy $\xi_n \in [x_0, \xi_{n-1}]$ taki, że $g^{(n)}(\xi_n) = 0$. Patrz rysunek:



Takie ξ_n jest liczbą ξ, czego potrzebowaliśmy. □

9.2.2 Pojęcie reszty/poprawki

Wniosek 9.1 (Wzór Taylora lub MacLaurin'a z resztą postaci Peano lub Lagrange'a)**.** *Niech $f : I \to \mathbb{R}$, gdzie $I =]a, b[\ni x_0$, będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^{n-1}$, taką, że istnieje n–ta pochodna $f^{(n)}(x_0)$ w punkcie x_0. Wówczas, dla każdego $x \in I$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r(x)\,, \tag{340}$$

gdzie

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = 0\,. \tag{341}$$

Ponadto, jeśli f jest klasy $\mathcal{C}^n$ i istnieje $(n+1)$–wsza pochodna $f^{(n+1)}$, to

$$r(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{342}$$

dla pewnego ξ między x_0 a x (nie ważne które największe).

Uwaga o terminologii: ogólny wzór (340) nazywa się **wzór Taylora**; w przypadku, gdzie $x_0 = 0$, mamy **wzór MacLaurin'a**; „błąd" $r(x)$, który pojawi się w (340) nazywa się **resztą postaci Peano**; jeśli reszta $r(x)$ jest rozwikłana wzorem (342), to mamy do czyniena z resztą **postaci Lagrange'a**.

Zauważmy, że (342) implikuje (341) ale nie z powrotem: aby znaleźć ξ, funkcja f musi być „gładsza". Jakkolwiek, wzór (341) mówi, że „błąd" $r(x)$ dąży do 0 szybszej niż $(x-x_0)^n$. Innymi słowy, wielomian $P(x)$ jest dobrym przybliżeniem funkcji $f(x)$ o ile tylko $x-x_0$ jest mniejsze od 1. Istotnie, jeśli $x-x_0$ jest mniejsze od 1, jego potęgi $(x-x_0)^n$ szybko maleją.

9.2.3 Zastosowanie: przybliżenie numeryczne liczby π

Aby zilustrować takie zjawisko, spróbujmy obliczyć jakieś numeryczne przybliżenie naszej ulubionej liczby niewymiernej: π. Skoro

$$\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}\,, \tag{343}$$

można ustalić $f(x) := \operatorname{arctg}(x)$. Skoro $\operatorname{arctg}(x)$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$, można wybrać dowolny n, n.p., $n = 30$. To mamy

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} - \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{17}}{17} - \frac{x^{19}}{19} + \frac{x^{21}}{21} - \frac{x^{23}}{23} + \frac{x^{25}}{25} - \frac{x^{27}}{27} + \frac{x^{29}}{29} + r(x)\,,$$

gdzie

$$\lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^{30}} = 0\,. \tag{344}$$

Wówczas, 4 razy powyższy wielomian dwudziestodziewiątego rzędu, ewaluowanego w 1, stanowi „pewnie" przybliżenie liczby π:

$$4\cdot\frac{116752370597}{145568097675} = 3.20819\,, \tag{345}$$

co odpowiada błędowi

$$r(1) = -0.066593\,. \tag{346}$$

Istotnie, we wzorze (342) różnica $x-x_0$ wynosi 1, wobec tego nie ma żadnego skutku i jedyna rzecz, która mogłaby spowodować malenie $r(x)$ jest fakt, że podzielimy przez $n!$.

W 1706 roku, angielski matematyk John Machin otrzymał znacznie lepsze przybliżenie, korzystając ze wzoru

$$\pi = 16\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - 4\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right)\,. \tag{347}$$

Ustalmy $n = 10$. Wobec tego

$$\begin{aligned}\pi &= 16\left(\left(\tfrac{1}{5}\right) - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^7}{7} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^9}{9} + r\left(\tfrac{1}{5}\right)\right)\\ &\quad - 4\left(\left(\tfrac{1}{239}\right) - \frac{\left(\frac{1}{239}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{239}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{1}{239}\right)^7}{7} + \frac{\left(\frac{1}{239}\right)^9}{9} + r\left(\tfrac{1}{239}\right)\right)\\ &= \frac{32785387340225868580304881823 6}{10435912817040866303855273437 5} + 16r\left(\tfrac{1}{5}\right) - 4r\left(\tfrac{1}{239}\right)\,,\end{aligned}$$

i okazuje się, że

$$\begin{aligned}\frac{32785387340225868580304881823 6}{10435912817040866303855273437 5} &= 3.141592682\,,\\ 16r\left(\tfrac{1}{5}\right) - 4r\left(\tfrac{1}{239}\right) &= -2.88146\cdot 10^{-8}\,.\end{aligned}$$

Widać, że jakość przybliżenia jest ok. o sześć rzędów wielkości wyższa niż wcześniej, nawet jeśli skorzystaliśmy z wielomianu dziesiątego rzędu a nie trzydziestego. Istotnie, we wzorze (342) różnica $x - x_0$ wynosi $\frac{1}{5}$ lub $\frac{1}{239}$, co spowoduje szybkie dążenie do zero.

Morał tej historii: wzór Taylora ma jakąś użyteczność jako narzędzie przybliżenia funkcji tylko jeśli punkt odniesienia x_0 i punkt gdzie ewaluujemy funkcję x, są bardzo bliskie.

Stwierdzenie 9.1. *Zachodzi wzór* (347)

Dowód. Zaczynamy od wzoru na tangens podwójnego kąta:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \\ &= \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)} = \\ &= \frac{\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}} = \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\alpha)+\operatorname{tg}(\beta)}{1-\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}\,, \end{aligned} \tag{348}$$

a następnie ustalmy $\alpha = \operatorname{arctg}(u)$ oraz $\beta = \operatorname{arctg} v$: biorąc arctg obydwóch stron (348), otrzymuje się

$$\operatorname{arctg}(u)+\operatorname{arctg}(v) = \operatorname{arctg}\left(\frac{u+v}{1-uv}\right)\,, \tag{349}$$

skąd od razu wynika

$$2\operatorname{arctg}(u) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2u}{1-u^2}\right)\,, \tag{350}$$

oraz, wykorzystując nieparzystość arctg,

$$\operatorname{arctg}(u)-\operatorname{arctg}(v) = \operatorname{arctg}\left(\frac{u-v}{1+uv}\right)\,. \tag{351}$$

Dwukrotnie zastosowanie (350) daje nam

$$4\operatorname{arctg}(u) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{2u}{1-u^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\left(\frac{2u}{1-u^2}\right)}{1-\left(\frac{2u}{1-u^2}\right)^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{4u(1-u^2)}{1+u^4-6u^2}\right)\,. \tag{352}$$

Dla $u = \frac{1}{5}$, wzór (352) pozwala nam udowodnić, że

$$\begin{aligned} 4\operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{5}\right) &= \operatorname{arctg}\left(\frac{4\frac{1}{5}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^4-6\left(\frac{1}{5}\right)^2}\right) = \\ &= \operatorname{arctg}\left(\frac{4\frac{1}{5}\frac{24}{25}}{1+\frac{1}{625}-6\frac{1}{5}}\right) = \\ &= \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{4\cdot 24}{5\cdot 25}}{\frac{625+1-6\cdot 25}{625}}\right) = \\ &= \operatorname{arctg}\left(\frac{4\cdot 24\cdot 5}{625+1-6\cdot 25}\right) = \\ &= \operatorname{arctg}\left(\frac{4\cdot 120}{476}\right) = \\ &= \operatorname{arctg}\left(\frac{120}{119}\right)\,. \end{aligned}$$

Wzór (351) dla $u = \frac{120}{119}$ oraz $v = \frac{1}{139}$ doprowadzi do konkluzji:

$$\begin{aligned}
4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{239}\right) &= \mathrm{arctg}\left(\frac{120}{119}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{239}\right) = \\
&= \mathrm{arctg}\left(\frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119}\frac{1}{239}}\right) = \\
&= \mathrm{arctg}\left(\frac{\frac{120\cdot 239 - 119}{119\cdot 239}}{\frac{119\cdot 239 + 120}{119\cdot 239}}\right) = \\
&= \mathrm{arctg}\left(\frac{120\cdot 239 - 119}{119\cdot 239 + 120}\right) = \\
&= \mathrm{arctg}\left(\frac{119\cdot 239 + 239 - 119}{119\cdot 239 + 120}\right) = \\
&= \mathrm{arctg}\left(\frac{119\cdot 239 + 120}{119\cdot 239 + 120}\right) = \mathrm{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

□

9.3 Wyznaczenie ekstremów funkcji

W dowodzie Twierdzenia Rolle'a 8.7 pokazano, że w punkcje największej/najmniejszej wartości funkcji funkcji f, pochodna f' zeruje się.

Definicja 9.6. *Punkt $x_0 \in U$ dziedziny funkcji różniczkowalnej $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywa się* krytycznym, *wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x_0) = 0$.*

Dlaczego „krytyczny"a nie „maksimum/minimum"?

Definicja 9.7. *Punkt Punkt $x_0 \in U$ dziedziny funkcji $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywa się* ekstremum, *wtedy i tylko wtedy, gdy w x_0 funkcja f przybiera największą/najmniejszą wartość.*

Trzeba wtedy pamiętać, że:

$$\begin{aligned}
x_0 \text{ ekstremum funkcji różniczkowalnej } f &\implies x_0 \text{ punkt krytyczny } f\,, \\
x_0 \text{ punkt krytyczny funkcji różniczkowalnej } f &\not\Longrightarrow x_0 \text{ ekstremum } f\,.
\end{aligned}$$

Uwaga ta pokazuje konieczność Twierdzenia, które nam mówi, kiedy punkt krytyczny jest ekstremum (i ewentualnie jakim). Oczywiście, **jeśli wszystkie punkty są krytyczne, to funkcja jest stała, tj. wszystkie punkty są ekstremami**.

Twierdzenie 9.2 (• **Zadanie egzaminacyjne nr. 11**). *Niech f będzie ciągłą i różniczkowalna w $U \subset \mathbb{R}$. Wówczas*

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow f \text{ stała w } U\,. \tag{353}$$

Dowód. Udowodnijmy implikację $\Leftarrow$.

Niech $x \in U$. Skoro f jest stała,

$$f'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0\,. \tag{354}$$

Udowodnijmy implikację $\Rightarrow$.

Niech $a, b \in U$, $a \neq b$. Na mocy Twierdzenia Lagrange'a,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x) \tag{355}$$

dla pewnego $x \in [a, b]$. Ale $f'(x) = 0$ i $b - a \neq 0$, co pociąga $f(b) - f(a) = 0$, t.j., $f(b) = f(a)$. Z tego wynika, że f jest stała w U. □

Zanim przejdziemy do głównego Twierdzenia, warto rozróżniać kilka rodzajów ekstremów.

> Jeśli w argumencie x_0 funkcja f przybiera największą/najmniejszą wartość, to mówimy, że x_0 jest **punktem** maksimum/minimum, podczas gdy $f(x_0)$ jest największą/najmniejszą **wartością**. Z reguły omijamy słowo „punkt"i mówimy tylko maksimum/minimum. Trzeba jednak na to zwracać uwagę w sprawdzianach pisemnych, **ponieważ czasami student jest proszone i o punkt i o wartość**.

Definicja 9.8. *Niech $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją i $x_0 \in U$:*

$$
\begin{aligned}
x_0 \textit{ jest } \text{maksimum } \textbf{globalnym} &\overset{\text{def.}}{\iff} f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in U\,,\\
x_0 \textit{ jest } \text{minimum } \textbf{globalnym} &\overset{\text{def.}}{\iff} f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in U\,,\\
x_0 \textit{ jest } \text{maksimum } \textbf{lokalnym} &\overset{\text{def.}}{\iff} \exists V \subset U \;:\; V \ni x_0 \;\wedge\; [f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in V]\,,\\
x_0 \textit{ jest } \text{minimum } \textbf{lokalnym} &\overset{\text{def.}}{\iff} \exists V \subset U \;:\; V \ni x_0 \;\wedge\; [f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in V]\,.
\end{aligned}
$$

Ponadto, we wszystkich powyższych przypadkach, ***jeśli nierówności są ścisłe, to dodajemy przymiotnik „właściwe"*** *– inaczej można (ale nie trzeba) dodać przymiotnik* „niewłaściwe"*.*

Twierdzenie 9.3 (• **Zadanie egzaminacyjne nr. 12**)**.** *Niech f będzie klasy $\mathcal{C}^{2k-1}$ w $U \subset \mathbb{R}$ i załóżmy, że istnieje $f^{(2k)}(x_0)$. Wówczas, jeśli*

$$
f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(2k-1)}(x_0) = 0\,, \quad f^{(2k)}(x_0) \neq 0\,, \tag{356}
$$

to f ma w x_0 ekstremum lokalne właściwe. Dokładniej,

$$
\begin{aligned}
f^{(2k)}(x_0) > 0 \quad &\Rightarrow \quad f \textit{ ma minimum lokalne właściwe,}\\
f^{(2k)}(x_0) < 0 \quad &\Rightarrow \quad f \textit{ ma maksimum lokalne właściwe,}
\end{aligned}
$$

Dowód. Udowodnijmy tylko przypadek $f^{(2k)}(x_0) > 0$.

Rozpiszmy wzór Taylora

$$
f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{2k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + r(x)\,, \tag{357}
$$

biorąc pod uwagą (356):

$$
f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(2k)}(x_0)}{(2k)!}(x - x_0)^{2k} + r(x)\,. \tag{358}
$$

Wyciągnijmy $(x - x_0)^{2k}$ przed nawias:

$$
f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^{2k}\left(\frac{f^{(2k)}(x_0)}{(2k)!} + \frac{r(x)}{(x - x_0)^{2k}}\right) = \alpha(x)(x - x_0)^{2k}\,, \tag{359}
$$

gdzie

$$
\alpha(x) = \frac{f^{(2k)}(x_0)}{(2k)!} + \frac{r(x)}{(x - x_0)^{2k}}\,. \tag{360}
$$

Gdyby $\alpha(x)$ była liczbą dodatnią, to już koniec. Istotnie, wykres funkcji $(x - x_0)^{2k}$ jest (bardzo spłaszczoną) parabolą o osi x_0. Jako tako, ma ona minimum lokalne w x_0. To samo zachodzi dla $\alpha(x)(x - x_0)^{2k}$. Pozostało wtedy do udowodnienia, że $\alpha(x)$, w pewnym otoczeniu punktu x_0, przebiera dodatnie wartości.

To wynika z własności reszty (341). Istotnie, skoro $\frac{f^{(2k)}(x_0)}{(2k)!}$ jest dodatnią liczbą (nie zależy od x), można ustalić

$$
\epsilon := \frac{1}{2}\frac{f^{(2k)}(x_0)}{(2k)!}\,. \tag{361}
$$

Wówczas istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\left| \frac{r(x)}{(x-x_0)^{2k}} \right| < \epsilon \tag{362}$$

o ile tylko $|x - x_0| < \delta$. W związku z tym, na przedziale $P :=]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ zachodzi

$$\alpha(x) = 2\epsilon + \frac{r(x)}{(x-x_0)^{2k}} > \alpha(x) - \epsilon = \epsilon + \frac{r(x)}{(x-x_0)^{2k}} > 0\,. \tag{363}$$

Innymi słowy, $\alpha(x)$ jest dodatnia w P. Z tego wynika, że $f(x) - f(x_0) = \alpha(x)(x-x_0)^{2k}$ przebiera w x_0 jej najmniejszą wartość całego przedziału P. □

Dowód następującego twierdzenia jest analogiczny i go omijamy.

Twierdzenie 9.4. *Niech f będzie klasy $\mathcal{C}^{2k}$ w $U \subset \mathbb{R}$ i załóżmy, że istnieje $f^{(2k+1)}(x_0)$. Wówczas, jeśli*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(2k)}(x_0) = 0\,, \quad f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0\,, \tag{364}$$

to f nie ma w x_0 żadnego ekstremum lokalnego właściwego.

10 Tydzień X: 3. i 6. grudnia 2024

10.1 Narzędzia do badania przebiegu funkcji

Dzięki wzorowi Taylor'a możemy nareszcie badać przebieg funkcji f od pewnej dziedziny do $\mathbb{R}$. Takie badanie składa się z poniższych części:

1. Określenie dziedziny D takiej, że $f : D \to \mathbb{R}$.
2. Sprawdzenie, czy funkcja jest parzysta, nieparzysta lub okresowa.
3. Sprawdzenie ciągłości funkcji i ewentualnie wyznaczenie punktów nieciągłości.
4. Wyznaczenie asymptot wykresu tej funkcji.
5. Wyznaczenie punktów ekstremalnych.
6. Wyznaczenie punktów przegięcia.
7. Naszkicowanie wykresu.

Punkty 1, 2, 3 i 7 są lub oczywiste lub już zostały omówione.

Przedyskutujemy teraz pojęcia ekstremów, punktów przegięcia oraz asymptoty.

10.1.1 Twierdzenia o wypukłości i wklęsłości

Omówmy tylko o wypukłości: wklęsłość jest analogiczna.

Definicja 10.1. *Funkcja $f : P \to \mathbb{R}$ jest* **wypukła**, *jeśli wykres f jest* ***pod cięciwą*** *łączącą dwa dowolne punkty wykresu.*

Zechcemy wyrazić takie pojęcie wypukłości przez własności drugiej pochodnej.

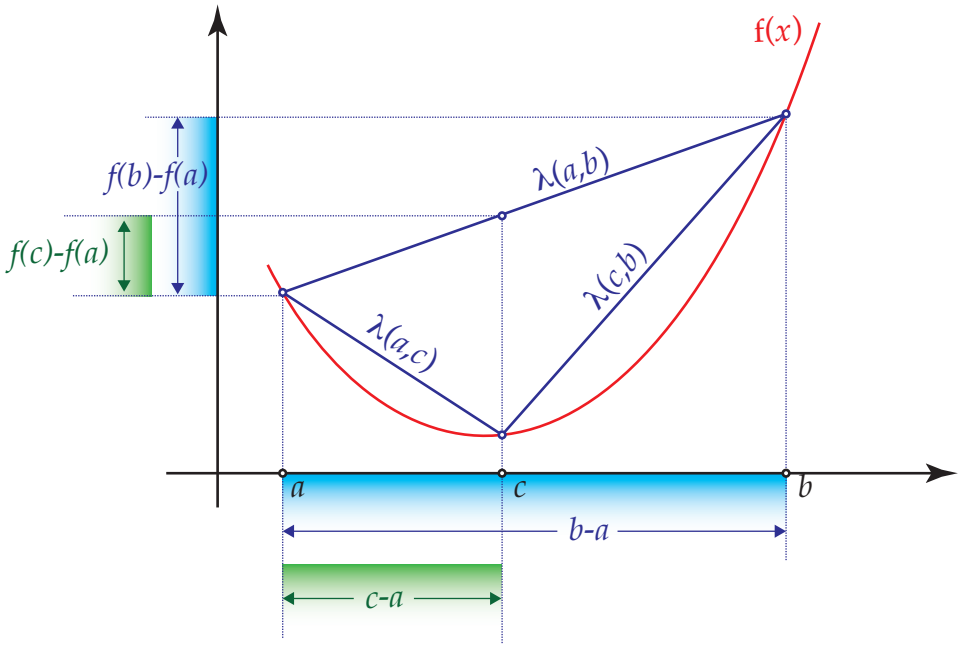
Dla każdej pary punktów $a, b \in P$ oznaczmy jako

$$\lambda(a,b) := \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{365}$$

nachylenie prostej przechodzącej przez $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$.

Twierdzenie 10.1 (••• **Zadanie egzaminacyjne nr. 13**). *Funkcja $f : P \to \mathbb{R}$ jest wypukła, wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lambda(a,c) \leq \lambda(a,b) \leq \lambda(c,b)\,, \quad \forall a,b,c \in P\,, \quad a < c < b\,. \tag{366}$$



Zanim wejdziemy w serce dowodu, warto przeformułować Definicję 10.1 bardziej matematycznie. Fakt, że

$$f \text{ wypukła } \Leftrightarrow f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b) \quad \forall t \in [0,1]\,, \forall a,b \in P\,, a<b\,, \tag{367}$$

powinien być oczywisty. Istotnie, krzywa:

$$\begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2\,, \\ t &\longmapsto (ta+(1-t)b, tf(a)+(1-t)f(b)) \\ &= t(a,f(a))+(1-t)(b,f(b)) \\ &= (b,f(b))+t(a-b,f(a)-f(b)) \end{aligned}$$

jest odcinkiem prostej łączącym $(a,f(a))$ i $(b,f(b))$. Warunek 367 mówi dokładniej, że ten odcinek jest nad wykresie funkcji f.

Uwaga 10.1. Środkowa nierówność w (366) otrzymujemy „za darmo"od pozostających dwóch: jeśli $\lambda(a,b) > \lambda(c,b)$, to trójkąt nie zamyka się, ponieważ odcinki $\lambda(a,b)$ oraz $\lambda(c,b)$ rozbiegają dla rosnącego b; jeśli $\lambda(a,b) < \lambda(a,c)$, to odcinek $\lambda(a,b)$ będzie pod odcinkiem $\lambda(a,c)$ i wtedy pierwsza współrzędna punktu przecięcia odcinków $\lambda(a,b)$ i $\lambda(c,b)$ (czyli: b) będzie przed c, zaprzeczając założenia.

Dowód Twierdzenia 10.1. Każda liczba $t \in [0,1]$ jest postaci

$$t = \frac{b-c}{b-a}\,, \tag{368}$$

z czego wynika

$$1-t = 1-\frac{b-c}{b-a} = \frac{b-a-(b-c)}{b-a} = \frac{c-a}{b-a}\,. \tag{369}$$

Rozpiszmy wtedy (367) taką wartością t:

$$\begin{aligned} & f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b) \\ \Leftrightarrow\ & f\left(\frac{b-c}{b-a}a+\frac{c-a}{b-a}b\right) \leq \frac{b-c}{b-a}f(a)+\frac{c-a}{b-a}f(b) \\ \Leftrightarrow\ & f\left(\frac{(b-c)a+(c-a)b}{b-a}\right) \leq \frac{b-c}{b-a}f(a)+\frac{c-a}{b-a}f(b) \\ \Leftrightarrow\ & (b-a)f(c) \leq (b-c)f(a)+(c-a)f(b) \end{aligned}$$

Podstawiając

$$\begin{aligned} b-c &= b-a-(c-a)\,, \\ c-a &= b-a-(b-c)\,, \end{aligned}$$

ostatnia nierówność jest równoważna, odpowiednio, nierównościom

$$\begin{aligned} (b-a)f(c) &\leq (b-a)f(a)-(c-a)f(a)+(c-a)f(b)\,, \\ (b-a)f(c) &\leq (b-c)f(a)+(b-a)f(b)-(b-c)f(b)\,. \end{aligned}$$

Po raz kolejny, każdą powyższą nierówność można rozpisać, odpowiednio,

$$\begin{aligned} (b-a)(f(c)-f(a)) &\leq (c-a)(f(b)-f(a))\,, \\ (b-a)(f(c)-f(b)) &\leq (b-c)(f(a)-f(b))\,, \end{aligned}$$

t.j., odpowiednio,

$$\begin{aligned} \frac{f(c)-f(a)}{c-a} &\leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,, \\ \frac{f(c)-f(b)}{b-c} &\leq \frac{f(a)-f(b)}{b-a}\,, \end{aligned}$$

t.j., w końcu,

$$\begin{aligned} \lambda(a,c) &\leq \lambda(a,b)\,, \\ \lambda(a,b) &\leq \lambda(c,b)\,, \end{aligned}$$

skąd wynika (366), tak, jak chcieliśmy.

Na odwrót, jeśli zachodzą (366), to, w szczególności,

$$\lambda(a,ta+(1-t)b) \leq \lambda(a,b) \leq \lambda(ta+(1-t)b,b)\,, \tag{370}$$

czyli

$$\frac{f(ta+(1-t)b)-f(a)}{(ta+(1-t)b)-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(ta+(1-t)b)}{b-(ta+(1-t)b)}\,, \tag{371}$$

tj.

$$\frac{f(ta+(1-t)b)-f(a)}{(1-t)(b-a)} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(ta+(1-t)b)}{t(b-a)}\,. \tag{372}$$

Przymnażając nierówności przez $t(1-t)(b-a)$, otrzymamy

$$t(f(ta+(1-t)b)-f(a)) \leq (1-t)(f(b)-f(ta+(1-t)b))\,, \tag{373}$$

skąd wynika

$$-tf(a) \leq f(b)-f(ta+(1-t)b)-tf(b)\,, \tag{374}$$

czyli

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+f(b)-tf(b) = tf(a)+(1-t)f(b)\,, \tag{375}$$

a więc wypukłość f w P, na mocy (367). □

Wniosek 10.1 (• **Zadanie egzaminacyjne nr. 14**). *Niech $f : P \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i różniczkowalna. Wówczas*

$$f \text{ jest wypukła w } P \iff f'(x) \text{ jest niemalejąca.} \tag{376}$$

Dowód. Udowodnijmy implikację $\Leftarrow$.

Niech $a, c, b \in P$, takie, że $a < c < b$. Wówczas, na mocy Twierdzenia Lagrange'a, istnieją $\xi_1 \in [a,c]$ i $\xi_2 \in [c,b]$, takie, że

$$f'(\xi_1) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}\,, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(b)-f(c)}{b-c}\,. \tag{377}$$

Ale skoro $\xi_1 \le \xi_2$ a f' nie maleje, okazuje się, że

$$\lambda(a,c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \le \frac{f(b)-f(c)}{b-c} = \lambda(c,b)\,, \tag{378}$$

co pociąga (366) (patrz powyższy rysunek). Na mocy Twierdzenia 10.1, funkcja f jest wypukła.

Udowodnijmy implikację $\Rightarrow$.

Niech $a < b$ i ustalmy $c := \frac{b-a}{2}$. Wówczas, dzięki Twierdzeniu 10.1, wiemy, że

$$\frac{f(a+t)-f(a)}{t} \le \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \le \frac{f(b)-f(c)}{b-c} \le \frac{f(b)-f(b-t)}{t}, \tag{379}$$

o ile tylko $t > 0$ jest wystarczająco mały, żebyśmy mieli

$$a < a+t < c < b-t < b\,. \tag{380}$$

Przechodząc do granic dla $t \to 0^+$ i uwzględniając różniczkowalność funkcji f, otrzymamy upragniony wynik, t.j.,

$$f'(a) \le f'(b)\,. \tag{381}$$

□

Wniosek 10.2. *Jeśli f posiada f'', to*

$$\begin{aligned} f'' \ge 0 \quad &\Rightarrow \quad f \textit{ wypukła,} \\ f'' \le 0 \quad &\Rightarrow \quad f \textit{ wklęsła.} \end{aligned}$$

Definicja 10.2. *Punkt x, w którym f'' zmienia znak (a więc, w szczególności, $f''(x) = 0$) się nazywa się* punktem **przegięcia**.

Intuicyjnie, punkt przegięcia oznacza zmianę wypukłości.

Podsumowując, pojęcie wypukłości/wklęsłości przybiera inne postaci w zależności od klasy funkcji:

klasa funkcji	*wypukłość*	*wklęsłość*	*x pkt przegięcia*
f ciągła	wykres pod cięciwą	wykres nad cięciwą	
$\exists f'$	f' niemalejąca	f' nierosnąca	
$\exists f''$	$f'' \ge 0$	$f'' \le 0$	f'' zmienia znak
$\exists f'''$	– – –	– – –	$f''(x) = 0$ i $f'''(x) \ne 0$. (p. Uwaga 10.2)

Uwaga 10.2. Tak naprawdę, powyższy warunek $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \ne 0$ jest konieczny ale nie wystarczający i powinien zostać zastąpiony warunkami

$$f^{(k)}(x) = 0\,, \quad \forall k = 2,3,4,\ldots,2n \tag{382}$$

oraz

$$f^{(2n+1)}(x) \ne 0\,, \tag{383}$$

patrz Twierdzenie 9.4.

10.1.2 Asymptoty poziome

Niech $f : P \to \mathbb{R}$ będzie funkcją o dziedziny $P \subset \mathbb{R}$; niech $W \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie jej wykresem.

Graficznie, W wygląda jak krzywa; niech $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie linią prostą: intuicja sugeruje, że są dwie możliwości – lub ℓ przekroczy W, lub ℓ nie przekroczy W. To prawda, ale w drugim przypadku jest sytuacja w której

W zbliża się coraz bardziej do ℓ ale **nigdy jej nie dotyka**.

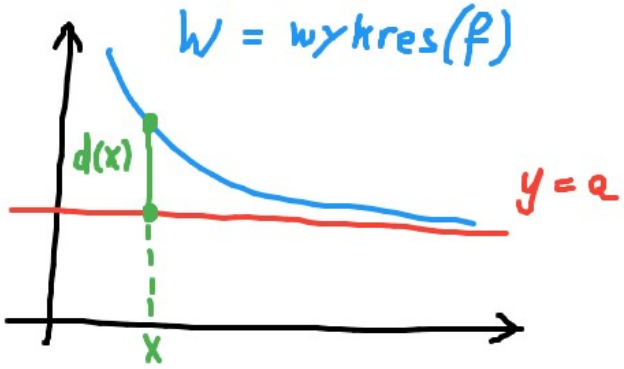
Po starogrecku „niedotykająca” mówi się **asymptotą**.
Aby nadać znaczenie zwrotowi „zbliżać się coraz bardziej” rozważmy przypadek, gdzie P nie jest ograniczony z góry i

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a\,, \tag{384}$$

gdzie $a \notin f(P)$. Niech ℓ będzie prosta o równanie $y(x) = a$: odległość między W a ℓ można oddać funkcją

$$d(x) := f(x) - y(x) = f(x) - a\,.$$

Skoro $a \notin f(P)$, funkcja odległość $d(x)$ nigdy nie zeruje się – ale dąży do zera. To matematycznie sformułowanie tego, że W zbliża się coraz bardziej do ℓ ale **nigdy jej nie dotyka**



Definicja 10.3. *Prosta $y = a$ nazywa się* asymptotą poziomą, *jeśli*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a\,, \tag{385}$$

lub

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a\,, \tag{386}$$

lub obydwa.

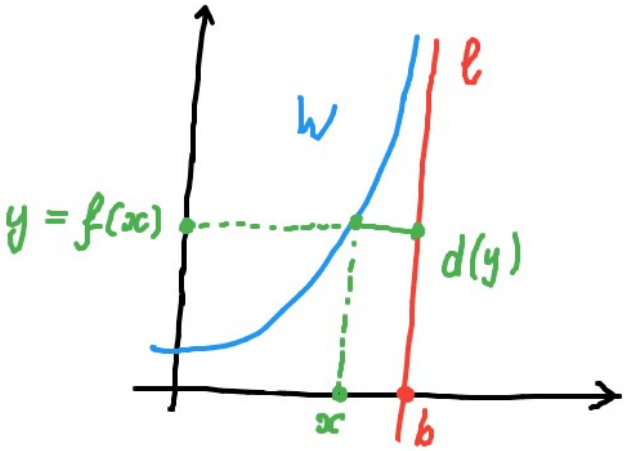
10.1.3 Asymptoty pionowe

Odrobinkę trudniejsza jest sytuacja, kiedy ℓ jest prostą pionową: załóżmy, że $P =]a, b[$ i

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty\,. \tag{387}$$

Teraz odległość między wykresem W a prostą ℓ o równaniu $x = b$ jest funkcją zmiennej y:

$$\begin{aligned} d = d(y) &:= b - \max f^{-1}(y) \\ &= b - \big[\text{ ostatnia liczba } x : f(x) = y\big]\,. \end{aligned}$$



Widać, że $d(y)$ jest ściśle malejąca; załóżmy, że $y' > y$ i niech x' będzie największą liczbą, w której f przybiera wartość y' i x największą liczbą, w której przybiera ona wartość y: znaczy to, że po x' funkcja już nie przyjmuje wartości y' i, skoro musi ona dążyć do $+\infty$, przyjmuje ona wartości ściśle większe od y' a tym bardziej od y. Wynika z tego, że x nie może się znajdować po x':

$$x < x' \Rightarrow b - x > b - x' \Rightarrow d(y) > d(y')\,. \tag{388}$$

Widać również, że $d(y) > 0$ dla każdego y: w przeciwnym razie, istniałby $x \in P$, taki, że $y = f(x)$ i $d(y) = b - x = 0$, czyli $x = b \notin P$.

Twierdzenie Weierstrassa gwarantuje zatem istnienie granicy

$$\lim_{y\to+\infty} d(y)\,.$$

Trzeba pokazać, że wynosi ona 0. Ku sprzeczności, załóżmy, że

$$\lim_{y\to+\infty} d(y) = l > 0\,.$$

To wtedy $d(y) \geq l$ dla wszystkich y, tj. $b - x \geq l$ dla wszystkich $x \in P$, co nie jest możliwe (wystarczy wziąć $x = b - \frac{l}{2}$).

Udowodniliśmy jeszcze raz, że W zbliża się coraz bardziej do **pionowej** prostej ℓ nigdy jej nie dotykając.

Definicja 10.4. *Prosta $x = b$ nazywa się* asymptotą pionową, *jeśli*

$$\lim_{x\to b^+} f(x) = \pm\infty\,, \tag{389}$$

lub

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty\,, \tag{390}$$

lub obydwa.

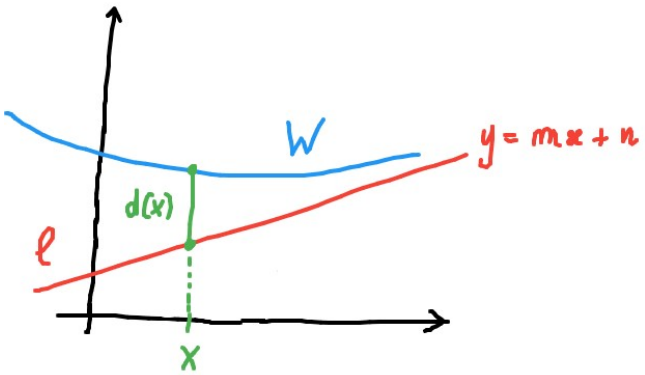
10.1.4 Asymptoty ukośne

Jest jeszcze jedna możliwość: prosta ℓ nie jest ani pozioma, ani pionowa, tj. ma ona równanie

$$y(x) = mx + n\,, \quad m \neq 0\,.$$

Funkcją odległość jest

$$d(x) = f(x) - y(x) = f(x) - (mx + n)\,. \tag{391}$$



Definicja 10.5. *Prosta $y = mx + n$ nazywa się* asymptotą ukośną, *jeśli*

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0\,. \tag{392}$$

10.1.5 Przebieg pochodnej przy asymptotach poziomych/ukośnych

Intuicja sugeruje, że:

> jak wykres W zbliża się do asymptoty ℓ, to **nachylenie** W powinno się zbliżać do nachylenia ℓ.

Aby uczynić precyzyjną tą intuicję, trzeba zakładać, że f jest różniczkowalna i zwracać uwagę na to, że:

rodzaj asymptoty ℓ	*kierunek*	*nachylenie* W
pozioma	nieważny	0
pionowa do $+\infty$	z lewej strony	$+\infty$
pionowa do $+\infty$	z prawej strony	$-\infty$
pionowa do $-\infty$	z lewej strony	$-\infty$
pionowa do $-\infty$	z prawej strony	$+\infty$
ukośna $mx+n$	do $\pm\infty$	$+m$.

Twierdzenie 10.2. *Niech $f : P \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Jeśli*

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(mx+n))=0\,, \tag{393}$$

to

$$\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)=m\,. \tag{394}$$

Dowód. Skoro

$$\begin{aligned} f(x+1)-(m(x+1)+n) &\to 0\,,\\ f(x)-(mx+n) &\to 0\,,\end{aligned}$$

ich różnica

$$f(x+1)-f(x)-m$$

też dąży do zera. Ale z Twierdzenia Lagranża,

$$\exists\xi\in[x,x+1] \quad : \quad f(x+1)-f(x)=f'(\xi)\,,$$

wobec tego

$$f'(\xi)-m\longrightarrow 0 \iff f'(\xi)\longrightarrow m \Rightarrow f'(x)\longrightarrow m$$

dla $x\longrightarrow+\infty$.

W przypadku $x\longrightarrow-\infty$ rozważamy

$$\begin{aligned} f(x)-(mx+n) &\to 0\,,\\ f(x-1)-(m(x-1)+n) &\to 0\,,\end{aligned}$$

oraz ich różnicę

$$f(x)-f(x-1)-m$$

i reszta rozumowania jest identyczna. □

Twierdzenie 10.3. *Prosta $y=mx+n$ jest asymptotą ukośną wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\,, \tag{395}$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}f(x)-mx\,. \tag{396}$$

Dowód. Jeśli $y(x) = mx + n$ jest asymptotą ukośną, to różnica $f(x) - (mx + n)$ dąży do 0, a także $\frac{1}{x}$: ich iloczyn

$$\frac{1}{x} \cdot (f(x) - (mx + n)) = \frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}$$

dąży do zera, co implikuje (395); następnie, wykorzystując (395) w (392), otrzymuje się (396).

Na odwrót, jeśli (396) zachodzi, to $f(x) - mx - n \longrightarrow 0$, co znaczy, że $mx + n$ jest asymptotą ukośną. □

Wniosek 10.3. *Jeśli $f : P \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i ma asymptotę poziomą/ukośną, to*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}\,.$$

10.1.6 Przebieg pochodnej przy asymptotach pionowych

Załóżmy teraz, że f jest różniczkowalna i ma w $x = b$ asymptotę pionową.

Jeśli $f(x) \longrightarrow +\infty$ dla $x \longrightarrow b^-$, to $f'(x) \longrightarrow +\infty$. Aby to udowodnić, ustalmy $x_0 < b$; stwierdzę, że $f'(x)$ nie jest ograniczona przez żadnego M dla $x \in [x_0, b[$: gdyby tak było, tj.

$$f'(x) \leq M\,, \quad \forall x \in [x_0, b[\,,$$

to na mocy Twierdzenia Lagranże, byśmy mieli

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) \leq M(x - x_0)\,,$$

tj. wykres W funkcji f od x_0 do b znajdowałby się pod prostą o równaniu $f(x_0) + M(x - x_0)$, co zaprzeczałoby tego, że $f(x) \longrightarrow +\infty$ dla $x \longrightarrow b^-$.

Zatem, $f'(x)$ nie jest ograniczona z góry, wobec tego $f'(x) \longrightarrow +\infty$.

Jeśli $f(x) \longrightarrow +\infty$ dla $x \longrightarrow b^+$, to zastosujemy poprzednie rozumowanie do funkcji $g(x) := f(2b - x)$ i znajdziemy, że $f'(x) \longrightarrow -\infty$.

W przypadkach $f(x) \longrightarrow -\infty$ dla $x \longrightarrow b^+$ pokażemy też, że $f'(x)$ nie jest ograniczona z góry, ale używając punktów $x_0 > b$ a $x \in]b, x_0]$: z

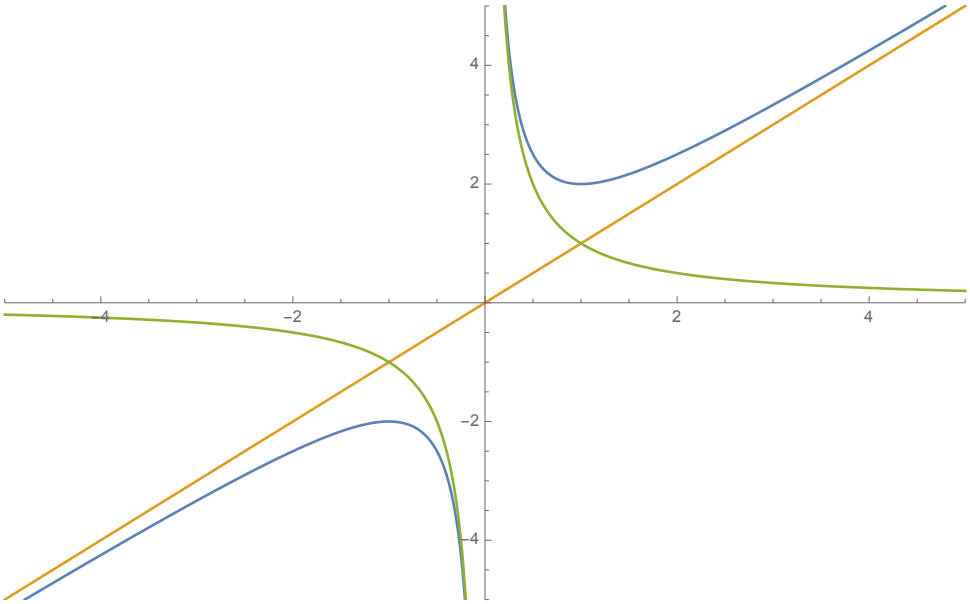
$$f(x_0) - f(x) = f'(\xi)(x_0 - x) < M(x_0 - x)$$

wynikałoby, że

$$f(x) > f(x_0) - M(x_0 - x)\,,$$

co zaprzeczałoby, że $f(x) \longrightarrow -\infty$ dla $x \longrightarrow b^+$. Ostatnio, używając $f(2b - x)$, widać, że $f(x) \longrightarrow +\infty$ dla $x \longrightarrow b^-$.

Przykład 10.1. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ (zielona) ma jedną pionową asymptotę $x = 0$ i jedną poziomą asymptotę $y = 0$. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x} + x$ (niebieska) ma jedną pionową asymptotę $x = 0$ i jedną ukośną asymptotę $y = x$ (żółtą).



10.1.7 Badanie przebiegu funkcji: łatwy przykład

Kiedy wyeliminujesz wszystko, co niemożliwe, to, co pozostało, jakkolwiek nieprawdopodobne, musi być prawdą.

Arthur Conan Doyle

Rozważmy funkcję

$$f(x) := \frac{1}{x} + x$$

z ostatniego przykładu. Skoro łatwo obliczyć

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) = 1\,, \\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0\,, \end{aligned}$$

od razu można naszkicować prostą o równaniu $y = x$, wiedząc, że będzie ona asymptotą ukośną z obydwóch stron.

Również proste są granicy

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x} + 1\right) = -\infty\,, \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + 1\right) = +\infty\,, \end{aligned}$$

i już mamy wszystkie asymptoty. Na mocy powyższych twierdzeń o pochodnych przy asymptotach, można już stwierdzić, że:

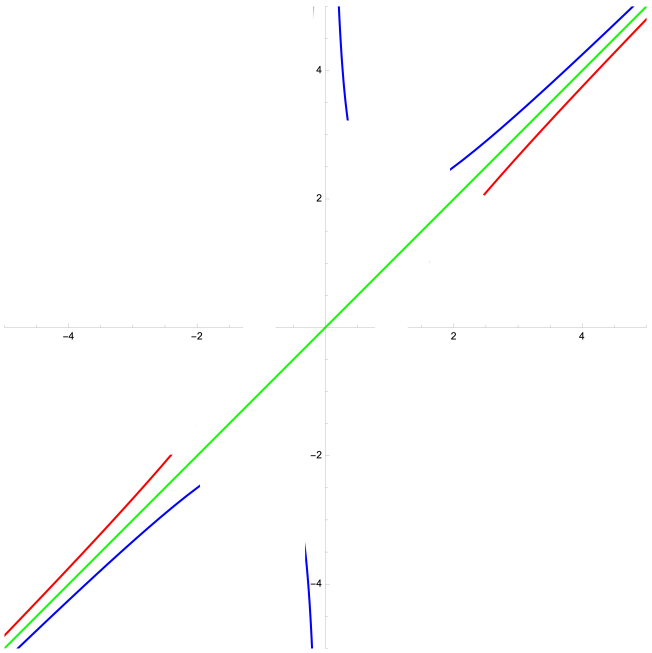
$$\begin{aligned} \lim_{x\to -\infty} f'(x) &= 1\,, \\ \lim_{x\to 0^-} f'(x) &= -\infty\,, \\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) &= -\infty\,, \\ \lim_{x\to +\infty} f'(x) &= 1\,. \end{aligned}$$

Można zatem wywnioskować, że:

miejsce w dziedzinie	*kształt wykresu*	*możliwe/niemożliwe*
otoczenie $]-\infty, -M[$ "punktu" $-\infty$	wklęsły	**tak**
– – –	wypukły	**nie**
otoczenie $]-\epsilon, 0[$ punktu 0	wklęsły	**tak**
otoczenie $]0, \epsilon[$ punktu 0	wypukły	**tak**
otoczenie $]M, +\infty[$ "punktu" $+\infty$	wypukły	**tak**
– – –	wklęsły	**nie**.

Istotnie,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty \quad &\Rightarrow \quad \text{od ostatniego punktu przegięcia przed 0 do 0 } f'(x) \text{ maleje}\,, \\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty \quad &\Rightarrow \quad \text{od 0 do pierwszego punktu przegięcia po 0 } f'(x) \text{ rośnie}\,. \end{aligned}$$



Aby wykluczyć te dwa czerwone przypadki, trzeba tylko zaobserwować, że

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

nigdy nie zeruje się w dziedzinie, wobec tego wypukłość nie może się zmieniać na wklęsłości i na odwrót. Warto także zauważać, że dostajemy „za darmo" istnienie dokładnie dwóch punktów krytycznych – jedno minimum przed 0 i jedno maksimum po 0 – na podstawie ciągłości funkcji:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \wedge \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \quad &\Rightarrow \quad \exists x \in]-\infty, 0[: \ f'(0) = 0 \wedge f''(0) < 0\,, \\ \lim_{x\to-+\infty} f(x) = +\infty \wedge \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad &\Rightarrow \quad \exists x \in]0, +\infty[: \ f'(0) = 0 \wedge f''(0) > 0\,. \end{aligned}$$

10.1.8 Badanie przebiegu funkcji: trudny przykład

Twierdzenie 10.4. *Niech $f : A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną, gdzie $A \not\ni 0$: wtedy*

$$f(x) \ \textit{monotoniczna} \iff g(y) := f\left(\frac{1}{y}\right) \ \textit{monotoniczna}\,. \tag{397}$$

Dowód. Wystarczy zaobserwować, że

$$g'(y) = f'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right) = -x^2 f'(x)$$

dla każdego $x = \frac{1}{y} \in A$: istotnie, $g'(y) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) \neq 0$, ponieważ $x \neq 0$. □

Twierdzenie 10.5. *Niech $\Psi : B \to C$ będzie funkcją różniczkowalną ściśle monotoniczną: wtedy*

$$\Psi \circ f \ \textit{monotoniczna} \iff f \ \textit{monotoniczna}\,, \tag{398}$$

gdzie $f : A \to B$ jest funkcją różniczkowalną.

Dowód. Opiera się na wzorze na pochodną funkcji złożonej:

$$(\Psi \circ f)'(x) = (\Psi' \circ f)(x) \cdot f'(x)\,.$$

Skoro Ψ jest ściśle monotoniczna, to $\Psi' : B \to \mathbb{R}$ nigdy nie zeruje się, wobec tego $\Psi' \circ f : A \to \mathbb{R}$ też nigdy nie zeruje się: można zatem wywnioskować, że $(\Psi \circ f)' : A \to \mathbb{R}$ nigdy nie zeruje sie, wtedy i tylko wtedy, gdy $f' : A \to \mathbb{R}$ nigdy nie zeruje się. □

Załóżmy, że trzeba zbadać przebieg zmienności funkcji

$$f(x) := (1+x)^{\frac{1}{x}}\,. \tag{399}$$

Skoro

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,,$$

to $f : A \to B$, gdzie $A =]-1,\infty[$ i $B =]0,\infty[$.

Łatwo także pokazać, że

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \infty\,, \tag{400}$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = 1\,, \tag{401}$$

O wiele trudniejsze jest badanie pierwszej i drugiej pochodnej:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+1)^{\frac{1}{x}-1}(x-(x+1)\log(x+1))}{x^2}\,,\\ f''(x) &= \frac{(x+1)^{\frac{1}{x}-2}\left((x+1)\log(x+1)\left(2x^2+(x+1)\log(x+1)\right)-x^2(3x+1)\right)}{x^4}\,. \end{aligned}$$

Warto zatem wykorzytywać Twierdzenia 10.4 oraz Twierdzenia 10.5: jako $\Psi : B \to \mathbb{R}$ bierzemy log i jeśli pokażemy, że

$$\log\left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right) \tag{402}$$

jest ściśle monotoniczna, to f też będzie ściśle monotoniczna.

Ale

$$h(y) = \log\left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right) = \log\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right) = y\log\left(1+\frac{1}{y}\right) \tag{403}$$

i pochodna $h'(y)$ wygląda o wiele prościej niż $f'(x)$:

$$h'(y) = \log\left(\frac{1}{y}+1\right) - \frac{1}{y+1}\,.$$

Chcemy pokazać, że $h'(y) > 0$, tj.:

$$\log\left(\frac{1}{y}+1\right) > \frac{1}{y+1}\,.$$

Ostatnia nierówność jest równoważna nierówności:

$$\frac{1}{y}+1 > e^{\frac{1}{y+1}}\,.$$

Trzeba teraz pamiętać, że

$$e^t > 1+t \quad \forall t\,,$$

z czego wynika, że

$$\frac{1}{e^t} = e^{-t} > 1+(-t) = 1-t \quad \forall t\,,$$

czyli

$$e^t < \frac{1}{1-t} \quad \forall t\,.$$

W szczególności, dla $t = \frac{1}{y+1}$ otrzymamy

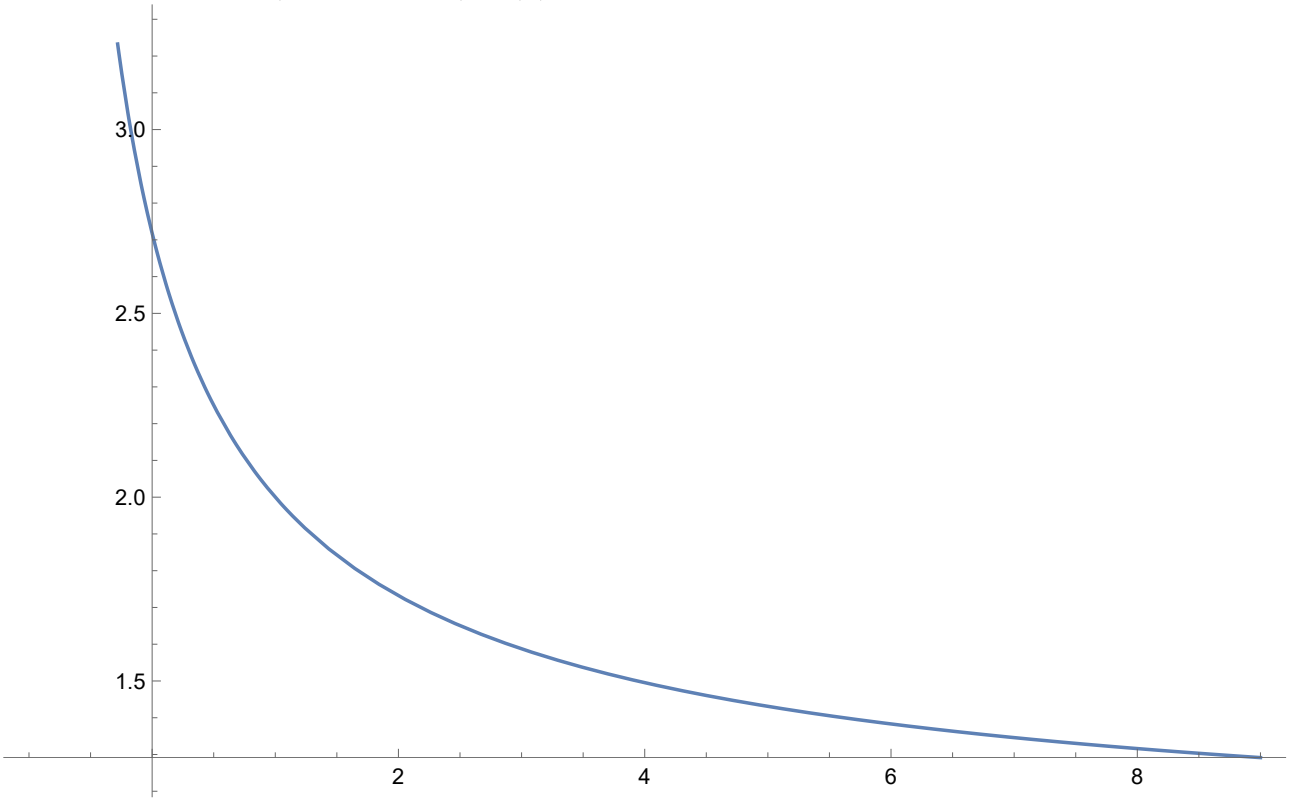
$$e^{\frac{1}{y+1}} < \frac{1}{1-t} = \frac{1}{1-\frac{1}{y+1}} = \frac{1}{\frac{y+1-1}{y+1}} = \frac{1}{\frac{y}{y+1}} = \frac{y+1}{y} = 1+\frac{1}{y}\,,$$

tak, jak chcieliśmy.

Możemy wtedy wywnioskować, że $f(x)$ jest ściśle monotoniczna i, skoro (bez obliczenia)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^+} f'(x) &= -\infty\,, \\ \lim_{x\to \infty} f'(x) &= 0\,, \end{aligned}$$

to ona musi być ściśle malejąca. W szczególności, $f(x)$ nigdy przybiera wartości 0 i nie ma punktów przegięcia, ponieważ (bez obliczenia) $f''(x) > 0$.



11 Tydzień XI: 10. i 13. grudnia 2024

11.1 Funkcja pierwotna

11.1.1 Definicja jako rozwiązanie równania różniczkowego

Jedną interpretacją stopniowego rozszerzenia zbiorów liczb, którego doświadczyliśmy w ciągu historii, jest konieczność rozwiązywania coraz trudniejszych równań:

w zbiorze:	*można:*
$\mathbb{N}$	policzyć owce
$\mathbb{Z}$	rozwiązać równania $x + a = 0$ dla każdego a
$\mathbb{Q}$	rozwiązać równania $x \cdot a = 1$ dla każdego $a \neq 0$
$\mathbb{R}$	rozwiązać równania $x^n = a$ dla każdego $a > 0$ i $n \in N$
$\mathbb{C}$	rozwiązać równania $x^n = a$ dla każdego a i $n \in N$.

Rozważmy teraz inny rodzaj równania: **równanie różniczkowe**. Niech będzie **dana funkcja** $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ **o dziedzinie** D. Napis

$$y'(x) = f(x)\,, \tag{404}$$

(gdzie $y(x)$ to funkcja nieznana) jest przykładem **równania różniczkowego**.

„Rozwiązać" równania (404) oznacza znalezienie wszystkich funkcji $y(x)$, takich że $y'(x)$ równa się $f(x)$.

Zazwyczaj zagadnienie to jest dzielone na dwie części:

- zagadnienie **istnienia** – czy istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie?
- zagadnienie **jedyności** – ile jest rozwiązań?

Zanim przyjrzymy się powyższymi zagadnieniami, podajmy główną definicję:

Definicja 11.1. *Funkcja $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$, która jest rozwiązaniem równania różniczkowego (404) nazywa się* **funkcją pierwotną** *funkcji f.*

Zagadnienie istnienia funkcji pierwotnej jest wcale nietrywialne, w przeciwieństwie do jedyności, którą daje się szybko załatwić:

Twierdzenie 11.1. *Jeśli F i G są dwiema funkcjami pierwotnymi tej samej funkcji f, to*

$$F - G = \text{stała}. \tag{405}$$

Dowód. Z definicji funkcji pierwotnej:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x)\,, \\ G'(x) &= f(x)\,, \end{aligned}$$

skąd wynika $F'(x) - G'(x) = 0$, czyli

$$(F - G)' = 0\,,$$

co implikuje (405). □

Wniosek 11.1. *Jeśli $F(x)$ jest* ***jedną*** *funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, to*

$$\{F(x) + a \mid a \in \mathbb{R}\} \tag{406}$$

jest zbiorem ***wszystkich*** *funkcji pierwotnych funkcji $f(x)$*

11.1.2 Idea konstrukcji jednej funkcji pierwotnej

W świetle powyższego wniosku, wystarczy znaleźć jedną funkcją pierwotną, aby znaleźć je wszystkie – więc nam pozostało zagadnienie istnienia, tj. pokazywanie, że przynajmniej jedno rozwiązanie daje się skonstruować. **Idea takiego skonstruowania jest prosta, jednak aby ją wdrożyć trzeba stawić czoło parze przeszkód technicznych.**

Aby zilustrować ideę, rozpiszmy (404) przy użyciu definicji pochodnej:

$$f(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{y(t+\epsilon) - y(t)}{\epsilon}\,. \tag{407}$$

Żeby móc wyciągnąć $y(t)$ z (407) używając wyłącznie działań algebraicznych, trzeba „pozbawić się" granicy – w tym celu pomoże nam Twierdzenia Lagrange:

$$f(\xi_1) = \frac{y(t+\epsilon) - y(t)}{\epsilon}\,, \tag{408}$$

gdzie ξ_1 jest punktem między t a $t+\epsilon$ (zakładamy zawsze $\epsilon > 0$). Z (408) wynika, że

$$y(t+\epsilon) = \epsilon \cdot f(\xi_1) + y(t)\,. \tag{409}$$

Analogicznie, można znaleźć $\xi_2 \in [t+\epsilon, t+2\epsilon]$, taki, że

$$y(t+2\epsilon) = \epsilon \cdot f(\xi_2) + y(t+\epsilon)\,, \tag{410}$$

a więc, stosując (409),

$$y(t+2\epsilon) = \epsilon \cdot f(\xi_2) + \epsilon \cdot f(\xi_1) + y(t)\,. \tag{411}$$

Rozumowanie to można powtórzyć n razy, tak, aby otrzymać

$$y(t+n\epsilon) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon \cdot f(\xi_i) + f(t)\,, \quad \xi_i \in [t+(i-1)\epsilon, t+i\epsilon]\,. \tag{412}$$

Skoro wzór (412) jest ważny dla każdego n i dla każdego ϵ, można ustalić $T := t + n\epsilon$ i wziąć granicy (412) dla $n \to \infty$ (co powoduje, że $\epsilon = \frac{T-t}{n} \to 0$):

$$y(T) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \epsilon \cdot f(\xi_i) \right) + y(t)\,. \tag{413}$$

Intuicyjnie, granica w prawej stronie (413) musi istnieć, ponieważ równa się ona liczbie

$$\mathrm{FIG}_t^T(f) := \text{pole powierzchni figury ograniczonej przez:} \begin{cases} \text{wykres } f & \text{z góry} \\ \text{oś } x & \text{z dołu} \\ \text{prosta } x = t & \text{z lewej strony} \\ \text{prosta } x = T & \text{z prawej strony} \end{cases} \tag{414}$$

11.1.3 1. problem: istnieją figury bez pola powierzchni

PIERWSZY PROBLEM TECHNICZNY:
czy pole powierzchni powyższej figury wcale istnieje?

W życiu codziennym pytanie brzmi dziwnie, ponieważ my „odczuwamy" pole powierzchni wszelkich figur – jednak **w matematyce mogą istnieć figury bez pola powierzchni!**

Wrócimy do tego za chwilę.

Zakładając, że funkcja f jest taka, że powyższa figura posiada pole powierzchni, wzór (413) rozpiszemy jako

$$y(T) = \mathrm{FIG}_t^T(f) + y(t) \quad \forall T > t. \tag{415}$$

Skoro (415) jest ważny dla wszystkich $t, T \in D$ takich, że $T > t$, możemy ustalić raz na zawsze $t := x_0$ i traktować T jako zmienną $x = T$: wynika z tego, że $f(t) = f(x_0)$ jest stałą i możemy ją ominąć, ponieważ szukamy jedną funkcję pierwotną a nie ich wszystkich. Znaleźliśmy w taki sposób naszego pierwszego kandydata na funkcję pierwotną funkcji $f(x)$:

$$F(x) := \mathrm{FIG}_{x_0}^x(f)\,, \quad \forall x \in D\,. \tag{416}$$

(Używa się konwencji, że $\mathrm{FIG}_a^b = -\mathrm{FIG}_b^a$ jeśli $a > b$.)

Przykład 11.1 (Figura bez pola powierzchni). Wyobraźmy sobie, że musimy skonstruować kratę K dla więzienia, o miarach 1×1, taką, że, nad każdym punkcie podstawy odpowiadającym liczbie wymiernie, znajduje się pionowy pręt o grubości 0. Wówczas, jeśli zaczynamy od pustej ramy, otrzymamy kratę przez którą przechodzi 100% światła; jeśli zaczynamy od stalowego (pełnego) kwadratu i obetniemy niepotrzebny stal, otrzymamy kratę przez którą przechodzi 0% światła. Oto sprzeczność: innymi słowy, figura K **nie może posiadać pola powierzchni**.















11.1.4 2. problem: trzeba odwrócić logikę rozumowania

Proszę zwrócić uwagę na wykonane przez nas rozumowanie: pokazaliśmy, że:

$$\left.\begin{array}{l}\exists \text{ funkcja pierwotna } F(x) \text{ funkcji } f(x)\\ \exists \text{ pole powierzchni pod wykresem } f(x)\end{array}\right\} \Rightarrow F(x) = \mathrm{FIG}^x_{x_0}(f) \tag{417}$$

Innymi słowy, nasze rozumowanie **nie rozwiązało problemu istnienia funkcji pierwotnej – tylko wskazywało kandydata**: funkcję (416).

DRUGI PROBLEM TECHNICZNY:
czy znaleziony kandydat (416) spełnia równanie
funkcji pierwotnej, tj. czy to prawda, że $F'(x) = f(x)$?

W dalszym ciągu będziemy stopniowo rozwiązywać obydwa problemy – a po drodze będziemy pokazywać, że nasz wybór (416) kandydata na funkcję odwrotną nie jest sprzeczny z innymi intuicjami.

Zwiastun Rozdziału 13.
Będziemy udowadniać, że zachodzi „odwrotność" implikacji (417), a mianowicie:

$$f(x) \text{ ciągła } \Rightarrow \exists \text{ pole powierzchni } \mathrm{FIG}^x_{x_0}(f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) := \mathrm{FIG}^x_{x_0}(f) \text{ jest funkcją pierwotną } f(x)\,.$$

Wynik to jest kamieniem milowym w całej analizie matematycznej – nazywa się Twierdzeniem Fundamentalnym Rachunku Całkowego i Różniczkowego (patrz Twierdzenie 13.1).

11.1.5 Przykład potwierdzający słuszność naszego kandydata

Niech $f(x) = x^2$ będzie funkcją opisującą standardową parabolę: jej dziedziną D będzie cały $\mathbb{R}$. Ustalmy $x_0 = 0$ w (416) i niech $x > 0$: wtedy liczba $F(x) = \mathrm{FIG}^x_0(f)$ będzie polem powierzchni figury ograniczonej przez:

1. parabolę;
2. oś x-ów;
3. pionową oś przechodząca przez x.

Nazywajmy tą figurę „trójkątem".

Wszyscy wiedzą (metodą „zgadywania"), że każda funkcja pierwotna funkcji x^2 ma postać

$$\frac{x^3}{3} + a\,, \quad a \in \mathbb{R}\,. \tag{418}$$

Aby potwierdzić słuszność naszego kandydata $F(x)$, chcemy udowodnić, że $F(x)$ jest jedną z funkcji $\frac{x^3}{3} + a$; skoro $F(0) = 0$, będąc polem powierzchni jednopunktowej figury, a musi być zero i chcemy zatem pokazać, że

$$F(x) = \frac{x^3}{3}\,. \tag{419}$$

Do tego celu, konstruujmy kolejne, co raz bardziej precyzyjne, przybliżenia pola powierzchni $F(x)$. Dokładniej, dla każdego $n \in N$, podzielmy przedział $[0, x]$ w n części:

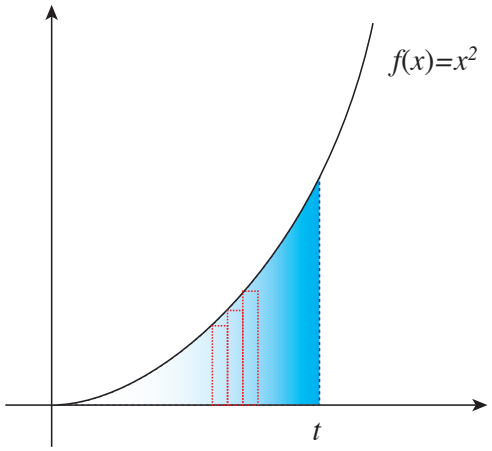
$$[0, x] = [0, \tfrac{x}{n}] \cup [\tfrac{x}{n}, \tfrac{2x}{n}] \cup [\tfrac{2x}{n}, \tfrac{3x}{n}] \cup \cdots \cup [\tfrac{(n-1)x}{n}, x]\,. \tag{420}$$

Nad każdym kawałkiem $[\frac{(i-1)x}{n}, \frac{ix}{x}]$ konstruujmy prostokąt o wysokości $(\frac{(i-1)x}{n})^2$. Widać, że taki prostokąt, t.j.,

$$[\tfrac{(i-1)x}{n}, \tfrac{ix}{n}] \times [0, (\tfrac{(i-1)x}{n})^2] \tag{421}$$

zawiera się w naszym „trójkącie”. W związku z tym, suma wszystkich takich prostokątów też będzie w nim zawarta. Z tego wynika, że

$$F(x) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{x\left(\frac{(i-1)x}{n}\right)^2}{n} = \frac{x^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \frac{x^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{x^3}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}. \tag{422}$$



Analogicznie, można konstruować prostokąt o wysokości $(\frac{ix}{n})^2$ nad tą samą podstawą $[\frac{(i-1)x}{n}, \frac{ix}{n}]$. W ten sposób otrzymamy

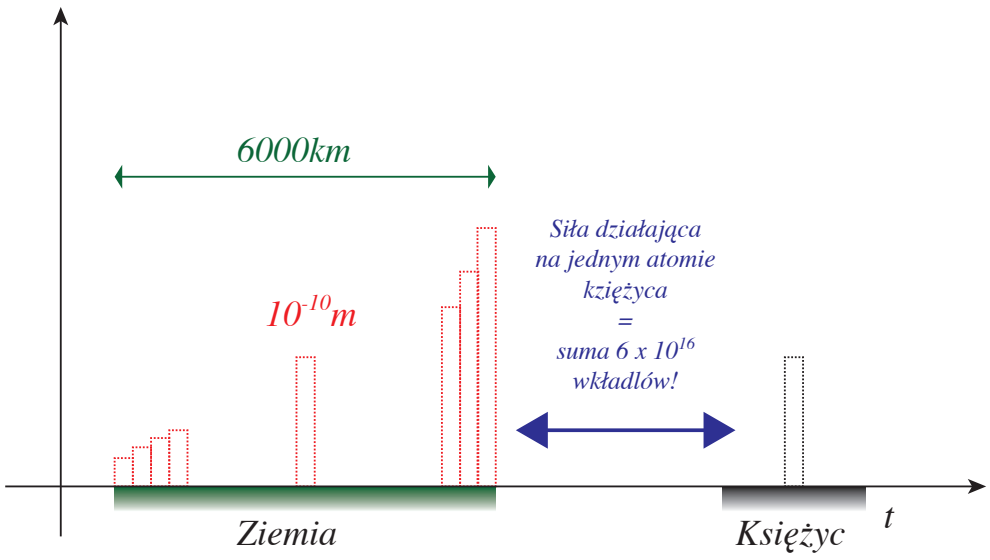
$$F(x) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x(\frac{ix}{n})^2}{n} = \frac{x^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{x^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{423}$$

Skoro obydwie nierówności są ważne dla każdego n, przechodząc do granicy, otrzymamy (419).

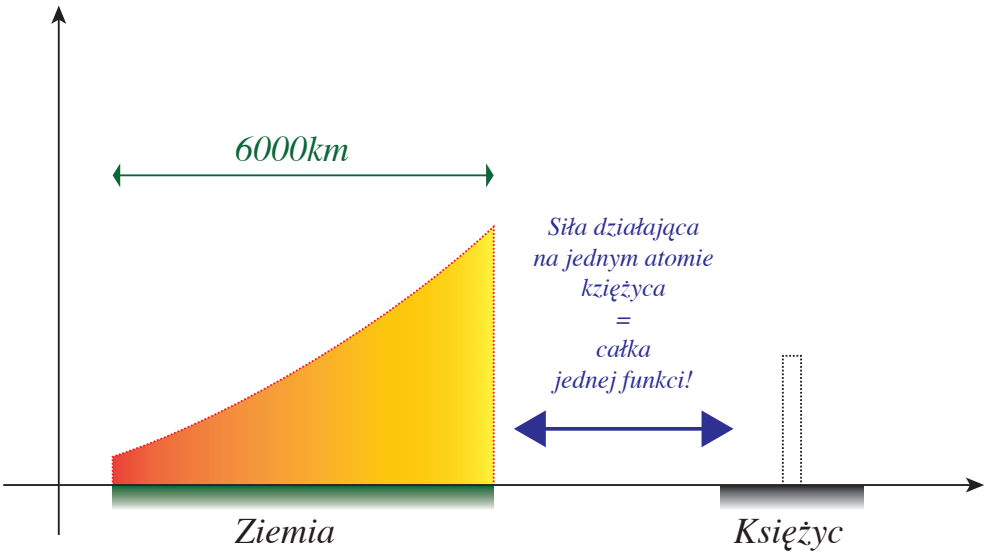
11.1.6 Przykład pokazujący użyteczność funkcji pierwotnej w fizyce

Dlaczego w ogóle potrzebujemy funkcji pierwotnej?

Wróćmy do naszego jednowymiarowego wszechświata i wyobraźmy sobie jednowymiarową ziemię oraz jednowymiarowy księżyc. Zastanówmy się, jaką siłą ten drugi będzie wyciągnięty przez pierwszy. Intuicja sugeruje, że na każdy atom księżyca działają wszystkie atomy ziemi, taką siłą, która jest tym słabsza im bardziej są oddzielone atomy. Można przedstawić takie zjawisko konstruując odpowiednio wąski prostokąt na każdym „atomie”, t.j., mikroskopijny pod–przedział przedziału opisującego ziemię. Widać, że, ustalając jeden atom jako jednostką miary, siła wypadkowa na atomie księżyca, tzn. suma $6 \cdot 10^{16}$ wkładów, pojawi się jako **pole powierzchni** wielokąta, patrz rysunek:



Taki wynik jest dokładny i precyzyjny, ale proces jego stworzenia jest mało skuteczny. Zamiast **sumować** kilka miliardów wkładów, wygodniejsze by było **całkować** jedną funkcję, opisującą mniej więcej siłę działającą między atomami, patrz rysunek:



Funkcja pierwotna pozwala po prostu na obliczenie powyższego pola powierzchni, wielokrotnie łatwiej, niż sumą. Zauważmy, że, nawet jeśli ten drugi model z funkcją nie odpowiada do końcu rzeczywistości, mimo wszystko bardzo dobrze on działa, dzięki bardzo małemu wymiarowi jednego atomu względem wymiaru całej ziemi.

11.1.7 Funkcja pierwotna jako całka nieoznaczona

Powtórzmy rozumowanie przedstawione w Sekcji 11.1.2 z odrobinkę innej perspektyw: punktem początkowym będzie wzór (407), jednak teraz, zamiast zastosować Twierdzenie Lagrange tak otrzymując (408), piszemy

$$f(x) \approx \frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,, \tag{424}$$

gdzie Δx odgrywa rolę poprzedniego ϵ, a $\Delta y := y(x+\Delta x)-y(x)$. Ustalmy $x_0 \in D$ i niech $x > x_0$.

Definicja 11.2. Podziałem *przedziału* $[x_0, x]$ *jest podzbiór*

$$P := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\} \subset [x_0, x]\,, \tag{425}$$

gdzie $x_i > x_{i-1}$ *dla każdego* $i = 1, 2, \ldots, n$ *i* $x_n = x$.

Każdy podział P towarzyszą różnicy

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1} \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{426}$$

argumentów oraz różnicy

$$\Delta y_i := y(x_i) - y(x_{i-1}) \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{427}$$

Z (424) otrzymamy wtedy

$$f(x_{i-1}) \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{428}$$

z czego wynika

$$f(x_{i-1})\Delta x_i \approx \Delta y_i \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{429}$$

Branie sumy dla $i = 1, 2, \ldots, n$ obydwóch stron (429) sprowadzi do wzoru

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i = y(x_n) - y(x_0) = y(x) - y(x_0)\,, \tag{430}$$

który odzwierciedla wzór (415).

Ojcowie rachunku różniczkowego–całkowego, czyli Isaac Newton (1642–1727) i Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), zrozumieli, że, aby pozbawić się znaku przybliżenia w (430), trzeba był „pójść do granicy” – szkoda, że pojęcie granicy zostanie wprowadzony dopiero przez Augustin Louis Cauchy (1789–1857).

Sprawia pewną ironię to, że teraz my – który Newtonowi i Leibnizowi nie dorastamy do pięt – możemy śmiać się z ich ‚naiwności”. Otóż oni wzięli napis

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$$

i wygładzili go poprzez „metamorfozy”

$$\sum \longrightarrow \int$$

oraz

$$\Delta x_i \longrightarrow \mathrm{d}\, x\,.$$

Symbol $\int$ czytamy „całką”i symbol $\mathrm{d}\, x$ czytamy „de iks” – czyli jak „delta” bez “lta”.

Otrzymali „wersję dokładną” (czyli bez przybliżenia) wzoru (430)

$$\int f(x)dx = y(x) - y(x_0)\,, \tag{431}$$

z czego wynika, że

$$F(x) := \int f(x)dx \tag{432}$$

jest jedną funkcją pierwotną funkcji f (stałą $y(x_0)$ można ominąć).

Definicja 11.3. *Symbol*

$$\int f(x)dx \tag{433}$$

nazywa się całką nieoznaczoną *(według Newtona) funkcji* $f(x)$ *względem* x*.*

O wiele później, Bernhard Riemann (1826–1866) podał interpretację całki Newtona jako pole powierzchni pod wykresem funkcji, czyli pokazał, że (z dokładnością do stałej)

$$\int f(x)dx = \mathrm{FIG}_{x_0}^{x}(f)\,. \tag{434}$$

UWAGA!!!
Dopóki nie pokażemy, że pole powierzchni $\mathrm{FIG}_{x_0}^{x}(f)$ istnieje, nie możemy uważać (434) za prawdziwą.
Do tamtego momentu, symbol $\int f(x)dx$ będzie oznaczać jedną funkcję pierwotną (znalezioną w dowolnym sposobie, np. przez zgadywanie).

11.1.8 Tajemnica duchów zmarłych ilości

George Berkeley (1685–1753) anglikański biskup, napisał sarkastyczno–polemiczny list pt. „duchy zmarłych ilości” swoim przyjaciołom Newtonowi i Leibnizowi z oskarżeniem o „nekrofilię”, ponieważ, jeśli symbol $\mathrm{d}\, x$ oznacza dowolną małą ilość x–ów, to znaczy, że x już nie ma i pozostał tylko jego „duch”.

Teraz wiemy, że symbole $\mathrm{d}\, x$, $\mathrm{d}\, y$, $\int$, itp. są ja rodniki w chemii: $HO\cdot$, $H\cdot$, $CH_3\cdot$ nie istnieją swobodnie – tylko w kombinacji w innymi rodnikami. Czyli, jak zawsze kiedy jest kłótnia, obie strony

mają rację, tylko, że brak wspólnego języka nie pozwala dojść do porozumienia. Berkely miał rację, ponieważ

$$\mathrm{d}\,x = \lim_{x_i \to x_{i-1}} \Delta x_i = 0\,, \tag{435}$$

czyli $\mathrm{d}\,x$ jest „martwą ilością" ale, z drugiej strony, Newtnon i Leibniz też mieli rację, ponieważ, mimo tego, że $\mathrm{d}\,x$ i $\mathrm{d}\,y$ są „martwe", to

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \lim_{x_i \to x_{i-1}} \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = y'(x_{i-1}) \tag{436}$$

i

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\,x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i = \mathrm{FIG}_{x_0}^{x}(f)\,, \tag{437}$$

a ani $y'(x_{i-1})$ ani $\mathrm{FIG}_{x_0}^{x}(f)$ muszą być zero.

11.1.9 Własności funkcji pierwotnych

Twierdzenie 11.2. *Jeśli F i G są funkcjami pierwotnymi funkcji f i g, odpowiednio, to*

$$\alpha F + \beta G \tag{438}$$

jest funkcją pierwotną funkcji $\alpha f + \beta g$, dla każdego $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dowód. Zachodzi z liniowości pochodnej. □

Twierdzenie 11.3 (Całkowanie przez części)**.** *Niech f, g będą funkcjami różniczkowalnymi. Wówczas*

$$\int g'(x)f(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx\,. \tag{439}$$

Dowód. Wystarczy zaobserwować, że, różniczkując prawą stronę, otrzymamy $g'(x)f(x)$ na mocy wzoru Leibniza. □

Twierdzenie 11.4. *Zachodzą następujące wzory:*

$$\int f'\Big(g(x)\Big)g'(x)dx = f(g(x)) \tag{440}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| \tag{441}$$

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} \tag{442}$$

$$\int f'(ax+b)dx = \frac{1}{a}f(ax+b)\,. \tag{443}$$

Dowód. Wystarczy pamiętać odpowiadające własności pochodnych. □

Pierwszy wzór z powyższej listy nazywa się **wzór na całkowanie przez podstawienie**.

11.1.10 Podstawowe przykłady funkcji pierwotnych

> *Dzień bez obliczenia przynajmniej jednej nowej całki (nieoznaczonej lub oznaczonej) jest dniem straconym!!!.*
>
> Prof. J. Kamiński.

Nie zapomnijmy, że istnieje również „nieoficjalna" metoda całkowania, **całkowanie przez zgadywanie**, która mogłaby się okazać być bardzo skuteczną metodą. Przede wszystkim, w całkowaniu funkcji $f(x)$ chodzi o odkrycie funkcji $F(x)$, takiej, że $F'(x) = f(x)$. Nie ważne skąd bierzemy F, póki wzór zachodzi!

Funkcja pierwotna $F(x) = \int \mathrm{d}x\, f(x)$
1. $\int \mathrm{d}x\, x^\alpha = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$, dla $\alpha \neq -1$
2. $\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
3. $\int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{\lambda x} = \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x} + C$
4. $\int \mathrm{d}x\, \sin x = -\cos x + C$
5. $\int \mathrm{d}x\, \cos x = \sin x + C$
6. $\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$
7. $\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$
8. $\int \mathrm{d}x\, \mathrm{tg}\, x = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
9. $\int \mathrm{d}x\, \mathrm{ctg}\, x = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
10. $\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + D \end{cases}$
11. $\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{1+x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg} x + C \\ -\mathrm{arcctg} x + D \end{cases}$
12. $\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$
13. $\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2-1}\rvert + C$

11.1.11 Całkowanie przez podstawienie

Wróćmy do wzoru na całkowanie przez podstawienie, czyli (440):

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) \tag{444}$$

i traktujmy $g(x)$ jako nową zmienną $y = g(x)$. Chcemy pokazać, że (444) daje się udowodnić za pośrednictwem tych „rodników” $\mathrm{d}\,x$, $\mathrm{d}\,y$, oraz $\int$. Istotnie, lewa strona wygląda

$$\int \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}dx\,. \tag{445}$$

Po skróceniu dx i dy otrzymamy po prostu

$$\int df\,, \tag{446}$$

co jest „wygładzoną” wersją sumy

$$\sum_i \Delta f_i = f(y_n) - f(y_0) = f(y) - f(y_0)\,, \tag{447}$$

skoro f jest **funkcją zmiennej** y. Innymi słowy, z dokładnością do stałej, $\int \mathrm{d}\, f = f = f(y) = f(g(x))$, t.j., wzór (444).

Podobnie, jeśli zechcemy zmienić nieznaną w całce

$$\int f(x)dx\,, \tag{448}$$

tzn., wyrazić x przez jakiś y, gdzie $x = h(y)$, to mamy

$$\int f(x)dx = \int f(h(y))d(h(y))\,. \tag{449}$$

Sztuka polega na tym, że należy pomnożyć i równocześnie podzielić przez dy:

$$\int f\big(h(y)\big)d\big(h(y)\big) = \int f\big(h(y)\big)\frac{d\big(h(y)\big)}{dy}dy = \int f\big(h(y)\big)h'(y)dy\,. \tag{450}$$

Może się zdarzyć, że funkcja pierwotna $F = F(h(y))$ funkcji $f(h(y))h'(y)$ jest **bardziej widoczna** niż funkcja pierwotna $F = F(x)$ funkcji $f = f(x)$. Wówczas

$$\int f\big(h(y)\big)h'(y)dy = F\big(h(y)\big) = F(x)\,. \tag{451}$$

Podkreślmy, że to była tylko sztuczka aby znaleźć $F(x)$: często okazuje się, że **ta sama funkcja daje się całkować, jeśli jest przedstawiona w innej (odpowiednio, mądro wybranej) zmiennej**.

Przykład 11.2. Funkcji pierwotnej funkcji $f(x) = xe^{-x^2}$ nie widać gołem okiem. Problemem jest wykładnik: za skomplikowany. Aby go uprościć, warto próbować wprowadzić nową zmienną $x = h(y) := \sqrt{y}$. Wówczas

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int xe^{-x^2}dx \\ &= \int h(y)e^{-\left(h(y)\right)^2}d\big(h(y)\big) \\ &= \int h(y)e^{-y}\frac{d\big(h(y)\big)}{dy}dy \\ &= \int \sqrt{y}e^{-y}(\sqrt{y})'dy \\ &= \int \sqrt{y}e^{-y}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}dy \\ &= \frac{1}{2}\int e^{-y}dy\,.\end{aligned}$$

Teraz widać funkcję pierwotną funkcji e^{-y}. Jest ona $-e^{-y}$. Można teraz wrócić do zmiennej x dzięki wzorowi $y = h^{-1}(x) = x^2$:

$$\int f(x)dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\,. \tag{452}$$

Zaobserwujmy, że powyższe kroki były dopuszczalne tylko na miejscu, gdzie h jest równowartościowa, t.j., odwracalna. Ale wynik zachodzi dla każdego x. Istotnie,

$$\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)' = xe^{-x^2}\,, \tag{453}$$

bez żadnego ograniczenia wartości x–ów.

11.2 Całka oznaczona

Poniższa definicja całki oznaczonej jest oparta na pojęciu funkcji pierwotnej, tj. całki oznaczonej, której istnienie jeszcze nie jest gwarantowane. Dopiero po wprowadzeniu pojęcia **całki Riemmana** będziemy mogli stwierdzić, że funkcja pierwotna funkcji ciągłej **zawsze istnieje**, na mocy wzoru (416).

Definicja 11.4. *Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Całką oznaczoną funkcji f na przedziale $[a, b]$ nazywamy liczbę*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \tag{454}$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f.

Dopiero kiedy zostanie udowodniony wzór (416), można będzie powiedzieć, że

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{FIG}_{x_0}^a b(f) - \mathrm{FIG}_{x_0}^a(f) = \mathrm{FIG}_a^b(f)\,,$$

czyli: całka oznaczona odpowiada polu powierzchni figury pod wykresem funkcji f i nad osią x–ów, ograniczonej przez proste $x = a$ i $x = b$.

Uwaga 11.1. Definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru funkcji F pierwotnej dla f: jeśli F_1 jest inną funkcją pierwotną f, to $F_1 = F+$ stała (Twierdzenie 11.1) i dlatego $F_1(b)-F_1(a) = F(b)-F(a)$.

Uwaga 11.2. W powyższych założeniach, ustalimy, że

$$\int_b^a f(x)dx := F(a)-F(b) = -\int_a^b f(x)dx\,. \tag{455}$$

Z Twierdzeń 11.2 i 11.3 zachodzą, odpowiednio:

Twierdzenie 11.5 (Liniowość całki oznaczonej)**.** *Jeśli $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to*

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \,. \tag{456}$$

Wprowadźmy użyteczną notację:

$$F|_a^b := F(b) - F(a) \,. \tag{457}$$

Twierdzenie 11.6 (Wzór na całkowanie przez części dla całek oznaczonych)**.** *Jeśli $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są klasy $\mathcal{C}^1$, to*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = fg|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx, \,. \tag{458}$$

Z pierwszego wzoru Twierdzenia 11.4 i 11.3 zachodzi:

Twierdzenie 11.7 (Wzór na całkowanie przez podstawienie dla całek oznaczonych)**.** *Niech $g : [a, b] \to [g(a), g(b)]$ będzie funkcją rosnącą klasy $\mathcal{C}^1$ i niech $f = f(x)$ będzie ciągła na przedziale $[g(a), g(b)]$. Wówczas*

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big) \,, \tag{459}$$

gdzie $t = g(x)$ i F oznacza dowolną funkcję pierwotną f.

Nadchodzą teraz „nowe" własności całek oznaczonych, tzn., nie dziedziczone od całek nieoznaczonych. Aby je pamiętać, student może już myśleć, że $\int_a^b f(x)dx$ odpowiada pewnemu polu powierzchni (ze znakiem!).

Przykład 11.3. Całka

$$\int_a^b k dx \,, \quad k \in \mathbb{R} \tag{460}$$

wynosi $k(b - a)$. Istotnie, odpowiada ona polu powierzchni prostokąta o szerokości $b - a$ i wysokości k. (Z uwagą na to, że „ujemna wysokośc" spowoduje ujemnie pole powierzchni.)

Twierdzenie 11.8 (Addytywność całki jako funkcji przedziału)**.** *Załóżmy, że f jest ciągła na przedziale $P \subset \mathbb{R}$ i niech $a, b, c \in P$. Wówczas*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \,. \tag{461}$$

Dowód. Niech F będzie funkcją pierwotną f na P. Wtedy

$$F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) \,. \tag{462}$$

□

Twierdzenie 11.9 (Monotoniczność całki – **• Zadanie egzaminacyjne nr. 15**)**.** *Jeśli $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe i $f \geq g$ na $[a, b]$, to*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \,. \tag{463}$$

Jeśli $f > g$ to nierówność między całkami jest ostra.

Dowód. Rozpiszmy nierówność (463) jako

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx \geq 0 \tag{464}$$

i weźmy sobie jakąś funkcję pierwotną Ψ funkcji $f - g$. Wtedy

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \Psi(b) - \Psi(a) \,. \tag{465}$$

Skoro $\Psi' = f - g$ jest ≥ 0 (odp. > 0) na $[a, b]$, funkcja Ψ jest niemalejąca (odp., rosnąca) na $[a, b]$. Wobec tego, $\Psi(b) - \Psi(a)$ jest ≥ 0 (odp. > 0), tak, jak chcieliśmy. □

Następujące twierdzenie stanowi „ciągły” analog twierdzenia według którego średnia pewnych liczb jest między najmniejszą a największą.

Twierdzenie 11.10 (• **Zadanie egzaminacyjne nr. 16**). *Niech* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *będzie ciągła. Wówczas*

$$\min_{a\le x\le b} f(x) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \max_{a\le x\le b} f(x)\,. \tag{466}$$

Dowód. Wystarczy zastosować dwukrotnie poprzednie Twierdzenie 11.9 do f i funkcji stałych $g_1 := \min_{a\le x\le b} f(x)$ oraz $g_2 := \max_{a\le x\le b} f(x)$. Wtedy z

$$g_1 \le f \le g_2 \tag{467}$$

otrzymamy nasz wynik. □

Alternatywny dowód. Z definicji całki oznaczonej,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}\,, \tag{468}$$

dla dowolnej funkcji pierwotnej F funkcji f. Wówczas, na mocy twierdzenia Lagrange'a, istnieje $\xi \in [a, b]$, taki, że

$$F'(\xi) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}\,. \tag{469}$$

Ale $F'(x) = f(x)$, wobec tego

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\,. \tag{470}$$

W szczególności, skoro $f(\xi)$ leży między g_1 a g_2, nasz wynik zachodzi. □

Wzór (470), *mutatis mutandis* (po łacinie, „po dokonaniu niezbędnych zmian”), jest po prostu wzorem definującym średnią arytmetyczną.

Twierdzenie 11.11. *Niech* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *będzie ciągła. Wówczas*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx\,. \tag{471}$$

Dowód. Wystarczy stosować dwukrotnie poprzednie Twierdzenie 11.9 do $|f|$ i funkcji f oraz $-f$. Wtedy z

$$f \le |f|\,, \quad -f \le |f|\,, \tag{472}$$

wynika

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx\,, \quad \int_a^b -f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx\,, \tag{473}$$

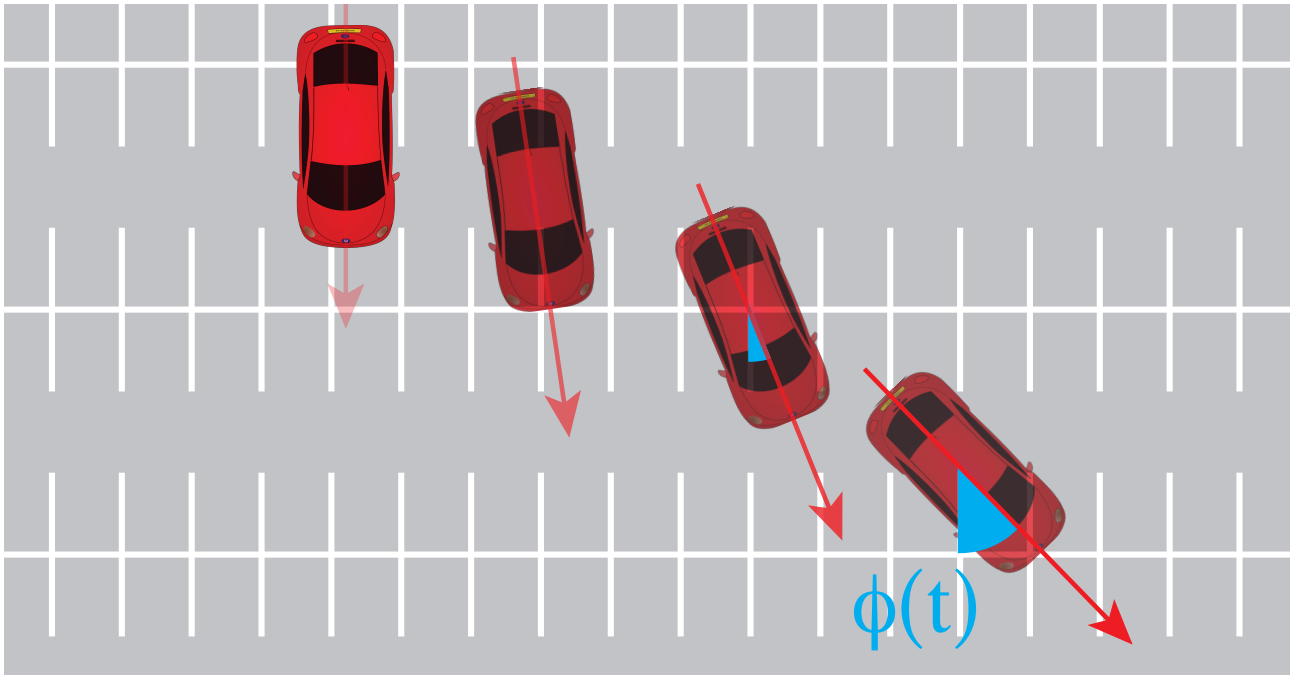
skąd otrzymamy nasz wynik. □

11.3 Eksperyment: nawigacja inercyjna

Wyobraźmy sobie następującą sytuację:

- jedziemy samochodem po nieskończonym miejscu parkingowym;
- nikogo nie ma na parkingu oprócz nas;
- prędkość samochód jest ustaloną na 10 km/h;
- okna są zasłonięte i nic nie widać;
- pewna (brzydka) osoba siedzi obok nas i nadaje meldunki postaci „skręć kierownicą w lewo… dość… skręć dalej, ale wolniej… dość… skręć troszeczkę wstecz… dość… itd. przez kilka godzin, w taki sposób, że kierownica jest zawsze skręcona do lewej strony;

- zanim osoba zaczęła rozkazywać, oś samochodu była równoległa do miejsc parkingowych i kierownica była na pozycji „zero”;
- na końcu meldunków, kierownica wraca do pozycji „zero”.



Okropna osoba każe, żebyśmy odstawiali samochód równolegle do miejsc parkingowych: w przypadku porażki zastosuje karę śmierci. Mamy do swojej dyspozycji:

- jedną butelkę wody;



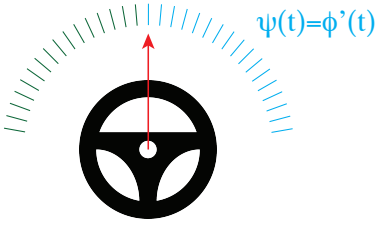
- jeden zawór obrotowy;



- jedno wiaderko.



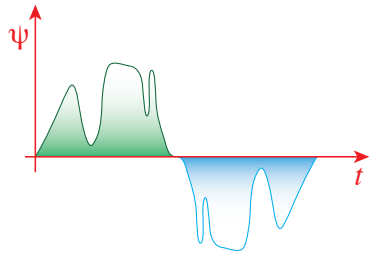
Jak zapobiec śmierci? Należy włączyć mózg do pracy. Zastanówmy się: jaka jest jedyna rzecz nad którą mamy kontrol? Kierownica. A co kierownica kontroluje? Kąt $\phi(t)$ między osią samochodu a osią miejsc parkingowych w pewnie momencie t? NIE! Raczej jego **pochodna** $\psi(t) := \phi'(t)$. „Dowód”: kąt $\phi(t)$ jest stały (t.j., samochód jedzie prosto) wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi(t) = 0$ (t.j., kierownica jest na pozycji „zero”); jeśli $\psi(t) = \text{stała} > 0$, to samochód obróci dookoła samego siebie, t.j., kąt $\phi(t)$ rośnie.



Pierwsze rozwiązanie przychodzi nam do głowy: powinniśmy zanotować kąt pochylenia kierownicy, innymi słowy naszkicować wykres funkcji $\psi(t)$; a potem, aby wykonać polecenie, „wystarczy" odwzorować wykres w stronie ujemnych ψ i skręcić kierownicę według takiego wykresu. Dobry pomysł: szkoda, że nie mamy papieru ani długopisu!

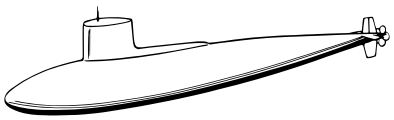
Oprócz tego: jakbyśmy mogli nagrywać *dokładnie* każdą chwilową pozycję kierownicy? To po prostu leży poza ludzkimi możliwościami. Ale: czy na pewno potrzebujemy funkcji ψ? Nie! Potrzebujemy tylko wartości funkcji ϕ na końcu naszej tortury. Ale ϕ jest funkcją pierwotną funkcji ψ. Wtedy potrzebujemy tylko **całki oznaczonej** funkcji ψ od czasu t_0 (początek tortury) do czasu t_1 (koniec tortury).

Dopóki wartość takiej całki jest znana, wystarczy manewrować kierownicę, żebyśmy opisywali **dowolną funkcję** ujemną, której całka jest (oprócz znaku) ta sama, jak wcześniej. W taki sposób, całka takiej rozszeszonej funkcji wynosi 0, tak, jak chcieliśmy.



Ale jak obliczyć całkę funkcji $\psi(t)$. To łatwiejsze niż wygląda. Wystarczy podłączyć zawór do butelki, przywiesić butelkę do góry nogami i, wolną ręką, kręcić/odkręcać zawór **dokładnie tak, jak kierownicę**. Zbieramy wodę wypływającą w wiaderko: jej objętość odpowiada dokładnie upragnionej całce. Na końcu tortury, wystarczy opróżnić butelkę i wlać w nią wodę z wiaderka: aby odstawić samochód równolegle do osi miejsc parkingowych, potrzebujemy sterować (jednocześnie) kierownicę i zawór, w taki sposób, że kierowca będzie na zero, kiedy woda się skończy. Dożyjemy kolejnego dnia!

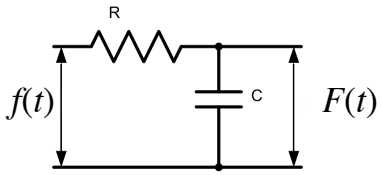
Takie absurdalne doświadczenie jest zupełnie urojone, chociaż istnieje pewien środek transportowy, który znajduje się w podobnej sytuacji: łódka podwodna.



Powyżej opisywany sposób nawigacji stanowił normę na pokładzie pierwszych łódek podwodnych i jeszcze pojawia się jako sposób pomocniczy: oto **nawigacja inercyjna**.

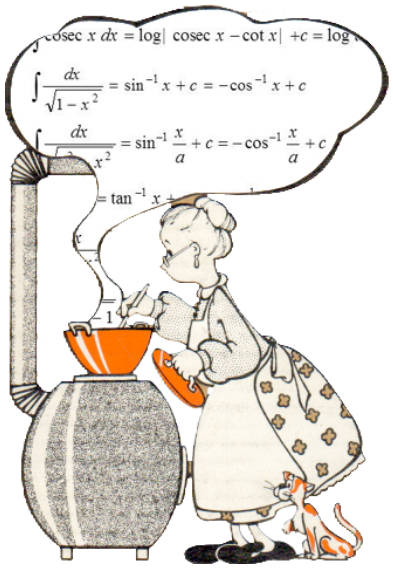
Wiaderko stanowi najbardziej elementarny przykład tak zwanego układu całkującego (integrator). Pomyślmy, że jedno, bardzo użyteczne urządzenie miary, deszczomierz, jest po prostu wiaderkiem! Przede wszystkim, on całkuje funkcję „opad chwilowy" przez cały dzień.

Elektronicznym analogiem wiaderka jest kondensator. Jeden z najprostszych układów elektronicznych, składający się z jednego rezystora i jednego kondensatora, obliczy całkę (oznaczoną) $F(f)$ wchodzącego sygnału $f(t)$:



Morał tej historii jest: jeśli bezmózgowie wiaderko umie obliczyć całki, człowiek tym bardziej powinien!

12 Tydzień XII: 17. i 20. grudnia 2024



Z konceptualnego punktu widzenia, całkowanie to po prostu „różniczkowanie na odwrót”: taka (właściwa) uwaga mogłaby doprowadzić do nieprawdziwego wrażenia, że poziom trudności jest ten sam.

Istotnie, kolejne różniczkowania dążą do uproszczenia wyrażenia—lub, przynajmniej, nie wyprowadzają go poza klasy, gdzie znajdowała się funkcja przed różniczkowaniem: n.p.,

$$\ln(x) \mapsto \frac{1}{x} \mapsto -\frac{1}{x^2} \mapsto \frac{2}{x^3} \mapsto \cdots . \tag{474}$$

Widać, że wszystkie funkcje od $\frac{1}{x}$ mają tą samą postać i są „łatwiejsze” niż $\ln(x)$, cokolwiek miałoby to znaczyć.

Jeśli różniczkowanie prowadzi od trudności do łatwości, to musimy oczekiwać, że działanie odwrotnie prowadzi nas od łatwości do trudności.

Spróbujmy zacząć od $\frac{1}{x^3}$ i całkować:

$$\frac{1}{x^3} \mapsto -\frac{1}{2x^2} \mapsto \frac{1}{2x} \mapsto \frac{\log(x)}{2} \mapsto \frac{1}{2}(x\log(x) - x) \mapsto \frac{1}{4}x^2\log(x) - \frac{3x^2}{8} \mapsto \frac{1}{12}x^3\log(x) - \frac{11x^3}{72} .$$

Widać, że całkowanie zdecydowanie odprowadzi nas daleko od „strony bezpiecznej”. Sytuacja jest nawet gorsza, jeśli zaczynamy od $\frac{1}{1+x^2}$,

$$\frac{1}{1+x^2} \mapsto \operatorname{arctg}(x) \mapsto x\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) \mapsto -\frac{1}{2}x\log\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) ,$$

po trzech krokach już mamy coś zupełnie paskudnego, co ledwo przypomina nam funkcję, od której zaczęliśmy.

Dobra wiadomość jest, że rzadko będziemy potrzebowali więcej niż jednego całkowania—natomiast wielokrotne różniczkowanie jest istotnie, zwłaszcza jeśli chodzi o rozwinięcie Taylora.

Pomino tego, nawet jednokrotne całkowanie mogłoby stanowić olbrzymi problem studentom. Powyższe funkcje, tzn., $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{1+x^2}$, są przykładami **funkcji wymiernych**. Nawet gorsza jest sytuacja, kiedy mamy do czynienia z **funkcjami niewymiernymi**, zwłaszcza ułamkami zawierającymi **pierwiastki, funkcje wykładnicze, funkcje trygonometryczne, itd.**

Istnieją różne metody całkowania takich funkcji, ale ich wyczerpujące omówienie zajmowałoby za dużo czasu. W związku z tym, będziemy przedstawić materiał nie w postaci twierdzeń ale raczej w postaci „przepisów babci”, tzn., reguł, które po prostu, „działają” w odpowiednich sytuacjach. Student powinien je pamiętać i rozpoznać przypadki, kiedy one będą stosowne. Uzasadnieniem takich reguł nie będziemy przejmować się—ciekawy student mógłby sam to robić.

Zacznijmy od funkcji wymiernych.

12.1 Całkowanie funkcji wymiernych

Przypominając Twierdzenie 6.6 oraz Wniosek 6.4, widać, że, aby być w stanie całkować dowolną funkcją wymierną, „wystarczy” być w stanie aby scałkować każdą funkcję wymierną pierwszego rodzaju (patrz Definicję 6.6), także każdą funkcję wymierną drugiego rodzaju (patrz Definicję 6.7).

12.1.1 Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju

Łatwo przekonać się, że:

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^r}dx = \begin{cases} \frac{A}{(1-r)(x-\alpha)^{r-1}} & r > 1 , \\ A\ln(x-\alpha) & r = 1 . \end{cases} \tag{475}$$

12.1.2 Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju

To mniej łatwo – ale już możliwe. Najpierw rozbijmy podaną funkcję w dwa ułamki:

$$\frac{Bx+C}{(x^2+2px+q)^s} = \frac{B}{2}\frac{2x+2p}{(x^2+2px+q)^s} + \frac{C-Bp}{(x^2+2px+q)^s}\,. \tag{476}$$

Zacznijmy od przypadku $s=1$. Pierwsza składowa daję się łatwo całkować: istotnie, oprócz współczynnika $\frac{B}{2}$, licznik stanowi pochodną mianownika. Wobec tego,

$$\frac{B}{2}\int \frac{2x+2p}{x^2+2px+q}dx = \frac{B}{2}\ln(x^2+2px+q)\,. \tag{477}$$

Druga składowa jest bardziej wymagająca. Rozpiszmy mianownik postaci

$$(x+p)^2+q-p^2\,. \tag{478}$$

(Uzupełnienie do pełnego kwadratu.) Wobec tego,

$$\frac{C-Bp}{x^2+2px+q} = \frac{C-Bp}{(x+p)^2+q-p^2}\,. \tag{479}$$

„Przepis babci" powie, że powinnyśmy próbować kasować lub/oraz znormalizować stałe na 1, o tyle ile możemy. Skoro $q-p^2$ jest większy od 0, można rozpisać (479) postaci

$$\frac{C-Bp}{x^2+2px+q} = \frac{\frac{C-Bp}{q-p^2}}{\left(\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}\right)^2+1}\,. \tag{480}$$

„Zniszczenie niepotrzebnych wyrazów", w tym przypadku, polega na tym, że powinniśmy traktować $\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}$ jako nową zmienną x (co *de facto* zetrze wszystkie przeszkadzające wyrazy). Skoro

$$\left(\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{q-p^2}}\,, \tag{481}$$

można rozpisać (480) jako

$$\frac{C-Bp}{x^2+2px+q} = \frac{C-Bp}{\sqrt{q-p^2}}\frac{\frac{1}{\sqrt{q-p^2}}}{\left(\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}\right)^2+1}\,. \tag{482}$$

Istotnie,

$$\int \frac{\frac{1}{\sqrt{q-p^2}}}{\left(\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}\right)^2+1}dx = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}\right)\,, \tag{483}$$

z czego wynika

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+2px+q}dx = \frac{B}{2}\ln(x^2+2px+q) + \frac{C-Bp}{\sqrt{q-p^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}\right)\,. \tag{484}$$

Załóżmy $s>1$ i wróćmy do (476). Pierwsza składowa łatwo daje się scałkować:

$$\int \frac{B}{2}\frac{2x+2p}{(x^2+2px+q)^s}dx = \frac{B}{2(1-s)(x^2+2px+q)^{s-1}}\,. \tag{485}$$

Aby stawić czoło drugiej składowej warto rozważać całkę

$$I_s(y) := \int \frac{1}{(y^2+1)^s}dy\,, \quad s>1\,. \tag{486}$$

Okazuje się, że

$$\begin{aligned}
I_s(y) &= \int \frac{y^2+1-y^2}{(y^2+1)^s}dy = \\
&= \int \frac{1}{(y^2+1)^{s-1}}dy - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^s}dy = \\
&= I_{s-1}(y) - \int \frac{y}{2}\frac{2y}{(y^2+1)^s}dy = \\
&= I_{s-1}(y) - \frac{y}{2}\frac{1}{(1-s)(y^2+1)^{s-1}} + \int \frac{1}{2}\frac{1}{(1-s)(y^2+1)^{s-1}}dy = \\
&= I_{s-1}(y) - \frac{y}{2(1-s)(y^2+1)^{s-1}} + \frac{1}{2(1-s)}I_{s-1}(y) = \\
&= \frac{3-2s}{2(1-s)}I_{s-1}(y) - \frac{y}{2(1-s)(y^2+1)^{s-1}}\,.
\end{aligned}$$

Skoro

$$I_1(y) = \operatorname{arctg}(y)\,, \tag{487}$$

powyższy wzór rekurencyjny pozwala wyznaczyć $I_s(y)$, dla każdego $s > 1$.

Wówczas druga składowa prawej strony (476) daje

$$\begin{aligned}
\frac{C-Bp}{(x^2+2px+q)^s} &= \frac{C-Bp}{1}\frac{1}{((x+p)^2+q-p^2)^s} = \\
&= \frac{C-Bp}{(q-p^2)^s}\frac{1}{\left(\left(\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}\right)^2+1\right)^s} = \\
&= \frac{C-Bp}{(q-p^2)^{s-\frac{1}{2}}}\frac{\frac{1}{\sqrt{q-p^2}}}{\left(\left(\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}\right)^2+1\right)^s} = \\
&= \frac{C-Bp}{(q-p^2)^{\frac{2s-1}{2}}}I_s\left(\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}\right)\,.
\end{aligned}$$

Podsumowując,

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+2px+q)^s}dx = \begin{cases} \frac{B}{2}\ln(x^2+2px+q) + \frac{C-Bp}{\sqrt{q-p^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}\right) & s=1 \\ \frac{B}{2(1-s)(x^2+2px+q)^{s-1}} + \frac{C-Bp}{(q-p^2)^{\frac{2s-1}{2}}}I_s\left(\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}\right) & s>1\,, \end{cases} \tag{488}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
I_1(y) &= \operatorname{arctg}(y) \\
I_s(y) &= \frac{3-2s}{2(1-s)}I_{s-1}(y) - \frac{y}{2(1-s)(y^2+1)^{s-1}}\,, \quad s>1\,.
\end{aligned}$$

12.1.3 Całkowanie dowolnej funkcji wymiernej

Razem z Wnioskiem 6.4, wzory (475) i (488) pozwalają całkować każdą funkcję wymierną.

Pamiętać wszystko jest poza ludzkimi możliwościami: wystarczy pamiętać główną filozofię i być w stanie, aby wypracować odpowiedni wzór dla każdego konkretnego przypadku (który, zasadniczo, jest o wiele łatwiejszy niż ogólny).

12.1.4 Przykład ze „sztucznym błędem” znaku

Przykład 12.1. Całkowanie jest bardzo delikatnym biznesem. Mały błąd arytmetyczny może powodować olbrzymie odkształcenie wyników. Jako przykład, zobaczmy co będzie się dziać, jeśli w naszej funkcji wymiernej pierwszego rodzaju

$$\frac{Bx+C}{x^2+2px+q} \tag{489}$$

wprowadzimy małą zmianę, a mianowicie zakładamy, że $p^2-q>0$. Wtedy mamy dwa rozwiązania równania $x^2+2px+q=0$:

$$x_1 := -p+\sqrt{p^2-q}\,, \quad x_1 := -p-\sqrt{p^2-q}\,. \tag{490}$$

W związku z tym,

$$\frac{Bx+C}{x^2+2px+q} = \frac{B}{2}\frac{2x+2p}{x^2+2px+q} + \frac{C-Bp}{(x-x_1)(x-x_2)}\,. \tag{491}$$

Pierwszą składową traktujemy jak wcześniej. Do drugiej można zastosować Wniosek 6.4. Dokładniej, szukamy liczb $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ takich, że

$$\frac{C-Bp}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2}\,. \tag{492}$$

Aby je znaleźć, obliczmy sumę:

$$\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} = \frac{A_1(x-x_2)+A_2(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{(A_1+A_2)x - A_1x_2 - A_2x_1}{(x-x_1)(x-x_2)} \tag{493}$$

i rozwiązujmy wynikający z tej układ równań

$$\begin{aligned} A_1+A_2 &= 0\,,\\ -A_1x_2-A_2x_1 &= C-Bp\,. \end{aligned}$$

Mamy

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{C-Bp}{x_1-x_2} = \frac{C-Bp}{2\sqrt{p^2-q}}\,,\\ A_2 &= -\frac{C-Bp}{x_1-x_2} = -\frac{C-Bp}{2\sqrt{p^2-q}}\,, \end{aligned}$$

skąd wynika

$$\int \frac{C-Bp}{(x-x_1)(x-x_2)}dx = \frac{C-Bp}{2\sqrt{p^2-q}}\ln(x-x_1) - \frac{C-Bp}{2\sqrt{p^2-q}}\ln(x-x_2)\,, \tag{494}$$

t.j.,

$$= \frac{C-Bp}{2\sqrt{p^2-q}}\ln\left(\frac{x+p-\sqrt{p^2-q}}{x+p+\sqrt{p^2-q}}\right)\,. \tag{495}$$

Podsumowując,

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+2px+q}dx = \frac{B}{2}\ln(x^2+2px+q) + \frac{C-Bp}{2\sqrt{p^2-q}}\ln\left(\frac{x+p-\sqrt{p^2-q}}{x+p+\sqrt{p^2-q}}\right)\,. \tag{496}$$

Warto porównać (496) z (484)… czy naprawdę są takie różne?

Rozpisując

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+p-\sqrt{p^2-q}}{x+p+\sqrt{p^2-q}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{-\sqrt{p^2-q}}{p+x}}{1-\frac{-\sqrt{p^2-q}}{p+x}}\right) = \operatorname{artgh}\left(\frac{-\sqrt{p^2-q}}{p+x}\right)\,, \tag{497}$$

wzór (496) wygląda

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+2px+q}dx = \frac{B}{2}\ln(x^2+2px+q) + \frac{Bp-C}{\sqrt{p^2-q}}\operatorname{artgh}\left(\frac{\sqrt{p^2-q}}{p+x}\right)\,, \tag{498}$$

co jest bardziej podobne (484).

12.1.5 Przykład ze wstępnym dzieleniem wielomianów

Przykład 12.2. Jeszcze inny przykład zastosowania Wniosku 6.4. Obliczmy

$$\int \frac{x^6}{(x-1)(x+1)^2}\,. \tag{499}$$

Najpierw należy obliczyć resztę $R(x)$. Skoro

$$(x-1)(x+1)^2 = x^3 + x^2 - x - 1\,, \tag{500}$$

zastosując algorytm podzielenie wielomianów otrzymamy

$$x^6 = (x^3 + x^2 - x - 1)(x^3 - x^2 + 2x - 2) + 3x^2 - 2\,. \tag{501}$$

To mamy

$$\int \frac{x^6}{(x-1)(x+1)^2} = x^3 - x^2 + 2x - 2 + \frac{3x^2-2}{(x-1)(x+1)^2}\,. \tag{502}$$

Pierwsza składowa prawej strony łatwo daje się scałkować:

$$\int x^3 - x^2 + 2x - 2dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x\,. \tag{503}$$

Co do drugiej składowej prawej strony, warto rozpisać:

$$\frac{3x^2-2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{3(x^2-1)+1}{(x^2-1)(x+1)} = \frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x^2-1)(x+1)}\,. \tag{504}$$

Oczywiście,

$$\int \frac{3}{x+1}dx = 3\ln(x+1)\,. \tag{505}$$

Szukamy teraz $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$ takich, że

$$\frac{1}{(x^2-1)(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{(x+1)^2}\,. \tag{506}$$

Równanie

$$A_1x^2 + A_2x^2 + 2A_1x + A_3x + A_1 - A_2 - A_3 = 1 \tag{507}$$

ma być spełnione. Należy wtedy rozwiązywać układ

$$\begin{aligned} 1 &= A_1 - A_2 - A_3\,,\\ 0 &= 2A_1 + A_3\,,\\ 0 &= A_1 + A_2\,. \end{aligned}$$

Łatwo otrzymać

$$A_1 = \frac{1}{4}\,,\quad A_2 - \frac{1}{4}\,,\quad A_3 = -\frac{1}{2}\,, \tag{508}$$

skąd wynika

$$\int \frac{1}{(x^2-1)(x+1)} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\log(x-1) - \frac{1}{4}\log(x+1)\,. \tag{509}$$

Podsumowując,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^6}{(x-1)(x+1)^2} &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + 3\ln(x+1) + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\log(x-1) - \frac{1}{4}\log(x+1) =\\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + \frac{1}{2(x+1)} + \ln\left(\sqrt[4]{(x+1)^{11}(x-1)}\right)\,. \end{aligned}$$

Warto sprawdzić obliczając pochodną.

12.1.6 Przykład z wielomianem bez pierwiastków

Przykład 12.3. Ostatni przykład zastosowania Wniosku 6.4. Obliczmy

$$\int \frac{1}{1+x^4}\,. \tag{510}$$

Szukamy $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ takie, że

$$1+x^4 = (x^2+a_1x+b_1)(x^2+a_2x+b_2) = x^2\,(a_1a_2+b_1+b_2)+x\,(a_2b_1+a_1b_2)+(a_1+a_2)\,x^3+b_1b_2+x^4\,.$$

Mamy wtedy układ

$$\begin{aligned} b_1b_2 &= 1\,,\\ a_2b_1+a_1b_2 &= 0\,,\\ a_1a_2+b_1+b_2 &= 0\,,\\ a_1+a_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Otrzyma się

$$b_1 = b_2 = 1\,, \quad a_1 = \sqrt{2}\,, \quad a_2 = -\sqrt{2}\,, \tag{511}$$

innymi słowy

$$1+x^4 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)\,. \tag{512}$$

Szukamy teraz $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ takich, że

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1} \tag{513}$$

Mamy wtedy równanie

$$B+D+(A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D)x+(\sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D)x^2+(A+C)x^3 = 1 \tag{514}$$

i układ

$$\begin{aligned} B+D &= 1\,,\\ A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D &= 0\,,\\ \sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D &= 0\,,\\ A+C &= 0\,. \end{aligned}$$

Rozwiązania są

$$\begin{aligned} B = D &= \frac{1}{2}\,,\\ C &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\,,\\ A &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{x}{2\sqrt{2}}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\frac{1}{2}+\frac{x}{2\sqrt{2}}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,. \tag{515}$$

Już wiedząc, że

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{1}{2}-\frac{x}{2\sqrt{2}}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx &= -\frac{\log\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}{4\sqrt{2}} + \frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}x-1\right)}{2\sqrt{2}}\,,\\ \int \frac{\frac{1}{2}+\frac{x}{2\sqrt{2}}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx &= \frac{\log\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}{4\sqrt{2}} + \frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}x+1\right)}{2\sqrt{2}}\,, \end{aligned}$$

otrzymamy nareszcie

$$\int \frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1))\,. \tag{516}$$

Warto sprawdzić obliczając pochodną.

12.2 Całkowanie funkcji wymiernych złożonych z innymi funkcjami

Czasami funkcje wymierne są „w przebraniu", w sensie, że nie widać gołem okiem, że mamy do czynienia z takimi funkcjami. Faktycznie, mamy do czynienia z funkcjami złożonymi funkcji wymiernych z innymi funkcjami. Z grubsza mówiąc, n.p., „funkcje wymierne funkcji $\sin^2(x)$, $\cos^2(x)$ oraz $\sin(x)\cos(x)$" są ułamkami, gdzie występują kombinacje liniowe potęg funkcji $\sin^2(x)$, $\cos^2(x)$ oraz $\sin(x)\cos(x)$ i w liczniku i w mianowniku.

12.2.1 Funkcje wymierne funkcji $\sin^2(x)$, $\cos^2(x)$ oraz $\sin(x)\cos(x)$

Takim przypadkom stawia się czoło przez podstawienie

$$t := \operatorname{tg}(x)\,. \tag{517}$$

Istotnie,

$$\begin{aligned} \cos^2(x) &= \frac{1}{1+t^2}\,, \\ \sin^2(x) &= \frac{t^2}{1+t^2}\,, \\ \sin(x)\cos(x) &= \frac{t}{1+t^2}\,. \end{aligned}$$

Należy również rozważać fakt, że

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = x'(t)dt = \operatorname{arctg}'(t)dt = \frac{1}{1+t^2}dt\,. \tag{518}$$

Przykład 12.4. Scałkujmy

$$\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)(\sin(x)+\cos(x))}\,. \tag{519}$$

Po podstawieniu, funkcją do całkowania jest

$$\frac{1}{t^4+t^3+t^2+t}\,. \tag{520}$$

Rozłóżmy na ułamki proste:

$$\frac{1}{t^4+t^3+t^2+t} = \frac{-t-1}{2\left(t^2+1\right)} + \frac{1}{t} - \frac{1}{2(t+1)}\,. \tag{521}$$

Rozpisawszy

$$\frac{-t-1}{2\left(t^2+1\right)} = -\frac{1}{2\left(t^2+1\right)} - \frac{t}{2\left(t^2+1\right)}\,, \tag{522}$$

otrzymamy

$$\frac{1}{t^4+t^3+t^2+t} = -\frac{1}{2\left(t^2+1\right)} - \frac{t}{2\left(t^2+1\right)} + \frac{1}{t} - \frac{1}{2(t+1)}\,, \tag{523}$$

skąd wynika

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t^4+t^3+t^2+t}dt &= -\frac{1}{4}\ln\left(t^2+1\right) + \ln(t) - \frac{1}{2}\ln(t+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(t) \\ &= \ln\left(\frac{t}{\sqrt{(t+1)\sqrt{t^2+1}}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(t)\,. \end{aligned}$$

Podstawiając t otrzymamy

$$\int \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)(\sin(x)+\cos(x))}dx = \ln\left(\frac{\operatorname{tg}(x)}{\sqrt{(\operatorname{tg}(x)+1)\sec(x)}}\right) - \frac{x}{2}\,. \tag{524}$$

12.2.2 Funkcje wymierne sinusów i cosinusów

Takim przypadkom stawia się czoło przez podstawienie

$$t := \operatorname{tg}\left(\tfrac{x}{2}\right) . \tag{525}$$

Istotnie,

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin\left(2\tfrac{x}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x}{2}\right) \\ &= \frac{2t}{1+t^2}\,, \\ \cos(x) &= \cos\left(2\tfrac{x}{2}\right) \\ &= 1-2\sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right) \\ &= 1-\frac{2t^2}{1+t^2} \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\,. \end{aligned}$$

Należy również rozważać fakt, że

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = x'(t)dt = 2\operatorname{arctg}'(t)dt = \frac{2}{1+t^2}dt\,. \tag{526}$$

Przykład 12.5. Scałkujmy

$$\frac{1}{\sin(x)+\cos(x)}\,. \tag{527}$$

Po podstawieniu, funkcją do całkowania jest

$$\frac{-2}{t^2-2t-1}\,. \tag{528}$$

Rozłóżmy na ułamki proste:

$$\frac{-2}{t^2-2t-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}\left(-t+\sqrt{2}+1\right)} + \frac{1}{\sqrt{2}\left(t+\sqrt{2}-1\right)} \tag{529}$$

i scałkujmy:

$$\int \frac{-2}{t^2-2t-1}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{t+\sqrt{2}-1}{-t+\sqrt{2}+1}\right)\,. \tag{530}$$

Podstawiając t otrzymamy

$$\int \frac{1}{\sin(x)(\sin(x)+\cos(x))}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{2}-1}{-\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{2}+1}\right)\,. \tag{531}$$

12.2.3 Funkcje wymierne x–ów i $\sqrt{1-x^2}$

Można podstawić $x = \cos(u)$ i przejść do poprzedniego przypadku. Zauważmy, że

$$dx = \frac{dx}{du}du = x'(u)du = \cos'(u)du = -\sin(u)du\,. \tag{532}$$

Przykład 12.6. Scałkujmy

$$\frac{1}{4-5\sqrt{1-x^2}}\,. \tag{533}$$

Po podstawieniu $x = \cos(u)$, funkcją do całkowania jest

$$\frac{1}{5-4\frac{1}{\sin(u)}}\,. \tag{534}$$

Po podstawieniu $t = \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right)$, funkcją do całkowania jest

$$-\frac{2t}{(t^2+1)\,(2t^2-5t+2)}\,. \tag{535}$$

Rozłóżmy na ułamki proste:

$$\frac{2}{5\,(t^2+1)}+\frac{8}{15(2t-1)}-\frac{4}{15(t-2)} \tag{536}$$

i scałkujmy:

$$\frac{4}{15}\ln\left(\frac{1-2t}{2-t}\right)+\frac{2}{5}\operatorname{arctg}(t)\,. \tag{537}$$

Podstawiając t otrzymamy

$$\frac{4}{15}\ln\left(\frac{1-2\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right)}{2-\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right)}\right)+\frac{u}{5}\,. \tag{538}$$

Zaobserwujmy teraz, że ze wzoru

$$x=\cos(u)=\frac{1-t^2}{1+t^2}\,,\quad t=\operatorname{tg}\left(\tfrac{u}{2}\right)\,, \tag{539}$$

wynika

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{u}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos(u)}{1+\cos(u)}}=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,. \tag{540}$$

Wobec tego, (538) daje nam

$$\int\frac{1}{4-5\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{4}{15}\ln\left(\frac{1-2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{2-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right)+\frac{\arccos(x)}{5}\,. \tag{541}$$

Uwaga 12.1. Istnieje druga metoda. Można również od razu podstawić

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\Leftrightarrow t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,. \tag{542}$$

Zauważmy, że

$$dx=\frac{dx}{dt}dt=-\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt\,. \tag{543}$$

Na przykład, całka funkcji (533) jest równa całce funkcji

$$-\frac{2t}{(t^2+1)\,(2t^2-5t+2)}\,, \tag{544}$$

tzn., (535).

12.2.4 Funkcje wymierne x–ów i $\sqrt{x^2+a}$, $a>0$

Można podstawić $x=\sqrt{a}\operatorname{tg}(u)$ i przejść do poprzedniego przypadku. Zauważmy, że

$$dx=\frac{dx}{du}du=x'(u)du=\sqrt{a}\operatorname{tg}'(u)du=\frac{\sqrt{a}}{\cos^2(u)}du\,. \tag{545}$$

Przykład 12.7. Scałkujmy

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+2}}\,. \tag{546}$$

Po podstawieniu $x=\sqrt{2}\operatorname{tg}(u)$, funkcją do całkowania jest

$$\frac{1}{\cos(u)+\cos(u)\sin(u)}\,. \tag{547}$$

Po podstawieniu $t = \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right)$, funkcją do całkowania jest

$$-\frac{2\left(t^2+1\right)}{(t-1)(t+1)^3}\,. \tag{548}$$

Rozłóżmy na ułamki proste:

$$\frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{2}{(t+1)^3} - \frac{1}{2(t-1)} \tag{549}$$

i scałkujmy:

$$\frac{1}{(t+1)} - \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)\,. \tag{550}$$

Podstawiając t otrzymamy

$$\frac{1}{\left(\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right)+1\right)} - \frac{1}{\left(\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right)+1\right)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right)+1}{\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right)-1}\right)\,. \tag{551}$$

Zaobserwujmy teraz, że ze wzoru

$$x = \sqrt{2}\operatorname{tg}(u) = \sqrt{2}\frac{2t}{1-t^2}\,, \quad t = \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right)\,, \tag{552}$$

wynika

$$\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{x}\,. \tag{553}$$

Wobec tego, (551) daje nam

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2}}dx = \frac{x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)+\ln\left(x\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)+1\right)}{4}\,. \tag{554}$$

Uwaga 12.2. Istnieje druga metoda. Można również podstawić

$$x = \frac{a-t^2}{2t} \Leftrightarrow t = \sqrt{x^2+a}-x\,. \tag{555}$$

Zauważmy, że

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = -\frac{a+t^2}{2t^2}dt\,. \tag{556}$$

Na przykład, całka funkcji (546) jest równa całce funkcji

$$-\frac{t^2+2}{4t}\,, \tag{557}$$

skąd wynika

$$\int -\frac{t^2+2}{4t}dt = \frac{1}{4}\left(-\frac{t^2}{2}-2\ln(t)\right)\,, \tag{558}$$

czyli

$$\frac{x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)-2\ln\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)}{4}\,, \tag{559}$$

co równa się (554). (Widać? To typowy przykład dwóch rozwiązań, których różnica jest stałą, ale nie w jawniej postaci „c”.)

12.2.5 Funkcje wymierne funkcji $e^{\alpha x}$

Można podstawić $t = e^{\alpha x}$ i przejść do poprzedniego przypadku. Zauważmy, że

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = x'(t)dt = \left(\frac{\ln(t)}{\alpha}\right)' dt = \frac{1}{\alpha t}dt\,. \tag{560}$$

Przykład 12.8. Scałkujmy

$$e^{4x}\sqrt{1+e^{2x}}. \tag{561}$$

Po podstawieniu $t = e^x$, funkcją do całkowania jest

$$t^3\sqrt{t^2+1}\,. \tag{562}$$

Po podstawieniu $t = \mathrm{tg}(u)$, funkcją do całkowania jest

$$\frac{\sin^3(u)}{\cos^6(u)}\,. \tag{563}$$

Skoro

$$\frac{\sin^3(u)}{\cos^6(u)} = \frac{\sin(u)\sin^2(u)}{\cos^6(u)} = \frac{\sin(u)(1-\cos^2(u))}{\cos^6(u)}\,, \tag{564}$$

można całkować przez podsawienie:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3(u)}{\cos^6(u)}du &= -\int \frac{\cos'(u)(1-\cos^2(u))}{\cos^6(u)}du = \\ &= -\int \frac{(1-\cos^2(u))}{\cos^6(u)}\frac{d\cos(u)}{du}du = \\ &= -\int \frac{1-v^2}{v^6}dv = \\ &= \frac{1}{5v^5} - \frac{1}{3v^3}\,,\end{aligned}$$

gdzie $v = \cos(u)$. Wobec tego,

$$\int \frac{\sin^3(u)}{\cos^6(u)}du = \frac{1}{5\cos^5(u)} - \frac{1}{3\cos^3(u)}\,. \tag{565}$$

Uwzględniając, że

$$\cos(x) = \sqrt{\frac{1}{1+t^2}} \Rightarrow \frac{1}{\cos(x)} = (1+t^2)^{\frac{1}{2}}\,, \tag{566}$$

otrzymamy

$$\int t^3\sqrt{t^2+1}dt = \frac{1}{5}(1+t^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\,, \tag{567}$$

skąd na reszcie

$$\int e^{4x}\sqrt{1+e^{2x}}dx = \frac{1}{5}(1+e^{2x})^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}\,. \tag{568}$$

12.3 Całkowanie innych szczególnych przypadków funkcji niewymiernych

12.3.1 Całkowanie funkcji postaci $W(x)e^{-\lambda x}$, $W(x)\sin(x)$ oraz $W(x)\cos(x)$

Gdy

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{569}$$

jest wielomianem n–tego stopnia, wówczas funkcji pierwotnej dla funkcji

$$f(x) = W(x)e^{-\lambda x} \tag{570}$$

szukamy w postaci

$$\int f(x)dx = (c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0)e^{-\lambda x} + C \tag{571}$$

gdzie współczynniki c_k spełniają układ równań liniowych

$$\begin{aligned} -\lambda c_n &= a_n \\ nc_n - \lambda c_{n-1} &= a_{n-1} \\ &\vdots \\ (k+1)c_{k+1} - \lambda c_k &= a_k \\ &\vdots \\ 2c_2 - \lambda c_1 &= a_1 \\ c_1 - \lambda c_0 &= a_0\,. \end{aligned}$$

Istotnie,

$$\begin{aligned} ((c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0)e^{-\lambda x})' = \\ (nc_n x^{n-1} + (n-1)c_{n-1}x^{n-2} + \cdots + c_1)e^{-\lambda x} - \lambda(c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0)e^{-\lambda x} = \\ ((c_1 - \lambda c_0) + (2c_2 - \lambda c_1)x + \cdots + (nc_n - \lambda c_{n-1})x^{n-1} - \lambda c_n x^n)e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

równa się $W(x)e^{-\lambda x}$ wtedy i tylko wtedy, gdy powyższy układ jest spełniony.

W szczególności, kładąc $\lambda = -i$ i biorąc część rzeczywistą i urojoną obu stron otrzymujemy jako szczególny przypadek całki

$$\int W(x)\sin(x)dx\,, \quad \int W(x)\cos(x)dx\,. \tag{572}$$

Wystarczy zastosować wzór Eulera:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)\,. \tag{573}$$

Przykład 12.9. Obliczmy całkę

$$\int \left(x^2 + x + 1\right)\sin(x)dx\,. \tag{574}$$

Zacznijmy od całki

$$\int \left(x^2 + x + 1\right)e^{ix}dx\,, \tag{575}$$

szukając funkcję pierwotną w postaci

$$F(x) = \left(c_2 x^2 + c_1 x + c_0\right)e^{ix}\,. \tag{576}$$

Z równania

$$F'(x) = \left(x^2 + x + 1\right)e^{ix} \tag{577}$$

zachodzi

$$\begin{aligned} ic_2 &= 1\,, \\ 2c_2 + ic_1 &= 1\,, \\ c_1 + ic_0 &= 1\,, \end{aligned}$$

skąd otrzymamy

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 + i\,, \\ c_1 &= 2 - i\,, \\ c_2 &= -i\,. \end{aligned}$$

Wobec tego,

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(-ix^2 + (2-i)x + (1+i)\right) e^{ix} = \\ &= \left(-ix^2 + (2-i)x + (1+i)\right) (\cos(x) + i\sin(x)) = \\ &= x^2 \sin(x) - \sin(x) + \cos(x) + x(\sin(x) + 2\cos(x)) + \\ &+ (-x^2 \cos(x) + \sin(x) + \cos(x) - x(\cos(x) - 2\sin(x)))i\,. \end{aligned}$$

Skoro

$$F'(x) = \left(x^2 + x + 1\right)\cos(x) + i\left(x^2 + x + 1\right)\sin(x)\,, \tag{578}$$

wiemy, że

$$\int \left(x^2 + x + 1\right)\sin(x)dx = -x^2\cos(x) + \sin(x) + \cos(x) - x(\cos(x) - 2\sin(x))\,. \tag{579}$$

12.3.2 Całkowanie funkcji trygonometrycznych z funkcją wykładniczą

Niech

$$S := \int e^{ax}\sin x\,, \quad C := \int e^{ax}\cos x\,. \tag{580}$$

Po jednokrotnym scałkowaniu przez części otrzymujemy układ dwóch równań

$$\begin{aligned} aS + C &= e^{ax}\sin x \\ -S + aC &= e^{ax}\cos x\,, \end{aligned}$$

który rozwiązujemy metodą algebraiczną. Inny sposób to wyznaczyć całkę

$$C + iS = \int e^{(a+i)x}dx\,, \tag{581}$$

na mocy wzoru Eulera

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)\,. \tag{582}$$

Przykład 12.10. Obliczmy całkę

$$\int e^{2x}\sin(x)dx\,. \tag{583}$$

Niech

$$S := \int e^{2x}\sin x\,, \quad C := \int e^{2x}\cos x\,. \tag{584}$$

Całkując przez części, otrzymamy

$$\begin{aligned} S = -e^{2x}\cos x + \int 2e^{2x}\cos x dx &= -e^{2x}\cos x + 2C\,, \\ C = e^{2x}\sin x + \int 2e^{2x}\sin x dx &= e^{2x}\sin x - 2S\,, \end{aligned}$$

t.j.,

$$\begin{aligned} 2S + C &= e^{2x}\sin x\,, \\ -S + 2C &= e^{2x}\cos x\,, \end{aligned}$$

skąd, raczej niespodziewanie, wynika

$$\begin{aligned} S &= e^{2x}\frac{2\sin x - \cos x}{5}\,, \\ C &= e^{2x}\frac{\sin x + 2\cos x}{5}\,. \end{aligned}$$

12.3.3 Całkowanie funkcji trygonometrycznych z wielomianami i funkcją wykładniczą

Niech

$$S_n := \int x^n e^{ax} \sin x\,, \quad C_n := \int x^n e^{ax} \cos x\,. \tag{585}$$

Najwygodniej obliczyć

$$Z_n := \int x^n e^{(a+i)x} dx\,, \tag{586}$$

a na końcu obliczyć część rzeczywistą i urojoną.

Przykład 12.11. Obliczmy całkę

$$\int x^2 e^{2x} \sin(x) dx\,. \tag{587}$$

Do tego celu, rozpatrzmy funkcję

$$f(x) = x^2 e^{(2+i)x} \tag{588}$$

i szukajmy jej funkcji pierwotnej $F(x)$ w postaci

$$F(x) = \left(c_2 x^2 + c_1 x + c_0\right) e^{(2+i)x}\,. \tag{589}$$

Z $F'(x) = f(x)$ wynika, że

$$c_1 + (2+i)c_0 = 0\,, \quad 2c_2 + (2+i)c_1 = 0\,, \quad -1 + (2+i)c_2 = 1\,. \tag{590}$$

Rozwiązawszy powyższy układ równań,

$$\begin{aligned} F(x) &= e^{(2+i)x}\left(\left(\frac{4}{5} - \frac{2i}{5}\right)x^2 - \left(\frac{12}{25} - \frac{16i}{25}\right)x + \left(\frac{8}{125} - \frac{44i}{125}\right)\right) \\ &= \frac{1}{125} e^{2x}((5x(5x-8)+22)\sin(x) + (10x(5x-3)+4)\cos(x)) + \\ &+ i\frac{1}{125} e^{2x}(2(5x-2)(5x-1)\sin(x) + (5(8-5x)x - 22)\cos(x))\,. \end{aligned}$$

Ale

$$f(x) = x^2 e^{2x}(\cos(x) + i\sin(x))\,, \tag{591}$$

skąd wynika

$$\int x^2 e^{2x} \sin(x) dx = \frac{e^{2x}(2(5x-2)(5x-1)\sin(x) + (5(8-5x)x - 22)\cos(x))}{125}\,. \tag{592}$$

12.3.4 Całkowanie przez podstawienie Eulera

Podstawienie Eulera służy do całkowania funkcji wymiernych od x i $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Mamy 3 rodzaje podstawień Eulera:

1. $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x \pm t$, kiedy $a > 0$;
2. $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} \pm tx$, kiedy $c > 0$;
3. $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-\mu)$, kiedy $ax^2+bx+c = a(x-\mu)(x-\nu)$.

> Przy "±"sami wybieramy co podstawiamy: "+"czy "−", bo i "+"i "−"prowadzą zawsze do poprawnych wyników. Otrzymane funkcje mogą nie wyglądać na takie same, ale przez to, że będą miały różne stałe całkowania będą pochodziły od tej samej funkcji pierwotnej. Podsumowując: samemu wybierz czy wolisz podstawienie z "+"czy "−"w "±"z podstawień Eulera.

Pozwolę sobie dać jakąś mnemotechnikę. Oczywiste pytanie, które każda osoba zadawałaby sobie, byłoby: „skąd pochodzą powyższe wzory"? Aby na to odpowiedzieć, wystarczy przeczytać oryginalnie notatki Pana Eulera:



§. 1.

Incipiamus a caſu ſimpliciſſimo, quo $n = 0$, et quaeramus integrale formulae $\frac{dx}{\sqrt{aa - 2bx + cxx}}$, quae poſito $x = \frac{b+z}{c}$ tranſit in hanc: $\frac{dz}{\sqrt{(aacc - bbc + czz)}}$, vbi duo caſus diſtingui conuenit, prout c fuerit vel quantitas poſitiua vel negatiua. Sit igitur primo $c = +ff$ et formula noſtra fiet $\frac{dz}{f\sqrt{(aaff - bb + zz)}}$, cuius integrale eſt $\frac{1}{f} l \frac{z + \sqrt{(aaff - bb + zz)}}{C}$, ideoque erit noſtrum integrale

$$\frac{1}{\sqrt{c}} l \frac{cx - b + \sqrt{(aacc - 2bcx + ccxx)}}{C},$$

quod ergo, ita ſumtum vt euaneſcat poſito $x = 0$, euadet

$$\frac{1}{\sqrt{c}} l \frac{cx - b + \sqrt{c(aa - 2bx + cxx)}}{-b + a\sqrt{c}}.$$

At vero ſi c fuerit quantitas negatiua, puta $c = -gg$. formula differentialis per z expreſſa erit $\frac{dz}{g\sqrt{(aagg + bb - zz)}}$

cuius integrale eſt $\frac{1}{g}$ A ſin. $\frac{z}{\sqrt{(aagg + bb)}} + C$; quare integrale ita ſumtum vt euaneſcat poſito $x = 0$ fiet

$$= \frac{1}{g} \text{A ſin.} \frac{cx - b}{\sqrt{(aagg + bb)}} + \frac{1}{g} \text{A ſin.} \frac{b}{\sqrt{(aagg + bb)}}.$$

Niestety, aby to zrobić, należy najpierw dostać doktorat w łacinie. Mniej rygorystyczne ale bardziej skuteczne podejście jest następujące: podnosząc obydwie strony powyższych wzorów do kwadratu otrzymamy, odpowiednio,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= (\sqrt{a}\, x \pm t)^2, \\ ax^2 + bx + c &= (\sqrt{c} \pm tx)^2, \\ a(x-\mu)(x-\nu) &= t^2(x-\mu)^2. \end{aligned}$$

Nie trzeba podkreślać, że, jeśli $ax^2 + bx + c$ jest kwadratem jednomianu, nic nie należy zrobić. Podstawienie Eulera służy dokładnie po to, aby rozpatrywać przypadki, kiedy $ax^2 + bx + c$ **nie jest kwadratem jednomianu**. Nie być kwadratem jednomianu znaczy dokładnie, że nie istnieje żadne t spełniające żadne z powyższych równań, **rozważanych jako równań wielomianów**! Innymi słowy,

$$\nexists t \in \mathbb{R} \text{ takiej, że } ax^2 + bx + c = (\sqrt{a}\, x \pm t)^2, \tag{593}$$

nawet jeśli

$$\forall x\, \exists t = t(x) \text{ taka, że } ax^2 + bx + c = (\sqrt{a}\, x \pm t)^2. \tag{594}$$

Nad tym dokładnie jest oparta magia: sam fakt, że $ax^2 + bx + c$ nie jest kwadratem jednomianu, pozwala nam zdefiniować nową zmienną $t = t(x)$, która ostatecznie „uprości” całkowanie. Oto sposób, aby pamiętać: traktujmy $ax^2 + bx + c$ jakby był kwadratem jednomianu, i weźmy nowy parametr t jako nową zmienną. Bardzo prawdopodobnie Euler odkrył swoje sławne podstawienia spróbowawszy zauważyć to, co było pod znakiem pierwiastku, jako kwadrat jednomianu.

Przykład 12.12. Obliczmy całkę

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} dx. \tag{595}$$

Temu przypadkowi pasują pierwsze i drugie podstawienie, które okazują się być te same:

$$x^2 - x + 1 = (x \pm t)^2. \tag{596}$$

Skoro $x^2 - x + 1$ nie ma żadnego rozwiązania, widać, że nie istnieje żadne t, takie, że (596) zachodzi dla każdego x. Ale istnieje **funkcja** $t = t(x)$, taka, że (596) zachodzi dla każdego x. Mianowicie,

$$t(x) = \pm x \pm \sqrt{x^2 - x + 1}. \tag{597}$$

Ustalmy znak plus w (596) i wyciągnijmy x z tego:

$$x = \frac{1 - t^2}{2t + 1}. \tag{598}$$

Z tego wynika:

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = -\frac{2\left(t^2+t+1\right)}{(2t+1)^2}dt \tag{599}$$

i ponadto:

$$\sqrt{x^2-x+1} = \frac{t^2+t+1}{2t+1}\,, \tag{600}$$

wobec tego, po podstawieniu, będziemy musieli całkować

$$-\frac{1}{\frac{1-t^2}{2t+1}+\frac{t^2-t+1}{2t+1}}\frac{2\left(t^2+t+1\right)}{(2t+1)^2} = -\frac{2\left(t^2+t+1\right)}{2t^2+5t+2}\,. \tag{601}$$

Rozłóżmy na ułamki proste:

$$\frac{1}{2t+1} - \frac{2}{t+2} + 1 \tag{602}$$

i scałkujmy:

$$\ln\left(\frac{(t+2)^2}{\sqrt{1+2t}}\right) - t\,. \tag{603}$$

Wróciwszy do starej zmiennej x:

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}dx = x - \sqrt{(x-1)x+1} + \log\left(\frac{\left(-x+\sqrt{(x-1)x+1}+2\right)^2}{\sqrt{-2x+2\sqrt{(x-1)x+1}+1}}\right)\,. \tag{604}$$

Przykład 12.13. Obliczmy całkę

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-x+2}}dx\,. \tag{605}$$

W tym przypadku,

$$-x^2-x+2 = -(x-1)(x+2)\,, \tag{606}$$

t.j., mamy dwa różne rozwiązania $\mu = 1$ oraz $\nu = -2$. Niech $t = t(x)$ będzie definiowany przez wzór

$$\sqrt{-x^2-x+2} = t(x-1)\,. \tag{607}$$

Z tego wynika

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sqrt{-x^2-x+2}}{x-1}\,, \\ x &= \frac{t^2-2}{t^2+1}\,. \end{aligned}$$

Łatwo widać, że

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-x+2}}dx = \int \frac{2}{1+t^2}dt = 2\,\mathrm{arctg}(t)\,, \tag{608}$$

czyli

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-x+2}}dx = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{-x^2-x+2}}{x-1}\right)\,. \tag{609}$$

12.3.5 Inne całki zawierające pierwiastki

Kiedy mamy do czynienia z całkami funkcji wymiernych od x i

$$\sqrt{\frac{Ax+B}{Cx+D}}\,, \quad AD-BC \neq 0\,, \tag{610}$$

można podstawiać

$$t = \sqrt{\frac{Ax+B}{Cx+D}}\,. \tag{611}$$

Przykład 12.14. Obliczmy całkę

$$\int \sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}}dx\,. \tag{612}$$

Najpierw podstawmy

$$u = e^x \Rightarrow dx = \frac{dx}{du}du = (\ln u)'du = \frac{du}{u}\,. \tag{613}$$

Całka stanie się

$$\int \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\frac{1}{u}du\,. \tag{614}$$

Czyli można ustalić

$$t := \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} \Rightarrow u = \frac{t^2-1}{t^2+1} \Rightarrow du = \frac{4t}{(t^2+1)^2}dt\,, \tag{615}$$

skąd wynika

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\frac{1}{u}du &= \int t\frac{1}{\frac{t^2-1}{t^2+1}}\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt \\
&= \int \frac{4t^2}{t^4-1}dt \\
&= \int \left(\frac{2}{t^2+1} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1}\right)dt \\
&= 2\,\mathrm{arctg}(t) + \ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right) \\
&= 2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}}\right) + \ln\left(\frac{1-\sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}}}{1+\sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}}}\right)\,.
\end{aligned}$$

13 Tydzień XIII: 7. i 10. stycznia 2025

13.1 Twierdzenie Podstawowe Rachunku Różniczkowego i Całkowego

W Rozdziale 11 przedstawiono kilka wskazówek tego, że **operacja odwrotna do operacji brania pochodnej wiązy się z pojęcie pola powierzchni pod wykresem funkcji** – jednak nie nadaliśmy tej intuicji kształtu twierdzenia i niego nie udowodniliśmy: sformułowaniem i dowodem takiego twierdzenia będzie temat niniejszego Rozdziału.

branie pochodnej	$\longleftrightarrow$	różniczkowanie
branie funkcji pierwotnej	$\longleftrightarrow$	całkowanie

Warto podkreślić, że przez cały poprzedni Rozdział 12 rozwinęliśmy metody określenia funkcji pierwotnych dla poszczególnych klas funkcji, które niestety – w stosunku do klasy wszystkich funkcji pod których wykresami pole powierzchni daje się obliczyć – stanowią nieznaczną mniejszość. Z bardziej praktycznej perspektywej : teoria jest potrzebna aby stawić czoła całkowaniu klasy funkcji, która jest na tyle bogata, aby obejmować, np. wszystkie funkcje, które opisują zjawiska fizyczne.

Warto także podkreślić, że główną przeszkodą do płynnego rozwinięcia teorii całek jest definicja matematyczna czegoś na pozór oczywistego – pole powierzchni figury.

13.1.1 Pole powierzchni (ze znakiem) pod wykresem funkcji

Niewątpliwie, wszechświaty różniczkowania i całkowania pokazują pewną równoległość: n.p., główna metoda różniczkowania, t.j., **wzór Leibniza** odpowiada głównej metodzie całkowanie, t.j., wzorowi **całkowania przez części**. W jakimś sensie, są jednym i tym samym, jeśli uwzględniamy fakt, że, z definicji, całkowanie to różniczkowanie na odwrót.

Czasami, pomimo wszystko, równoległość jest mniej widoczna. Zwłaszcza jeśli chodzi o interpretację geometryczną. W zdaniu

„Pochodna $f'(x)$ funkcji f w punkcie x jest współczynnikiem kierunkowym **prostej stycznej (zakładając, że istnieje)** do wykresu funkcji f w punkcje $(x, f(x))$."

które definiuje pochodną w geometryczny sposób, pojawiają się poprawnie zdefiniowane pojęcia (z formalnego punktu widzenia). Przy tym, łatwo udowodnić, że powyżej zdefiniowana $f'(x)$ odpowiada granicy

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\,, \tag{616}$$

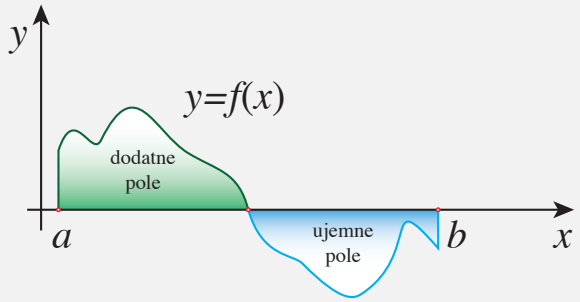
zakładając, że ona istnieje. (Wystarczy napisać równania prostych siecznych i wziąć granicę ich współczynników kierunkowych.) Równoważność między powyższymi definicjami pochodnych jest tak widoczna, że zwykle zapominamy, że są one dwiema innymi rzeczami.

Przejdźmy do równoległego wszechświata – do całkowania – i zastanówmy się, czy intuicja z Rozdziału 11, a mianowicie, że

$$F(x) := \mathrm{FIG}_a^x(f)\,, \quad a \text{ dowolna liczba z dziedziny } f\,, \tag{617}$$

jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, ma jakikolwiek sens:

„Wartość $F(b)$ funkcji pierwotnej funkcji f w punkcji b jest **polem powierzchni (ze znakami)** figury ograniczonej przez wykres funkcji f i proste pionowe przechodzące przez a i b."



Na pierwszy rzut oka: tak, wszystko brzmi dobrze. Nawet wspomniana „figura" posiada właściwą definicję. Zauważmy, że definicja (414) z Rozdziału 11, a mianowicie

$$\mathrm{FIG}_t^T(f) := \text{pole powierzchni figury ograniczonej przez: } \begin{cases} \text{wykres } f & \text{z góry} \\ \text{oś } x & \text{z dołu} \\ \text{prosta } x=t & \text{z lewej strony} \\ \text{prosta } x=T & \text{z prawej strony} \end{cases} \tag{618}$$

potrzebuje lekkiego oszlifowania, ponieważ nie zawsze wykres f jest nad osią x–ów: poprawna definicja jest dana poniżej.

Definicja 13.1. Polem powierzchni (ze znakiem) figury pod wykresem funkcji f (między a i b) *jest pole powierzchni zbioru*

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b\,,\quad \min\{0,f(x)\}\le y\le \max\{0,f(x)\}\}\,. \tag{619}$$

Oznaczamy ono symbolem $\mathrm{FIG}_a^b(f)$.

Jeszcze raz: wygląda na to, że teoria rozwia się płynnie i bez przeszkód – gdzie jest problem?

Problemem jest samo **pojęcie pola powierzchni** jakiekolwiek figury (a nie tylko tych pod wykresem funkcji): czym ono jest? czy wcale ono istnieje?

Jest to wielokrotnie trudniejsza sprawa niż definicja prostej stycznej (którą łatwo się załatwi). Faktycznie, **problem definicji pola powierzchni jest całą teorią, znaną jako teorią miary**.

13.1.2 Całkowalność w sensie Riemmana w ramach teorii miary

Dlaczego tak intuicyjne pojęcie, jakim jest pole powierzchni, powoduje tak dużo problemów? Ponieważ dla prostych figur, pole powierzchni jest „widoczne", natomiast dla bardziej złożonych należy wymyślić jakiś sposób rozszerzanie tego pojęcia – i nie zawsze tego drugiego kroku daje się wykonać. Dokładniej:

1. istnieją figury, których pole powierzchni jest widoczne: n.p., pole powierzchni **prostokąta** $[a,b]\times[c,d]$ powinno wynosić $(b-a)(d-c)$;
2. istnieją figury, których pole powierzchni wynosi zero: n.p., miara wszystkich **krzywych** powinna wynosić zero;
3. jeśli A_1 oraz A_2 są dwiema figurami z pustą wspólną częścią, to pole powierzchni$(A_1 \cup A_2)$ = pole powierzchni(A_1) + pole powierzchni(A_2);
4. jeśli **ciąg figur** $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dąży do figury A, to **ciąg liczb dodatnich** $\{$pole powierzchni$(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ powinien dążyć do pola powierzchni(A). (Przykład: ciąg wielokątów wpisanych w okrąg.)

Jeśli przypominamy sobie, jak w Rozdziale 11 doszliśmy do wniosku, że wartość $F(b)$ funkcji pierwotnej $F(x)$ funkcji $f(x)$ jest pole powierzchni figury pod wykresem f między a i b, czyli

$$F(b) = \mathrm{FIG}_a^b(f)\,, \tag{620}$$

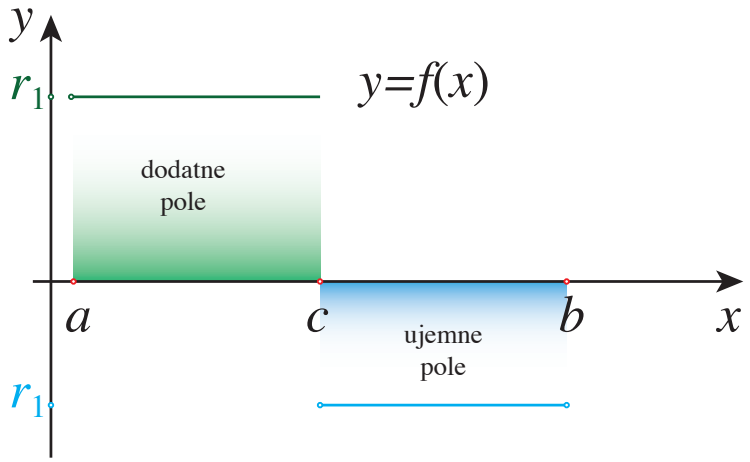
to powinniśmy zdać sobie sprawy, że (nie)świadomie **korzystaliśmy z powyższych (nieformalnych) zasad teorii miary**.

O teorii miary już nie będziemy rozmawiać. Natomiast, podajemy następującą kluczową definicję.

Definicja 13.2. *Funkcja $f:\mathcal{D}\longrightarrow\mathbb{R}$ o dziedzinie $\mathcal{D}$ **jest całkowalna w sensie Riemanna** jeśli **istnieje** pole powierzchni pod wykresem funkcji f między dowolnymi a i b w $\mathcal{D}$.*

różniczkowalność $\longleftrightarrow$ istnienie prostej stycznej
całkowalność $\longleftrightarrow$ istnienie pola powierzchni.

Aby udowodnić Twierdzenie Podstawowe Rachunku Różniczkowego i Całkowego **wystarczy pokazać, że każda funkcja ciągła jest całkowalna** w sensie Riemanna (nadchodzące Twierdzenie 13.2). Niemniej jednak warto zauważyć, że **klasa funkcji całkowalnych jest znacznie szersza niż klasa funkcji ciągłych**: typowym przykładem funkcji nie ciągłej ale całkowalnej w sensie Riemanna jest funkcja schodkowa. Na przykład, pole powierzchni $\mathrm{FIG}_a^b(f)$ (ze znakiem) figury



jest różnicą między polami powierzchni zielonego prostokąta a niebieskiego.

UWAGA!!!
Dopiero po upewnieniu się o różniczkowalności funkcji $f(x)$ możemy podjąć zadanie określenia wartości pochodnej $f'(x)$. Podobnie, **tylko jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna, to można mówić o jej całce**.

Definicja 13.3. *Jeśli $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna i $a, b \in \mathcal{D}$, to liczba*

$$\int_a^b f(x)dx := FIG_a^b(f) \tag{621}$$

nazywa się całką w sensie Riemanna *funkcji f między a i b.*

UWAGA!!!

Warto porównać definicję (621) całki Riemmana z definicją całki według Newtona (454), czyli:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)\,.$$

Fakt, że w lewych stronach **znajduje się ten sam symbol** łatwo doprowadza do niezrozumienia: całka Newtona funkcji f **opiera się na istnieniu** funkcji pierwotnej F, podczas gdy całka Riemanna **pozwala zdefiniować** funkcję pierwotną.

Teoria miary urodziła się z odkrycia, że są figury bez pola powierzchni, patrz Przykład 11.1. Tak naprawdę, figura rozpatrywana w powyższym przykładzie jest figura pod wykresem pewnej funkcji, która wtedy nie może być całkowalna w sensie Riemanna, zgodnie z Definicji 13.2. Jest ona funkcją Dirichleta:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}\,. \end{cases} \tag{622}$$

W jakim sensie, dla powyższej funkcji Dirichleta, zdefiniowanej, powiedzmy, na $[0,1]$, pole powierzchni (ze znakiem) $\mathrm{FIG}_0^1(f)$ „nie istnieje”? W sensie, że liczbę $\mathrm{FIG}_0^1(f)$ nie możemy zdefiniować w żaden sposób, który jest **zgodny z powyższymi zasadami teorii miary**. Aby to pokazać, będziemy potrzebowali bardziej formalnej (więc dłuższej) definicji.

Z grubsza mówiąc, zdefiniowanie pola powierzchni $\mathrm{FIG}_0^1(f)$ prowadzi do „paradoksu zebry”: czy zebra jest biała w czarne paski, czy czarna w białe paski? Wyobraźmy sobie, że musimy skonstruować kratę dla więzienia, o miarach 1×1, taką, że, nad każdym punkcie podstawy odpowiadającym liczbie wymiernie, znajduje się pionowy pręt o grubości 0. Wówczas, jeśli zaczynamy od pustej ramy, otrzymamy kratę przez którą przechodzi 100% światła; jeśli zaczynamy od stalowego (pełnego) kwadratu i obetniemy niepotrzebny stal, otrzymamy kratę przez którą przechodzi 0% światła. Oto sprzeczność.















13.1.3 Całkowalność w sensie Riemanna bez teorii miary

Zechcemy przeformułować Definicję 13.2 zastępując „filozoficzne” pojęcie istnienia pola powierzchni bardziej „praktycznym” pojęciem, tj. pojęciem, które daje się używać w praktyce. W tym celu, trzeba wprowadzić parę gadżetów.

Definicja 13.4. *Dla każdego przedziału* $[a,b]$*, jego* podział P *jest skończonym zbiorem punktów* $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$*, gdzie*

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b\,. \tag{623}$$

Będziemy pisać

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{624}$$

Niech teraz $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną (nie koniecznie ciągłą). Każdemu podziałowi P przyporządkujemy liczby

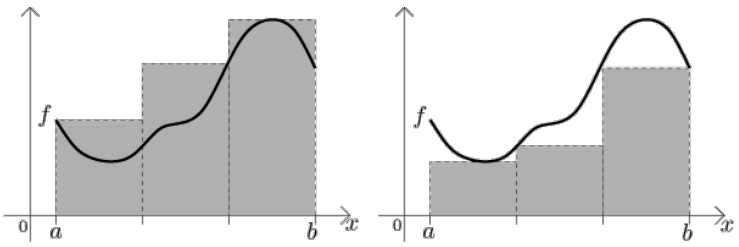
$$\begin{aligned} M_i &:= \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}\,, \\ m_i &:= \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}\,. \end{aligned}$$

Funkcje schodkowe

$$\begin{aligned} h_P(x) &:= M_i \text{ jeśli } x \in [x_{i-1}, x_i[\,, \\ g_P(x) &:= m_i \text{ jeśli } x \in [x_{i-1}, x_i[\,, \end{aligned}$$

spełniają nierówności

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)\,, \quad \forall x \in [a,b]\,. \tag{625}$$



Posługując się powyższym małym przedsmakiem teorii miary, można stwierdzić, że figury pod wykresami funkcji h_P oraz g_P między a i b, będącymi sumami prostokątów, posiadają pole powierzchni. W związku z tym, definicja 13.3 ma sens i można nawet obliczyć obie całki w sensie Riemanna

$$\begin{aligned} \int_a^b h_P(x)dx &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i\,, \\ \int_a^b g_P(x)dx &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i\,. \end{aligned}$$

Zauważmy, że, dla każdego podziału P, figura $\mathrm{FIG}_a^b(g_P)$ zawiera się w figurze $\mathrm{FIG}_a^b(f)$, która z kolej zawiera się w figurze $\mathrm{FIG}_a^b(h_P)$. Wobec tego, pole powierzchni (ze znakiem) figury pod wykresem funkcji f między a i b, **zakładając że istnieje**, musi spełniać nierówność

$$\int_a^b g_P(x)dx \leq \text{pole powierzchni (ze znakiem) } \mathrm{FIG}_a^b(f) \leq \int_a^b h_P(x)dx\,. \tag{626}$$

Już zaobserwowaliśmy, że, z teoretycznego punktu widzenia, pole powierzchni $\mathrm{FIG}_a^b(f)$ nie musi istnieć.

Nierówności (626) łapią genialną ideę Riemanna: „zmusić” $\mathrm{FIG}_a^b(f)$ do istnienia za pomocą Twierdzenia o trzech ciągach.

Inaczej mówiąc, trzeba pokazać, że liczba $\mathrm{FIG}_a^b(f)$ musi istnieć, ponieważ daje się ona przybliżać przez liczby będące polami powierzchni elementarnych figur (prostokątów). Zaobserwujmy, że najwyższa i najmniejsza liczba w (626) zależą od P. Intuicja sugeruje, że, im gęstszy podział P tym mniejsza będzie różnica między figurami pod wykresami g_P a h_P między a i b. Ale nie wiadomo, czy różnica między ich polami powierzchni dąży do zero. To w rzeczywistości stanowi wyjątek: funkcje dla których to zachodzi są właśnie te całkowalne w sensie Riemanna.

Można wtedy przeformułować obie Definicje 13.3–13.2 jedną deficjencją, w której **już nie pojawi się pojęcie pola powierzchni**:

Definicja 13.5. *Funkcja ograniczona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest* całkowalna w sensie Riemanna *między a i b wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sup_{P \text{ podział przedziału } [a,b]} \int_a^b g_P(x)dx = \inf_{P \text{ podział przedziału } [a,b]} \int_a^b h_P(x)dx\,. \tag{627}$$

Wspólną wartość powyższych wielkości będziemy oznaczali

$$\int_a^b f(x)dx\,. \tag{628}$$

Przykład 13.1. Funkcja Dirichleta na $[0,1]$ nie jest całkowalna w sensie Riemanna ponieważ prawa strona (627) wynosi 1 natomiast lewa strona wynosi 0.

13.1.4 Sformułowanie Twierdzenia Podstawowego Rachunku Różniczkowego i Całkowego

Przypomnijmy po raz ostatni definicję całki Newtona (454):

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,, \quad \text{gdzie } F \text{ jest funkcją taką, że } F'(x) = f\,. \tag{629}$$

W definicji (629) kryje się pytanie: „skąd się bierze funkcja pierwotna $F(x)$?" Twierdzenie Podstawowe Rachunku Różniczkowego i Całkowego właśnie odpowiada na to pytanie, w przypadku ciągłej funkcji $f(x)$.

Twierdzenie 13.1 (Twierdzenie Podstawowe Rachunku Różniczkowego i Całkowego, **•• Zadanie egzaminacyjne nr. 17**)**.** *Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas f jest całkowalna w sensie Riemanna między a i dowolnym $x \in [a,b]$:*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt\,, \quad x \in [a,b]\,. \tag{630}$$

Okazuję się, że funkcja F jest klasy $\mathcal{C}^1$ na $[a,b]$ i ponadto

$$F'(x) = f(x)\,, \quad x \in [a,b]\,. \tag{631}$$

Dowód Twierdzenia 13.1 zajmie resztę Rozdziału; załóżmy jednak, że udało nam się go udowodnić: wtedy można wpisać całkę Riemmana (niebieską) w definicji całki Newtona (629) (cerwonej):

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx\,, \tag{632}$$

ponieważ (z teorii miary) pole powierzchni prostokąta o podstawie zerowej wynosi 0 – innymi słowy całka Newtona równa się całce Riemanna.

UWAGA!!!
Póki nie udowodnimy Twierdzenia 13.1, **nie można założyć, że każda funkcja ciągła posiada funkcję pierwotną**, bo inaczej dojdzie się do pętli logicznej.

of

13.1.5 Pierwsza części dowodu Twierdzenia Podstawowego

Twierdzenie 13.2 (**••• Zadanie egzaminacyjne nr. 18**)**.** *Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to f jest całkowalna w sensie Riemmana.*

Dowód. Według definicji, musimy udowodnić, że

$$\sup_{P \text{ podział przedziału } [a,b]} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \inf_{P \text{ podział przedziału } [a,b]} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \,. \tag{633}$$

Innymi słowy, powinniśmy sprawdzić, że, dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje podział P przedziału $[a, b]$ taki, że

$$\left| \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \right| < \epsilon \,. \tag{634}$$

Skoro

$$\left| \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \right| = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i \,, \tag{635}$$

wystarczy znaleźć odpowiedni podział P taki, że

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i < \epsilon \,. \tag{636}$$

Do tego celu, należy pamiętać że, z faktu, że f jest ciągła na $[a, b]$ i $[a, b]$ jest domknięty, zachodzi fakt, że f jest jednostajnie ciągła na $[a, b]$.

Zaobserwujmy, że, będąc f ciągła,

$$M_i - m_i = \max\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in [x_{i-1}, x_i]\} \,, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \,. \tag{637}$$

Pamiętajmy, że f jednostajnie ciągła na $[a, b]$ znaczy, że odległość

$$|f(x) - f(y)| \tag{638}$$

może być dowolnie mała, o ile tylko odległość $|x - y|$ jest wystarczająco mała. Bardziej formalnie, dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon \,. \tag{639}$$

Wtedy, weźmy sobie podział P taki, że każdy Δx_i jest mniejszy od δ. Wówczas

$$M_i - m_i < \epsilon \,, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \,. \tag{640}$$

Z tego wynika, że

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} \epsilon \Delta x_i = \epsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \epsilon (b - a) \,, \tag{641}$$

t.j., „prawie" to, co chcielibyśmy. Ale łatwo to poprawić: zamiast dokładnie tego ϵ, weźmy sobie $\frac{\epsilon}{b-a}$. Wtedy będzie istnieć **odpowiednia delta (inna niż wcześniejsza)** taka, że

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b - a} \,. \tag{642}$$

Teraz wszystko działa. □

13.1.6 Strategia zakończenia dowodu Twierdzenia Podstawowego

Wróćmy do dowodu Twierdzenia 13.1: teraz wiemy, że funkcja (630) jest poprawnie zdefiniowana. Pozostało do udowodnienia, że pochodna funkcji F równa się podanej funkcji f. Postarajmy domyśleć się, czego będziemy potrzebowali. Aby obliczyć pochodną funkcji F musimy rozważyć iloraz różniczkowy

$$\frac{F(x + \epsilon) - F(x)}{\epsilon} \,. \tag{643}$$

Oczekiwalibyśmy, że

$$\frac{F(x + \epsilon) - F(x)}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \left(\int_a^{x+\epsilon} f(t) dt - \int_a^{x} f(t) dt \right) = \frac{1}{\epsilon} \int_x^{x+\epsilon} f(t) dt \,, \tag{644}$$

ale, aby wykonać taki krok, najpierw powinniśmy sprawdzić, że zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 13.3 (• • • **Zadanie egzaminacyjne nr. 19**). *Jeśli* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest całkowalna w sensie Riemmana i* $c \in]a, b[$*, to*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,. \tag{645}$$

Potem potrzebowalibyśmy wzoru „średni całkowej", dzięki któremu wiedzielibyśmy, że istnieje ξ między x i $x + \epsilon$ taki, że

$$\int_x^{x+\epsilon} f(t)dt = \epsilon \cdot f(\xi)\,. \tag{646}$$

To jest gwarantowane przez następujące twierdzenie.

Twierdzenie 13.4 (•• **Zadanie egzaminacyjne nr. 20**). *Jeśli* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest ciągła, to istnieje* ξ *między* a *i* b *taki, że*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)\,. \tag{647}$$

Zauważmy, że treści powyższych twierdzeń są identyczne treściom analogicznych wcześniejszych podanych twierdzeń: tylko definicja całki jest zupełna inna (niż dotąd).

Jeśli udowodnimy obydwa Twierdzenia 13.3 oraz 13.4, to zachodzi też Twierdzenie 13.1. Istotnie,

$$\frac{1}{\epsilon}\int_x^{x+\epsilon} f(t)dt = \frac{1}{\epsilon}\cdot\epsilon\cdot f(\xi) = f(\xi) \longrightarrow f(x)\,, \tag{648}$$

kiedy ϵ dąży do zera.

13.1.7 Druga część dowodu Twierdzenia Podstawowego

Dowód Twierdzenia 13.3. Wystarczy zaobserwować, że w Definicji 13.5 całki Riemanna można rozważyć tylko podziały

$$P: \quad a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\,, \tag{649}$$

gdzie jeden element, powiedzmy $x_{n'}$, dla $0 < n' < n$, równa się c. Istotnie, jeśli P **nie zawiera** c, to mimo tego musi istnieć i taki, że $c \in]x_{i-1}, x_i[$, w związku z tym można konstruować tak zwane zagęszczenie P' podziału P, dodając wyraz c między x_{i-1} i x_i. Wówczas, równość (627) zachodzi jeśli sup i inf są obliczone dla wszystkich podziałów wtedy i tylko wtedy, gdy równość (627) zachodzi jeśli sup i inf są obliczone dla wszystkich podziałów zawierających c (dodatkowe wyjaśnienie zostanie podane w dowodzie Twierdzenia 13.6). Istotnie,

$$\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \geq \sum_{i=1}^{n+1} M'_i\Delta x'_i \tag{650}$$

i

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n+1} m'_i\Delta x'_i\,, \tag{651}$$

gdzie symbole z primem odnoszą do podziału P'. Z (651) wynika

$$\sup_{P\text{ podział}} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \leq \sup_{P\text{ podział zawierający }c} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i\,, \tag{652}$$

ale

$$\sup_{P\text{ podział}} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \geq \sup_{P\text{ podział zawierający }c} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i\,, \tag{653}$$

ponieważ podziały zawierające c są w szczególności podziałami, w związku z tym są te same. Analogiczny wynik pochodzi z (650). Wówczas

$$\sup_{P\text{ podział zawierający }c} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = \inf_{P\text{ podział zawierający }c} \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i\,. \tag{654}$$

Teraz każdą sumę $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ można podzielić w dwa części:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n'} M_i \Delta x_i + \sum_{i=n'+1}^{n} M_i \Delta x_i \,, \tag{655}$$

gdzie $x_0, \ldots, x_{n'} = c$ jest podziałem przedziału $[a, c]$ i $x_{n'}, \ldots, x_n = b$ jest podziałem przedziału $[c, b]$.

Widać, że każda suma w prawiej strony (655) musi posiadać inf i, analogicznie, musi istnieć sup każdej sumy po prawej stronie

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n'} m_i \Delta x_i + \sum_{i=n'+1}^{n} m_i \Delta x_i \,. \tag{656}$$

Innymi słowy, istnieją obydwie całki

$$\int_a^c f(x)dx \,, \quad \int_c^b f(x)dx \,. \tag{657}$$

(Jeśli mamy równość $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ i wiemy, że $a_1 \leq a_2$ oraz $b_1 \leq b_2$, to koniecznie $a_1 = a_2$ oraz $b_1 = b_2$, ponieważ wystarczy, że tylko jedna nierówność jest ścisła, żeby pierwotna równość nie zachodziła.) Wówczas

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i &\geq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \,, \\ \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i &\leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \,, \end{aligned}$$

skąd wynika

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{658}$$

a potem nasza równość. □

13.1.8 Trzecia i ostatnia część dowodu Twierdzenia Podstawowego

Twierdzenie 13.5. *Każda funkcja ciągła $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ przybiera wszystkie wartości między m i M, gdzie*

$$\begin{aligned} m &:= \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \,, \\ M &:= \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \,. \end{aligned}$$

Dowód. Ku sprzeczności, załóżmy, że istnieje $y_0 \in]m, M[$ taki, że, dla żadnego $x \in [a, b]$ nie zachodzi $f(x) = y_0$. Niech $P := \{x \in [a, b] | f(x) < y_0\}$. Skoro $P \neq \emptyset$, istnieje

$$x_0 := \sup P \,. \tag{659}$$

Sprzecznością będzie fakt, że $f(x_0) = y_0$. To istotnie zachodzi z ciagłości funkcji f w x_0: dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon \tag{660}$$

o ile tylko

$$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\,. \tag{661}$$

Z definicji supremum, $x_0 - \delta$ nie jest ograniczeniem górnym, wobec tego istnieje $x' \in]x_0 - \delta, x_0[$ taki, że $x' \in P$, tzn.

$$f(x_0) - \epsilon < f(x') \leq y_0 \,. \tag{662}$$

Niech $x'' \in]x_0, x_0 + \delta[$: oczywiście $x'' \notin P$, skąd wynika

$$f(x_0) + \epsilon > f(x'') \geq y_0 \,. \tag{663}$$

Podsumowując,

$$f(x_0) + \epsilon > y_0 > f(x_0) - \epsilon \,, \tag{664}$$

skąd wynika $f(x_0) = y_0$. □

Dowód Twierdzenia 13.4. Dla każdego podziału P, zachodzi

$$\begin{aligned} M_i &= \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq M\,, \\ m_i &= \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \geq m\,. \end{aligned}$$

W związku z tym,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i &\leq \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i = M(b-a)\,, \\ \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i &\geq \sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i = m(b-a)\,, \end{aligned}$$

z czego wynika

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)\,. \tag{665}$$

Innymi słowy,

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M\,, \tag{666}$$

i na mocy Twierdzenia 13.5 wiemy, że istnieje $\xi \in]a,b[$ takie, że

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\,, \tag{667}$$

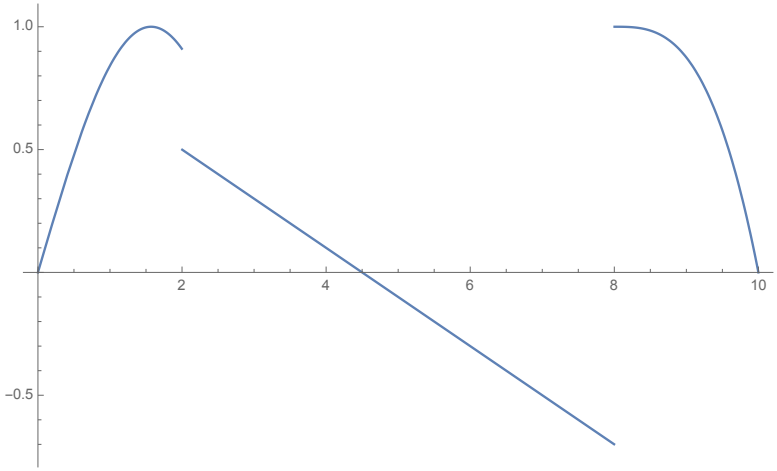
tak, jak chcieliśmy. □

13.1.9 Przykład nieciągłej funkcji całkowalnej w sensie Riemanna

Ostatnim wysiłkiem Herkulesa, jeśli chodzi o całkowanie w sensie Riemana, będzie sprawdzenie faktu, że istnieje w rzeczywistości sporo funkcji całkowalnych w sensie Riemana, oprócz funkcji ciągłych. Innymi słowy, że wprowadzenie tego nowego pojęcia całki naprawdę rozszerzyło klasę funkcji całkowalnych.

Twierdzenie 13.6. *Niech f będzie funkcją ograniczoną i mającą tylko skończoną ilość punktów nieciągłości na przedziale $[a,b]$. Wówczas f jest całkowalna w sensie Riemana.*

Dowód. Sercem dowodu jest jeszcze raz pojęcie zagęszczenia podziału. Można pracować na przykładzie. Niech $f : [0,10] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją której wykres wydać poniżej:

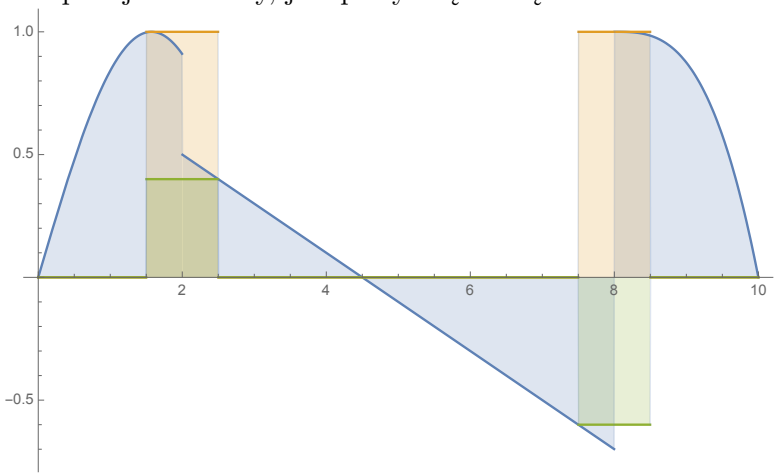


Mamy dwie nieciągłości: w punkcje 2 oraz 8. Intuicja sugeruje, że całka f od 0 do 10 istnieje, i wynosi dokładnie

$$I := \int_0^2 f(x)dx + \int_2^8 f(x)dx + \int_8^{10} f(x)dx\,. \tag{668}$$

Istotnie, już wiemy, że każda osobna powyższa całka istnieje, ponieważ f jest ciągła na każdym przedziale $[0,2]$, $[2,8]$ oraz $[8,10]$, odpowiednio.

Intuicja jest dobra ale potrzebujemy solidnego matematycznego wsparcia dla niej. Mianowicie, dla każdego podziału P przedziału $[0, 10]$, powinniśmy rozważyć obydwie funkcje $g_P(x)$ oraz $h_P(x)$ i sprawdzić, że pola powierzchni odpowiadających figur $\mathrm{FIG}_0^{10}(g_P)$ oraz $\mathrm{FIG}_0^{10}(h_P)$ dążą do tej samej liczby, która, jak trafnie podejrzewaliśmy, jest powyższą liczbą I.



Niech

$$\mathcal{P} := \{P \mid P \text{ podział przedziału } [0, 10]\} \tag{669}$$

i rozważmy następujący podzbiór zbioru $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}' := \{P \in \mathcal{P} \mid P \text{ zawiera punkty nieciągłości, tzn. 2 i 8}\}\,. \tag{670}$$

Powinniśmy sprawdzić, że

$$\inf\{\text{pól powierzchni figury } \mathrm{FIG}_0^{10}(h_P) \mid P \in \mathcal{P}\} \tag{671}$$

równa się

$$\sup\{\text{pól powierzchni figury } \mathrm{FIG}_0^{10}(g_P) \mid P \in \mathcal{P}\}\,, \tag{672}$$

i obydwie te liczby równają się I.

Sztuka jest następująca: skoro $\mathcal{P}'$ zawiera się w $\mathcal{P}$, mamy

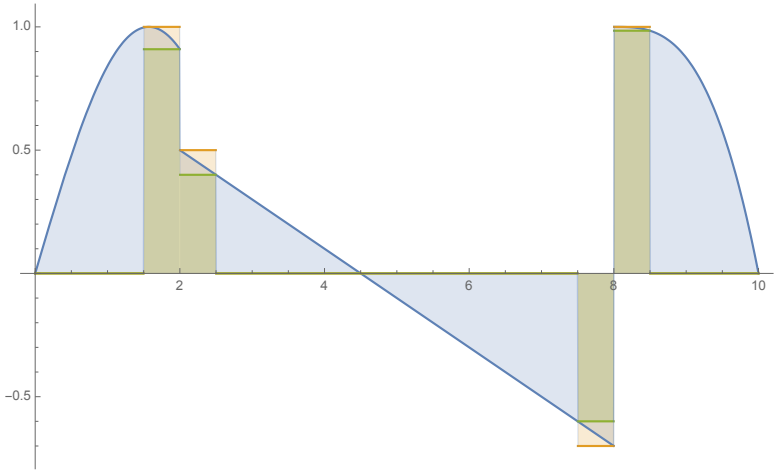
$$\inf\{\text{pól powierzchni figury } \mathrm{FIG}_0^{10}(h_P) \mid P \in \mathcal{P}\} \leq \inf\{\text{pól powierzchni figury } \mathrm{FIG}_0^{10}(h_P) \mid P \in \mathcal{P}'\}$$

oraz

$$\sup\{\text{pól powierzchni figury } \mathrm{FIG}_0^{10}(g_P) \mid P \in \mathcal{P}\} \geq \sup\{\text{pól powierzchni figury } \mathrm{FIG}_0^{10}(g_P) \mid P \in \mathcal{P}'\}\,.$$

Morał: jeśli powiększymy zbiór, to najmniejsza liczba powiększonego zbioru może być mniejsza niż najmniejsza liczba początkowego zbioru; i największa liczba może być większa.

Ponadto, jak poniższy rysunek pokazuje,



jeśli podział P nie zawiera punktów nieciągłości, to pole powierzchni figury $\mathrm{FIG}_0^{10}(h_P)$ jest zawsze większe lub równe polowi powierzchni figury $\mathrm{FIG}_0^{10}(h_{P'})$, gdzie P' zawiera punkty nieciągłości, t.j. jest elementem zbioru $\mathcal{P}'$ (czytelnik musi pamiętać, że dla ujemnych wartości funkcji, pola mają znak).

Symetrycznie, jeśli podział P nie zawiera punktów nieciągłości, to pole powierzchni figury $\mathrm{FIG}_0^{10}(g_P)$ jest zawsze mniejsze lub równe polowi powierzchni figury $\mathrm{FIG}_0^{10}(g_{P'})$, gdzie P' zawiera punkty nieciągłości, t.j. jest elementem zbioru $\mathcal{P}'$.

Wówczas

$$\inf\{\text{pól powierzchni figury } \mathrm{FIG}_0^{10}(h_P) \mid P \in \mathcal{P}\} = \inf\{\text{pól powierzchni figury } \mathrm{FIG}_0^{10}(h_P) \mid P \in \mathcal{P}'\}\,,$$
$$\sup\{\text{pól powierzchni figury } \mathrm{FIG}_0^{10}(g_P) \mid P \in \mathcal{P}\} = \sup\{\text{pól powierzchni figury } \mathrm{FIG}_0^{10}(g_P) \mid P \in \mathcal{P}'\}\,.$$

Wystarczy teraz zaobserwować, że

$$\inf\{\text{pól powierzchni figury } \mathrm{FIG}_0^{10}(h_P) \mid P \in \mathcal{P}'\} \leq I \tag{673}$$

oraz

$$\sup\{\text{pól powierzchni figury } \mathrm{FIG}_0^{10}(g_P) \mid P \in \mathcal{P}'\} \geq I\,. \tag{674}$$

□

13.1.10 Zastosowanie całki Riemanna: Wzór Wallisa na π

W 1655 roku angielski matematyk John Wallis (1616–1703), profesor Uniwersytetu w Oksfordzie i twórca symbolu „∞”, udowodnił znany wzór na liczbę π.

Twierdzenie 13.7 (wzór Wallisa)**.**

$$\frac{\pi}{2} = \underbrace{\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}}_{n=1}\cdot\underbrace{\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}}_{n=2}\cdot\underbrace{\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}}_{n=3}\cdot\ldots = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}\,. \tag{675}$$

Dowód. Oznaczmy

$$I_n := \int_0^{\pi}\sin^n(x) \tag{676}$$

i scałkujmy przez części:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi}\sin^n(x)\\
&= (\sin^{n-1}(x))(-\cos(x))\big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos(x))(\sin^{n-1}(x))'dx\\
&= 0 - \int_0^{\pi}(-\cos(x))(n-1)(\sin^{n-2}(x))\cos(x)dx\\
&= (n-1)\int_0^{\pi}\cos^2(x)\sin^{n-2}(x)dx\\
&= (n-1)\int_0^{\pi}(1-\sin^2(x))\sin^{n-2}(x)dx\\
&= (n-1)\int_0^{\pi}\sin^{n-2}(x)dx - (n-1)\int_0^{\pi}\sin^n(x)dx\\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n\,,
\end{aligned}$$

skąd wynika

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}\,. \tag{677}$$

Skoro

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^{\pi}dt = \pi\,,\\
I_1 &= \int_0^{\pi}\sin(t)dt = -\cos(t)\big|_0^{\pi} = +1-(-1) = 2\,,
\end{aligned}$$

mamy

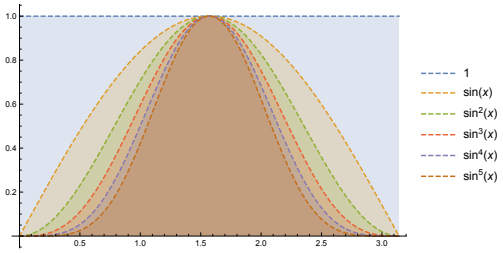
$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} \\ &= \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} \\ &= \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-5}{2n-4} I_{2n-6} \\ &\vdots \\ &= \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2} I_0 \\ &= \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \cdot \pi \,. \end{aligned}$$

i podobnie

$$I_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \cdot 2 \,. \tag{678}$$

Zaobserwujmy, że, skoro $\sin(x) \in [0,1]$ dla każdego $x \in [0,\pi]$, mamy do czynienia z nierosnącym ciągiem:

$$I_{2n-1} \geq I_{2n} \geq I_{2n+1} \tag{679}$$



Uwaga Wallisa była następująca: pomyślmy o liczbie π jako polu powierzchni I_0 prostokąta $[0,\pi]\times[0,1]$ i zaobserwujmy, że pole powierzchni I_1 figury $\mathrm{FIG}_0^{\pi}(\sin(x))$ wynosi 2. Wówczas można rozpatrywać $\frac{\pi}{2}$ jako *iloraz pól powierzchni*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{I_0}{I_1} \,. \tag{680}$$

Dlaczego taki punkt widzenia będzie wygrywający? Ponieważ, całkując przez części, można wyrazić $\frac{I_0}{I_1}$ przez kolejny ilorazy $\frac{I_1}{I_2}$, $\frac{I_2}{I_3}$, itd.,

$$\tfrac{I_0}{I_1} = a_1 \tfrac{I_1}{I_2} = a_1 a_2 \tfrac{I_2}{I_3} = a_1 a_2 \cdots a_k \tfrac{I_k}{I_{k+1}} = \dots \,, \tag{681}$$

i okazuje się, że, dla dostatecznie dużych n, iloraz $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ zbliża się do 1.

Mianowicie, podzieliwszy (679) przez I_{2n+1}, otrzymamy

$$\frac{2n+1}{2n} = \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} \geq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \geq 1 \,, \tag{682}$$

skąd wynika

$$\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1 \,. \tag{683}$$

Na mocy twierdzenia o trzech ciągłach,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1 \,. \tag{684}$$

Ale

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \cdot 2}{\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \cdot \pi} = \frac{2}{\pi} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} \,, \tag{685}$$

tj.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}\,, \tag{686}$$

więc

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}\,, \tag{687}$$

tak, jak chcieliśmy. □

Przykład 13.2. Pierwsze 10 wyrazów:

$$\frac{8}{3}, \frac{128}{45}, \frac{512}{175}, \frac{32768}{11025}, \frac{131072}{43659}, \frac{2097152}{693693}, \frac{8388608}{2760615}, \frac{2147483648}{703956825}, \frac{8589934592}{2807136475}, \frac{137438953472}{44801898141}$$

odpowiadają liczbom przybliżającym π:

$$2.66667, 2.84444, 2.92571, 2.97215, 3.00218, 3.02317, 3.03867, 3.05059, 3.06003, 3.0677\,.$$

Aby dostać rozsądne przybliżenie liczby π należy rozważyć milionów wyrazów: liczby

$$3.0677, 3.13379, 3.14081, 3.14151, 3.14158, 3.14159 \tag{688}$$

odpowiadają pierwszym 10, 100, 1000, 10.000, 100.000 oraz 1.0000.000 wyrazów. Błąd ostatniego przybliżenia wynosi $7.853976726757139 \times 10^{-7}$.

13.1.11 Zastosowanie całki Riemanna: Wzór Stirlinga na $\ln(n!)$

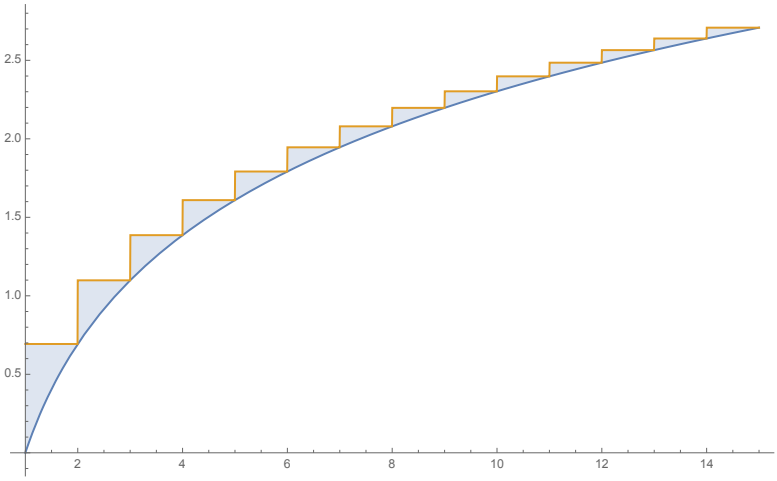
Twierdzenie 13.8 (Przybliżenie Stirlinga liczb $\ln(n!)$ (ok. 1730))**.** *Zachodzą nierówności*

$$n\ln(n) > \ln(n!) > n\ln(n) - n\,. \tag{689}$$

Dowód. Zaobserwujmy, że, dzięki definicji całki Riemana,

$$\begin{aligned}
\ln(n!) &= \ln(1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n) \\
&= \ln(1) + \ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n-1) + \ln(n) \\
&= 0 + \ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n-1) + \ln(n) \\
&= \sum_{i=2}^{n} \ln(i) \\
&= \sum_{i=2}^{n} \ln(i) \cdot (i - (i-1)) \\
&= \int_1^n \ln(x)dx + \rho_n \\
&= (x\ln(x) - x)|_1^n + \rho_n \\
&= n\ln(n) - n - (1\ln(1) - 1) + \rho_n \\
&= n\ln(n) - n + 1 + \rho_n\,.
\end{aligned}$$

W szczególności, skoro wykres funkcji $\ln(x)$ leży pod wykresem funkcji schodkowej, błąd ρ_n jest dodatni (namalowana powierzchnia powyższego rysunku).



W związku z tym,

$$\ln(n!) \geq n\ln(n) - n + 1 > n\ln(n) - n\,. \tag{690}$$

Najtrudniejsza nierówność jest udowodniona.

Skoro widocznie

$$n^n > n!\,, \tag{691}$$

biorąc logarytmy obydwóch stroń, otrzymamy drugą nierówność:

$$n\ln(n) > \ln(n!)\,. \tag{692}$$

□

Wniosek 13.1 (Stopień nieskończoności $\ln(n!)$)**.** *Ciąg* $\ln(n!)$ *zachowuję się jak* $n\ln(n)$*, w sensie, że*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{n\ln(n)} = 1 \tag{693}$$

Dowód. Wystarczy podzielić (689) przez $n\ln(n)$:

$$1 = \frac{n\ln(n)}{n\ln(n)} > \frac{\ln(n!)}{n\ln(n)} > \frac{n\ln(n) - n}{n\ln(n)} = 1 - \frac{1}{\ln(n)} \tag{694}$$

i przejść do granicy dla $n \to \infty$. □

Uwaga 13.1. Stosując funkcję wykładniczą do nierówności (689) otrzymamy

$$n^n > n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n\,. \tag{695}$$

Ale z (695) **nie wynika**, że $n!$ zachowuję się jak $\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Istotnie, po podzieleniu (695) przez $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ otrzymamy

$$e^n > \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n} > 1 \tag{696}$$

i e^n nie dąży do 1. Takie zjawisko stanowi przykład faktu, że dobre przybliżenie w poziomie logarytmów nie koniecznie odpowiada dobremu przybliżeniu w poziomie bez logarytmów. Po wprowadzeniu pojęcia całki niewłaściwej, będziemy omawiali sposób otrzymania lepszego przybliżenia liczb $n!$.

14 Tydzień XIV: 14. i 17. stycznia 2025

14.1 Całki niewłaściwe

14.1.1 Czy nieograniczona figura może mieć skończone pole powierzchni?

Pamiętajmy, że

$$\text{pole powierzchni (figury)} = \begin{cases} \text{instieje i jest} & < \infty\,, \\ \text{„istnieje” i wynosi} & \infty\,, \\ \text{nie istnieje.} & \end{cases} \tag{697}$$

Już widzieliśmy, że, jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to pole powierzchni $\mathrm{FIG}_a^b(f)$ (ograniczonej) figury pod wykresem f istnieje i jest skończone. Wynosi ono dokładnie

$$\int_a^b f(x)dx \tag{698}$$

i nazywa się **całką (w sensie Riemana) funkcji f na przedziale $[a, b]$.**

Załóżmy, że $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą. Nawet w tym przypadku, można rozważyć **nieograniczoną figurę**

$$A := \{(x, y) \mid a \leq x\,, \quad \min\{0, f(x)\} \leq y \leq \max\{0, f(x)\}\}\,, \tag{699}$$

pod wykresem f.

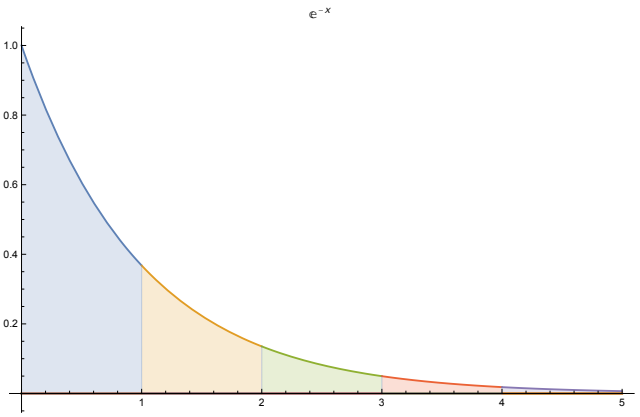
Na przykład, niech $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ będzie funkcją $f(x) = e^{-x}$. Ponieważ istnieją coraz większe pola powierzchni

$$\mathrm{FIG}_0^n(f)\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,, \tag{700}$$

dążące do $\mathrm{FIG}_a^\infty(f)$, widać, że pole powierzchni granicznej figury A **na pewno istnieje**. Czyli trzecia możliwość z powyższego schematu jest wykluczona. Pozostał nam problem: skąd wiemy, że pole powierzchni

$$\mathrm{FIG}_a^\infty(f) := \text{pole powierzchni } A = \lim_{n\to\infty} \mathrm{FIG}_0^n(f)$$

jest skończone? Innymi słowy, skąd wiemy, że sumując pola powierzchni wszystkich poniższych kolorowych figur, dostajemy skończoną liczbę?



Powtórzmy po raz ostatni, że figura pod wykresem funkcji f jest **podzbiorem** zbioru $\mathbb{R}^2$. **Fakt, że ten zbiór nie jest ograniczony nie wyklucza możliwości, że jego pole powierzchni może być skończone**. Sednem sprawy jest wyróżnienie przypadków kiedy jest skończone od przypadków kiedy jest nieskończone.

Zauważmy, że pojęcie „sumy nieskończenie wielu składników" jest jeszcze czymś nieznanym; będzie wyjaśnione w następnym tygodniu.

14.1.2 Definicja całki niewłaściwej

Definicja 14.1. *Niech $f : P \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, gdzie przedział P może być postaci $[a, b[$, ewentualnie z $b = \infty$, lub $]a, b]$, ewentualnie z $a = -\infty$, lub $]a, b[$, ewentualnie z $a = -\infty$ lub $b = \infty$, lub $\mathbb{R}$. Definiujemy* całkę niewłaściwą *funkcji f na przedziale P*

$$\int_{\inf P}^{\sup P} f(x)dx \tag{701}$$

jako granicę

$$\lim_{y\to b-} \int_a^y f(x)dx\,,$$
$$\lim_{y\to a+} \int_y^b f(x)dx\,,$$
$$\lim_{y\to a+} \int_y^c f(x)dx + \lim_{y\to b-} \int_c^y f(x)dx\,,$$
$$\lim_{y\to\infty} \int_{-y}^y f(x)dx\,,$$

odpowiednio, gdzie $c \in]a,b[$ jest dowolnym elementem przedziału. Jeśli granica istnieje mówimy, że całka niewłaściwa jest ***zbieżna****; jeśli wynosi $\pm\infty$, mówimy, że całka niewłaściwa jest* ***rozbieżna****.*

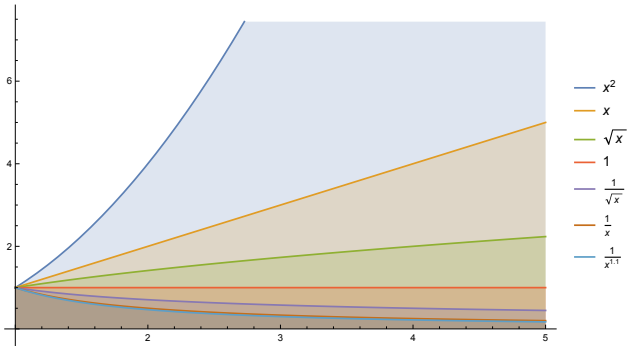
Przykład 14.1.

$$\int_0^y e^{-x}dx = -e^{-x}\big|_0^y = 1 - e^{-y}\,, \tag{702}$$

co implikuje

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{y\to\infty} 1 - e^{-y} = 1\,. \tag{703}$$

Następujący przykład jest kluczowy: ustali on „próg" między królestwem rozbieżnych całek i królestwem zbieżnych całek. Użyteczność takiego wyniku—który nie jest do końca intuicyjny—rozprzestrzeni się do kontekstu szeregów.



Przykład 14.2.

$$\int_1^y \frac{1}{x^s}dx = \begin{cases} \ln(x)|_1^y = \ln(y) & s = 1 \\ \frac{1}{1-s}\frac{1}{x^{s-1}}\Big|_1^y = \frac{1}{1-s}\frac{1}{y^{s-1}} - \frac{1}{1-s} = \frac{y^{1-s}-1}{1-s} & s \neq 1 \end{cases} \tag{704}$$

co implikuje rozbieżność dla $s = 1$; ponadto

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y^{1-s}-1}{1-s} < \infty \tag{705}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $1 - s < 0$, t.j. $s > 1$; w takim razie,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{s-1}\,. \tag{706}$$

Według intuicji, pole powierzchni $\mathrm{FIG}_1^\infty(\frac{1}{x^s})$ jest nieskończone w przypadkach $s \leq -1$; i tak jest. Mniej intuicjny jest fakt, że pole powierzchni $\mathrm{FIG}_1^\infty(\frac{1}{x})$ jest nieskończone natomiast pole powierzchni $\mathrm{FIG}_1^\infty(\frac{1}{x^{1.00001}})$ jest skończone i wynosi dokładnie 100.000; ale tak jest!

Przykład 14.3.

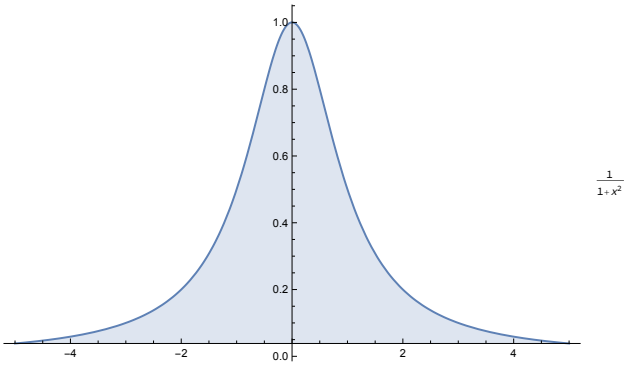
$$\int_0^y \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg}(x)|_0^y = \operatorname{arctg}(y)\,, \tag{707}$$

co implikuje

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{y\to\infty} \operatorname{arctg}(y) = \frac{\pi}{2}\,. \tag{708}$$

Ponadto,

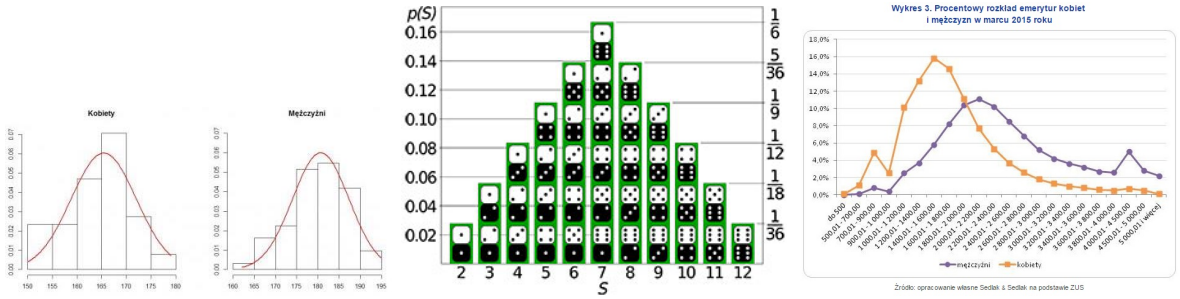
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi\,. \tag{709}$$



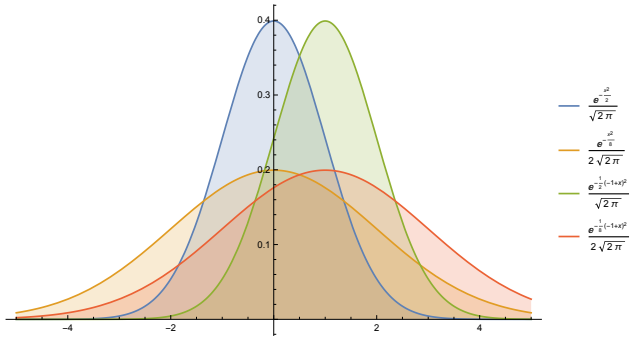
Przykład 14.4 (Rozkład normalny lub Gaussa). Jeden z najważniejszych rozkładów prawdopodobieństwa, odgrywający ważną rolę w statystyce. Wykres funkcji prawdopodobieństwa tego rozkładu jest krzywą w kształcie dzwonu (tak zwaną krzywą dzwonową).

$$f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1\,. \tag{710}$$

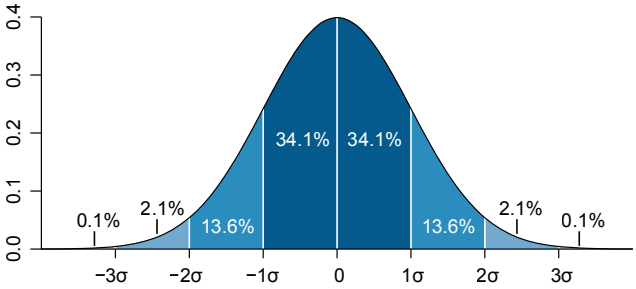
Zaskakująca ilość rozkładów prawdopodobieństwa wyników doświadczeń losowych przypomina rozkład normalny:



Jak interpretować parametr x_0? Chodzi tu o **wartość oczekiwaną**, tzn. spodziewany (najczęściej) wynik:



Jak interpretować parametr σ? Chodzi tu o **odchylenie standardowe**: wielkość wyników znajduje się w otoczeniu o promieniu σ wartości oczekiwanej:



Dowód, że całka równa się 1 będzie w ostatnim tygodniu. Będzie nam potrzebny taki wynik; w szczególnści,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-x_0)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \forall a > 0\,. \tag{711}$$

14.1.3 Kryterium zbieżności Cauchy'ego

Uwaga 14.1. Jeśli istnieje całka $\int_a^\infty f(x)dx$, to dla każdego $b > a$ istnieje $\int_b^\infty f(x)dx$ i zachodzi równość

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx\,. \tag{712}$$

Istotnie, dla każdego $y > b$ mamy przecież

$$\int_a^y f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^y f(x)dx\,. \tag{713}$$

Dlatego lewa strona ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy prawa strona ma granicę. Zachodzi też równość tych granic, czyli równość (712).

Twierdzenie 14.1 (warunek Cauchy'ego dla całek niewłaściwych, **•• Zadanie egzaminacyjne nr. 21**)**.** *Całka niewłaściwa* $\int_a^\infty f(x)dx$ *jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący* warunek Cauchy'ego dla całek*: dla każdego* $\epsilon > 0$ *istnieje takie* $M > a$*, że dla wszystkich* $x_2 > x_1 > M$ *zachodzi nierówność*

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| < \epsilon \tag{714}$$

Dowód. Jeśli $\int_a^\infty f(x)dx$ jest zbieżna, tzn. istnieje granica

$$g := \lim_{y\to\infty} I(y)\,, \quad I(y) := \int_a^y f(x)dx\,, \tag{715}$$

to zgodnie z definicją granicy dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje takie $M > 0$, że dla wszystkich $y > M$ jest $|I(y) - g| < \frac{\epsilon}{2}$. Zatem, dla $x_2 > x_1 > M$ jest

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| = |I(x_2) - I(x_1)| \le |I(x_2) - g| + |g - I(x_1)| < \epsilon\,. \tag{716}$$

Na odwrót, zaobserwujmy, że warunek (714) jest po prostu warunkiem Cauchy'ego dla **ciągu liczbowego**

$$a_n := I(y_n)\,, \tag{717}$$

gdzie $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest dowolnym ciągiem liczb większych od a, takim że $\lim_{n\to\mathbb{N}} y_n = \infty$.

Skoro każdy ciąg Cauchy'ego w $\mathbb{R}$ ma (skończoną) granicę, istnieje granica tego ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, którą jest pewna liczba $g := \lim_{n\to\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$.

Pozostało do sprawdzenia, że **funkcja** $I(y)$ dąży do g, dla $y \to \infty$, t.j., że odległość $|I(y) - g|$ dąży do 0 dla $y \to \infty$. Do tego celu rozpiszmy

$$\begin{aligned}
|I(y) - g| &= \left|\int_a^y f(x)dx - g\right| \\
&= \left|\int_a^{y_n} f(x)dx - \int_y^{y_n} f(x)dx - g\right| \\
&= \left|a_n - \int_y^{y_n} f(x)dx - g\right| \\
&\le |a_n - g| + \left|\int_y^{y_n} f(x)dx\right|
\end{aligned}$$

o ile tylko $y_n \ge y$.

Ustalmy $\epsilon > 0$. Dobierzmy do $\epsilon/2$ liczbę $M > a$ tak, aby warunek Cauchy'ego dla całek zachodził dla wszystkich $x_2 > x_1 > M$ z liczbą $\epsilon/2$ zamiast ϵ po prawej stronie nierówności. Niech $y > M$.

Ponieważ $\lim_{n\to\mathbb{N}} y_n = \infty$ oraz $\lim_{n\to\mathbb{N}} a_n = g$, istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $y_n > y$ oraz $|a_n - g| < \epsilon/2$. Wówczas, dla takiego n zachodzi

$$|I(y) - g| \leq |a_n - g| + \left| \int_y^{y_n} f(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \,. \tag{718}$$

Ale ostatnia nierówność nie zależy od n. Zatem, wprost z definicji granicy, widać, że $I(y) \to g$ dla $y \to \infty$. □

14.1.4 Zbieżność bezwzględna i warunkowa

Definicja 14.2 (całkowalność bezwzględna i całkowalność warunkowa)**.** *Niech $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$. Mówimy, że całka $\int_a^\infty f(x)dx$ jest* zbieżna bezwzględnie*, a funkcja f jest* bezwzględnie całkowalna *na $[a, \infty[$, wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżna jest całka*

$$\int_a^\infty |f(y)|dy \,. \tag{719}$$

Jeśli całka $\int_a^\infty f(x)dx$ jest zbieżna, ale nie jest zbieżna bezwzględnie, to mówimy, że jest zbieżna warunkowo*. Mówimy wtedy, że f jest* warunkowo całkowalna *na $[a, \infty[$.*

Wniosek 14.1. *Jeśli $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ jest bezwzględnie całkowalna na $[a, \infty[$, to całka*

$$\int_a^\infty f(x)dx \,, \tag{720}$$

jest zbieżna

Dowód. Zastosujemy kryterium całkowalności z Twierdzenia 14.1 i nierówność trójkąta dla całek,

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x)dx \right| \leq \int_{y_1}^{y_2} |f(x)|dx \,. \tag{721}$$

Jeśli całki z prawej strony nierówności są (dowolnie) małe dla wszystkich $y_2 > y_1$ dostatecznie dużych, to i całki z lewej strony są (dowolnie) małe dla wszystkich $y_2 > y_1$ dostatecznie dużych. □

14.1.5 Kryteria zbieżności porównawcze

Twierdzenie 14.2 (Kryterium porównawcze: wersja „nie graniczna" lub „skończona")**.** *Niech $f, g : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi takimi, że*

$$0 \leq g(x) \leq f(x) \,, \quad \forall x > x_0 \,, \tag{722}$$

dla pewnego $x_0 \geq a$. Wówczas, jeśli całka funkcji $f(x)$ istnieje i jest ***zbieżna*** *w $[a, \infty[$, taka jest i $g(x)$; analogicznie, jeśli całka funkcji $g(x)$ istnieje i jest* ***rozbieżna*** *w $[a, \infty[$, taka jest i $f(x)$.*

Dowód. Wystarczy rozpisać

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^\infty f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \lim_{y\to\infty} \int_{x_0}^y f(x)dx \tag{723}$$

i zaobserwować, że granica $\int_{x_0}^y f(x)dx$ istnieje i jest skończona. Wtedy, z

$$0 \leq \int_{x_0}^y g(x)dx \leq \int_{x_0}^y f(x)dx \tag{724}$$

wynika, że

$$\lim_{y\to\infty} \int_{x_0}^y g(x)dx < \infty \,. \tag{725}$$

Na końcu,

$$\lim_{y\to\infty} \int_a^y g(x)dx = \int_a^{x_0} g(x)dx + \lim_{y\to\infty} \int_a^y g(x)dx < \infty \,. \tag{726}$$

Druga cześć jest zupełnie analogiczna. □

Za chwilę będzie widać rolę funkcji $\frac{1}{x}$ jako „progu" między królestwami zbieżnych i rozbieżnych całek. Niech $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ będzie nieujemną funkcją. Intuicyjnie widzimy od razu, że, jeśli całka

$$\int_a^\infty f(x)dx \tag{727}$$

jest skończona, to $f(x)$ **musi dążyć do zera** dla $x \to \infty$ (gdyby tak nie było, byłby cały nieskończony prostokąt pod wykresem $f(x)$). Ale to tylko warunek konieczny: funkcja $\frac{1}{x}$ dąży do zera ale mimo tego jej całka jest rozbieżna. Żeby całka funkcji $f(x)$ była zbieżna potrzebujemy czegoś więcej: funkcja $f(x)$ musi dążyć do zera **wystarczająco szybko**; dokładnie szybciej niż „próg", tzn. $\frac{1}{x}$.

Twierdzenie 14.3 (Kryterium porównawcze: wersja „graniczna" lub „infinitezymalna", **•• Zadanie egzaminacyjne nr. 22**)**.** *Niech $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ będzie nieujemną funkcją. Jeśli istnieje $s > 1$ taki, że*

$$\lim_{x\to\infty} x^s f(x) = 0\,, \tag{728}$$

to całka funkcji $f(x)$ istnieje i jest zbieżna w $[a, \infty[$.

Dowód. Z definicji granicy, dla dostatecznie dużych x okazuje się, że

$$x^s f(x) < \epsilon\,. \tag{729}$$

W związku z tym,

$$0 \le f(x) \le \epsilon \cdot \frac{1}{x^s}\,, \quad \text{d.d.d. } x\,. \tag{730}$$

Wynik pochodzi z Twierdzenia 14.2 oraz Przykładu 14.2. □

Uwaga 14.2. „Wersja odwrotna" powyższego kryterium 14.3 brzmi następująco. Niech $f, g : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami o dodatnich wartościach od pewnego argumentu $x_0 \ge 0$. Jeśli istnieje $s \le 1$ oraz $g \in]0, \infty[$, takie, że

$$\lim_{x\to\infty} x^s f(x) = g\,, \tag{731}$$

to całka niewłaściwa

$$\int_a^\infty f(x)dx \tag{732}$$

jest rozbieżna.

Istotnie, d.d.d. x-ów

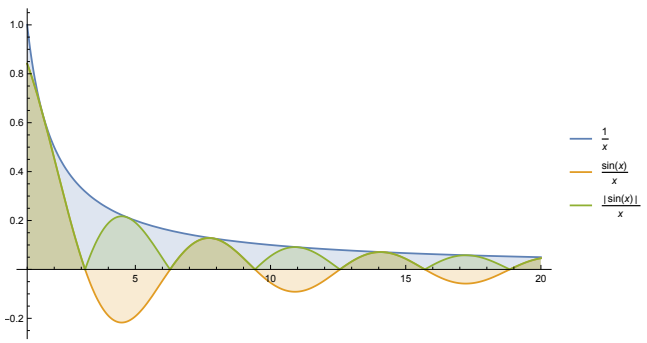
$$x^s f(x) > g - \epsilon\,,$$

gdzie ϵ jest na tyle mały, żeby sprawić, że $g - \epsilon > 0$. Równoważnie,

$$f(x) > (g - \epsilon)\frac{1}{x^s}\,,$$

i teza wynika z Twierdzenia porównawczego 14.2.

Przykład 14.5. Funkcja $\frac{\sin(x)}{x}$ jest całkowalna na $[1, \infty[$.



Istotnie, całkując przez części,

$$\int_1^y \frac{\sin(x)}{x}dx = -\left.\frac{\cos(x)}{x}\right|_1^y - \int_1^y \frac{\cos(x)}{x^2}dx\,. \tag{733}$$

Ponadto, z

$$\lim_{x\to\infty} x^{1+\frac{1}{2}} \frac{|\cos(x)|}{x^2} = 0 \tag{734}$$

wynika, że $\frac{|\cos(x)|}{x^2}$ jest całkowalna na $[1,\infty[$, z czego z kolei wynika, że $\frac{\cos(x)}{x^2}$ jest (bezwzględnie) całkowalna na $[1,\infty[$. Ponieważ

$$\lim_{y\to\infty} -\frac{\cos(x)}{x}\Big|_1^y = -\cos(1)\,, \tag{735}$$

zatem całka niewłaściwa

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} \tag{736}$$

jest zbieżna.

Można pokazać (ale nie zrobimy tego teraz), że całka

$$\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x} \tag{737}$$

jest rozbieżna: innymi słowy, funkcja $\frac{\sin(x)}{x}$ jest warunkowo całkowalna na $[1,\infty[$. Powodem tego zjawiska jest fakt, że $\frac{\sin(x)}{x}$ znajduje się dokładnie „na progu", t.j., nawet jeśli figurze pod wykresem $\frac{\sin(x)}{x}$ brakuje kilka „kawałków" w porównaniu do figury pod wykresem $\frac{1}{x}$, to nie znaczy, że pierwsza funkcja dąży do zera szybciej niż druga.

Uwaga 14.3. Czytelnik powinien już był zauważyć, ze traktowaliśmy zawsze przypadek, kiedy przedział całkowania P ma postać $[a,\infty[$. Wszystkie powyższe wyniki dają się łatwo rozszerzyć do innych przypadków. W szczególności, jeśli $P=]a,b]$, to Przykład (14.2) wygląda:

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s}dx = \begin{cases} \ln(x-a)|_a^b = \ln(b-a) - \lim\limits_{y\to a^+} \ln(y-a) & s=1 \\ \frac{1}{1-s}\frac{1}{(x-a)^{s-1}}\Big|_a^b = \frac{1}{(1-s)(b-a)^{s-1}} - \lim\limits_{y\to a^+} \frac{1}{(1-s)(y-a)^{s-1}} & s\neq 1 \end{cases} \tag{738}$$

w związku z tym, całka jest zbieżna dla $s<1$ i rozbieżna dla $s\geq 1$. Dokładnie odwrotny tego, co się zdarzyło w Przykładzie (14.2).

Uwaga 14.4. Kryterium **zbieżności** porównawcze w przypadku asymptoty pionowej przy $x=a$, w przypadku gdy $f(x)\longrightarrow+\infty$ dla $x\longrightarrow a^+$, wygląda:

$$\exists s<1 \quad : \quad \lim_{x\to a^+} f(x)(x-a)^s = 0\,.$$

Istotnie, dla x–ów dostatecznie bliskich do a,

$$f(x) < \frac{1}{(x-a)^s}\cdot\epsilon\,,$$

i zbieżność wynika z kryterium porównawczego i Uwaga 14.3. Kryterium **rozbieżności** natomiast brzmi

$$\exists s\geq 1 \quad : \quad \lim_{x\to a^+} f(x)(x-a)^s = g > 0\,.$$

Istotnie, dla ϵ, takiego, że $g-\epsilon>0$, okazuje się, że

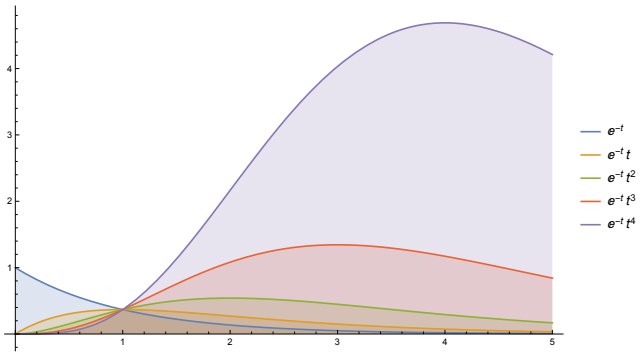
$$f(x) > \frac{1}{(x-a)^s}\cdot(g-\epsilon)$$

dla x–ów dostatecznie bliskich do a. Rozbieżność wynika wtedy z kryterium porównawczego i Uwaga 14.3.

14.1.6 Funkcja gamma Eulera

Definicja 14.3. *Dla każdego $a > 0$ kładziemy*

$$\Gamma(a) := \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \,. \tag{739}$$



Nietrudno przekonać się, że definicja jest poprawna, tzn. całka jest zbieżna dla każdego parametru $a > 0$. Istotnie, ponieważ $e^{-t} \leq 1$ dla $t \geq 0$, więc

$$\int_0^1 t^{a-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^{a-1} dt = \frac{t^a}{a}\Big|_0^1 = \frac{1}{a} < \infty \,. \tag{740}$$

Dla $t > 1$

$$e^{\frac{t}{2}} = 1 + \tfrac{t}{2} + \frac{1}{2}\left(\tfrac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\tfrac{t}{2}\right)^3 + \cdots \geq \frac{1}{k!}\left(\tfrac{t}{2}\right)^k \geq \frac{t^{a-1}}{k! 2^k} \,, \tag{741}$$

o ile tylko $k > a - 1$.

Dlatego

$$\int_1^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \leq k! 2^k \int_1^\infty e^{-t} e^{\frac{t}{2}} dt = k! 2^k \int_1^\infty e^{-\frac{t}{2}} dt = k! 2^k \left(-2e^{-\frac{t}{2}}\right)\Big|_1^\infty = k! 2^{k+1} e^{-\frac{1}{2}} < \infty \,. \tag{742}$$

Całka określająca funkcję gamma jest sumą powyższych całek, więc jest zbieżna.

Twierdzenie 14.4. *Funkcja Γ ma następujące własności:*

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1 \,, \\ \Gamma(a+1) &= a\Gamma(a) \,, \quad \forall a \in \mathbb{R} \,, \\ \Gamma(n+1) &= n! \,, \quad \forall n \in \mathbb{R} \,. \end{aligned}$$

Dowód. Liczbę $\Gamma(1)$ wyznaczamy wprost z definicji

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \,. \tag{743}$$

Całkując przez części, sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} \Gamma(a) &= \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{t^a}{a} e^{-t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{t^a}{a}(-e^{-t}) dt \\ &= 0 + \frac{\Gamma(a+1)}{a} \,. \end{aligned}$$

Indukcją, jeśli $\Gamma(n) = (n-1)!$, to $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$. □

14.1.7 Przybliżenie Stirlinga liczb $n!$

Twierdzenie 14.5 (Przybliżenie Stirlinga liczb $n!$ (ok. 1730))**.** *Ciąg $n!$ zachowuje się jak*

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,, \tag{744}$$

w sensie, że ich iloraz dąży do 1 dla $n \to \infty$.

Zanim naszkicujemy dowód, jako ciekawostkę zaobserwujmy, że

$$\sqrt{2\pi} \approx 2.5066\,, \quad e \approx 2.7182\,. \tag{745}$$

Istotnie, już otrzymaną nierówność

$$n^n > n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{746}$$

można szlifować dzięki następującemu twierdzeniu.

Twierdzenie 14.6. *Zachodzą nierówności*

$$e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n > n! > e\left(\frac{n}{e}\right)^n\,. \tag{747}$$

Dowód. Zaobserwujmy, że

$$n! = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} n^n\,. \tag{748}$$

Przy tym,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{-1}{n}\right)^{n\cdot\frac{n-1}{n}} \longrightarrow e^{-1}\,, \tag{749}$$

ponieważ

$$\frac{n-1}{n} \longrightarrow 1\,.$$

Trzeba jednak zwrócić uwagę na to, że, w przeciwieństwie od $(1-\frac{1}{n})^n$, który *rośnie* do e^{-1}, ciąg $a_n := (1-\frac{1}{n})^{n-1}$ *maleje* do e^{-1}. Istotnie, z nierówności Bernoulliego wynika:

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n} = \\
&= \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = \\
&= \frac{n+1}{n}\frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}} = \\
&= \frac{n+1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = \\
&= \frac{n+1}{n}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n-1} = \\
&= \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1} > \\
&> \frac{n+1}{n}\left(1-(n-1)\frac{1}{n^2}\right) = \\
&= \frac{n+1}{n}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2}\right) = \\
&= \frac{n^3-n^2+n+n^2-n+1}{n^3} = \\
&= \frac{n^3+1}{n^3} > 1\,,
\end{aligned}$$

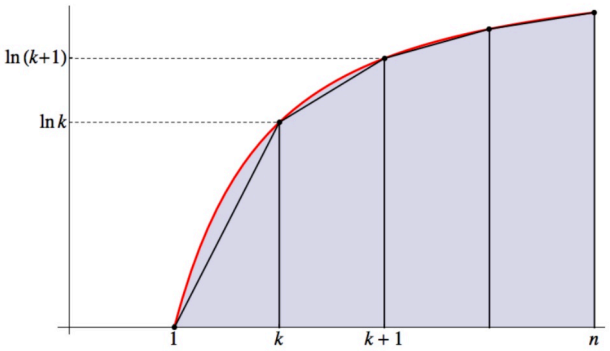
z czego wynika

$$n! = \underbrace{a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_n}_{n-1 \text{ czynników}} \cdot n^n > \underbrace{e^{-1} \cdot e^{-1} \cdot e^{-1} \cdots e^{-1}}_{n-1 \text{ razy}} \cdot n^n \,,$$

a więc

$$n! > (e^{-1})^{n-1} n^n = e \left(\frac{n}{e}\right)^n \,. \tag{750}$$

Drugą nierówność robi się graficznie:



(zdjęcie ze skryptu Pawła Strzeleckiego)

Istotnie,

$$\begin{aligned}
\int_1^n \ln(x)dx &> \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2}\left(\ln(i) + \ln(i-1)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^{n} \ln(i) + \sum_{i=1}^{n-1} \ln(i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \ln(i) - \frac{1}{2}\ln(n)\,,
\end{aligned}$$

z czego wynika

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(i) < n\ln(n) - n + 1 + \frac{1}{2}\ln(n) \tag{751}$$

i nareszcie

$$n! < n^n e^{-n+1}\sqrt{n} = e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \,. \tag{752}$$

□

Szkic dowodu Twierdzenia (14.5). „Wystarczy” udowodnić, że

$$\Gamma(n+1) \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,, \tag{753}$$

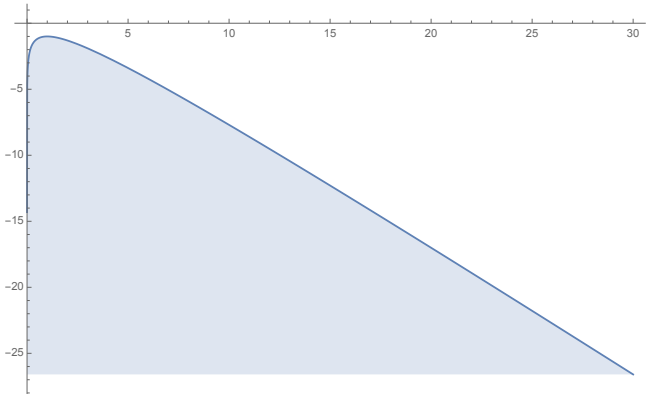
gdzie $\approx$ znaczy „zachowuje się jak”.

Przez podstawienie $t = nx$ otrzymamy

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = \\
&= \int_0^\infty (nx)^n e^{-nx} n dx = \\
&= \int_0^\infty n^{n+1} x^n e^{-nx} dx = \\
&= n^{n+1} \int_0^\infty e^{n\ln(x)} e^{-nx} dx = \\
&= n^{n+1} \int_0^\infty e^{n(\ln(x)-x)} dx\,.
\end{aligned} \tag{754}$$

Skupimy się na funkcji $f(x) = \ln(x) - x$. Ona ma jedyne globalne ścisłe maximum w $x = 1$. Przy tym,

$$f(1) = -1\,, \quad f'(1) = 0\,, \quad f''(1) = -1\,. \tag{755}$$



□

Szereg Taylora:

$$f(x) \approx -1 - \frac{1}{2}(x-1)^2\,. \tag{756}$$

W związku z tym,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{nf(x)}dx &\approx \int_0^\infty e^{n\left(-1-\frac{1}{2}(x-1)^2\right)}dx \\ &= e^{-n}\int_0^\infty e^{-\frac{n}{2}(x-1)^2}dx \\ &\approx e^{-n}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{n}{2}(x-1)^2}dx \\ &= e^{-n}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\,,\end{aligned}$$

im bardziej precyzyjne jest ostatnie przybliżenie, tym większy jest n (bardziej wąski dzwon), z czego wynika

$$\Gamma(n+1) \approx n^{n+1}e^{-n}\sqrt{\frac{2\pi}{n}} = \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\,. \tag{757}$$

14.2 Długość krzywych

Będziemy rozpatrywać krzywe opisane równaniami parametrycznymi

$$\phi : [a,b] \ni t \longmapsto (\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)) \in \mathbb{R}^n\,. \tag{758}$$

Dla $n = 2, 3$ są to krzywe na płaszczyźnie i w przestrzeni. Na przykład, obrazem odwzorowania $[0,2] \ni t \longmapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$ jest okrąg jednostkowy na płaszczyźnie. Drugi przykład stanowi wykres funkcji $y = f(x)$, gdzie $x \in [a,b]$:

$$\phi : [a,b] \ni t \longmapsto (t, f(t)) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{759}$$

Zauważmy, że powyżej wspominany okrąg nie jest wykresem żadnej funkcji.

Będziemy na razie zakładać, że funkcja (758) jest **różnowartościowa**, tzn. z geometrycznego punktu widzenia krzywa nie ma żadnego samoprzecięcia. Dla prostoty, zajmiemy się szczegółowo przypadkiem $n = 2$. Przypadek $n \geq 3$ jest w pełni analogiczny.

Definicja 14.4. *Łamaną wpisaną w krzywą* $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *nazwiemy sumę*

$$\ell_P := \bigcup_{i=1}^n O_i\,, \tag{760}$$

gdzie

$$O_i := \text{ odcinek od punktu } (\phi_1(t_{i-1}), \phi_2(t_{i-1})) \text{ do punktu } (\phi_1(t_i), \phi_2(t_i)) \tag{761}$$

oraz $P = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ *należy do zbioru* $\mathcal{P}$ *wszystkich podziałów przedziału* $[a, b]$. *Punkty* $(\phi_1(t_i), \phi_2(t_i))$ *nazywamy wierzchołkami łamanej.*

Długość każdego odcinka O_i łatwo daje się obliczyć twierdzeniem Pitagorasa, mianowicie

$$d(O_i) = \sqrt{(\phi_1(t_i) - \phi_1(t_{i-1}))^2 + (\phi_2(t_i) - \phi_2(t_{i-1}))^2}\,. \tag{762}$$

W związku z tym, rozsądnie uogólnić pojęcie długości łamanej następującym sposobym:

Definicja 14.5. *Długością łamanej* ℓ *jest liczba*

$$d(\ell_P) = \sum_{i=1}^{n} d(O_i)\,. \tag{763}$$

Definicja 14.6. *Niech* $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. *Długością krzywej* ϕ *nazywamy kres górny długości wszystkich łamanych wpisanych w tę krzywą, tzn. liczbę*

$$d(\phi) := \sup\{d(\ell_P) \mid P \in \mathcal{P}\}\,. \tag{764}$$

Proszę zauważyć, że, naśladując definicję całek, najpierw mierzyliśmy elementarne obiekty, mianowicie odcinki O_i, potem **algebraicznym sposobiem** (sumując) rozszerzaliśmy miarę do łamanych ℓ a ostatecznie **wzieliśmy granicę** ich długości. Ale jest kluczowa różnica między pojęciami pola powierzchni figur a długości krzywych: **długość łamanej nie będzie większa od długości krzywej**. Pochodzi to z faktu, że – z definicji – odcinek to najkrótsza krzywa łącząca dwa punkty.

Twierdzenie 14.7 (Wzór na długość krzywej)**.** *Załóżmy, że funkcja* $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *jest różnowartościowa i klasy* $\mathcal{C}^1$. *Wtedy*

$$d(\phi) = \int_a^b \sqrt{\phi_1'(t)^2 + \phi_2'(t)^2}\,. \tag{765}$$

Będziemy potrzebowali następującego twierdzenia o całkach funkcji o wartościach wektorowych. Jeśli $\phi(t)$ jest funkcją na przedziale $[a, b]$ o wartościach w $\mathbb{R}^n$, tzn.

$$\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t))\,, \tag{766}$$

to można ją całkować składową po składowej:

$$\int_a^b \phi(t)dt := \left(\int_a^b \phi_1(t)dt, \int_a^b \phi_2(t)dt, \ldots, \int_a^b \phi_n(t)dt\right)\,. \tag{767}$$

Można rozszerzyć wszystko, co wiemy o całkach funkcji o wartościach w $\mathbb{R}$ do całek funkcji o wartościach w $\mathbb{R}^n$. W szczególności, zachodzi nierówność trójkąta.

Twierdzenie 14.8. *Niech* $\phi(t)$ *będzie funkcją ciągłą na przedziale* $[a, b]$ *o wartościach w* $\mathbb{R}^n$ *oraz* ξ *dowolnym punktem przedziału* $[a, b]$. *Wówczas*

$$\left\|\int_a^b \phi(t)dt\right\| \geq \int_a^b \|\phi(t)\|dt - 2\int_a^b \|\phi(t) - \phi(\xi)\| \tag{768}$$

Dowód. Ponieważ

$$\begin{aligned}
\phi(\xi)(b-a) &= \phi(\xi)\int_a^b 1\,dt \\
&= \int_a^b \phi(\xi)dt \\
&= \int_a^b (\phi(t) - (\phi(t) - \phi(\xi)))dt \\
&= \int_a^b \phi(t)dt - \int_a^b (\phi(t) - \phi(\xi))dt\,,
\end{aligned}$$

na mocy nierówności trójkąta mamy

$$\begin{aligned}\|\phi(\xi)(b-a)\| &= \|\phi(\xi)\|(b-a)\\ &\leq \left\|\int_a^b \phi(t)dt\right\| + \left\|\int_a^b (\phi(t)-\phi(\xi))dt\right\|\\ &\leq \left\|\int_a^b \phi(t)dt\right\| + \int_a^b \|\phi(t)-\phi(\xi)\|dt\,.\end{aligned}$$

Sama nierówność trójkąta implikuje również, że

$$\|\phi(\xi)\| \geq \|\phi(t)\| - \|\phi(t)-\phi(\xi)\|\,, \tag{769}$$

wobec tego, całkując,

$$\begin{aligned}\|\phi(\xi)\|(b-a) &\geq \int_a^b (\|\phi(t)\| - \|\phi(t)-\phi(\xi)\|)dt\\ &= \int_a^b \|\phi(t)\|\,dt - \int_a^b \|\phi(t)-\phi(\xi)\|dt\,.\end{aligned}$$

Podsumowując,

$$\left\|\int_a^b \phi(t)dt\right\| + \int_a^b \|\phi(t)-\phi(\xi)\|d \geq \int_a^b \|\phi(t)\|\,dt - \int_a^b \|\phi(t)-\phi(\xi)\|dt\,, \tag{770}$$

z czego wynika (768). □

Dowód Twierdzenia 14.7. Niech ℓ będzie dowolną łamaną wpisaną w krzywą ϕ. Według definicji,

$$\begin{aligned}d(\ell_P) &= \sum_{i=1}^n d(O_i)\\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(\phi_1(t_i)-\phi_1(t_{i-1}))^2 + (\phi_2(t_i)-\phi_2(t_{i-1}))^2}\\ &= \sum_{i=1}^n \|(\phi_1(t_i),\phi_2(t_i)) - (\phi_1(t_{i-1}),\phi_2(t_{i-1}))\|\\ &= \sum_{i=1}^n \|\phi(t_i)-\phi(t_{i-1})\|\,,\end{aligned}$$

w związku z tym, można rozważyć $\phi'(t)$ i rozpisać

$$\begin{aligned}d(\ell_P) &= \sum_{i=1}^n \|\phi(t_i)-\phi(t_{i-1})\|\\ &= \sum_{i=1}^n \left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi'(t)dt\right\|\\ &\geq \sum_{i=1}^n \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\|\phi'(t)\right\| dt - 2\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\|\phi'(t)-\phi'(\xi_i)\right\| dt\right)\\ &= \int_a^b \left\|\phi'(t)\right\| dt - 2\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\|\phi'(t)-\phi'(\xi_i)\right\| dt\,.\end{aligned}$$

Teraz potrzebujemy założenia, że ϕ jest klasy $\mathcal{C}^1$: z tego wynika, że ϕ' jest ciągła. Ale $[a,b]$ jest domknięty, wobec tego ϕ' jest jednostajnie ciągła. W związku z tym, odległość $\|\phi'(t)-\phi'(\xi_i)\|$ będzie mniejsza od dowolnego ϵ o ile tylko wierzchołki podziału P będą oddzielone od siebie o dostatecznie małą długość. Innymi słowy,

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\|\phi'(t)-\phi'(\xi_i)\right\| dt \leq \sum_{i=1}^n (t_{i-1}-t_i)\epsilon = (b-a)\epsilon\,. \tag{771}$$

Można wtedy ustalić $\epsilon = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ i otrzymać, że, dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje wystarczająco gęsty podział P taki, że

$$d(\ell_P) \geq \int_a^b \left\|\phi'(t)\right\| dt - \epsilon\,, \tag{772}$$

innymy słowy

$$\forall \epsilon > 0\ \exists P \text{ t.ż. } d(\ell_P) \geq \int_a^b \left\|\phi'(t)\right\| dt - \epsilon\,. \tag{773}$$

Przypomnijmy definicję długości krzywej:

$$d(\phi) = \sup\{d(\ell_P) \mid P \in \mathcal{P}\}\,. \tag{774}$$

Zaobserwujmy, że powyższa własność (773) liczby $\int_a^b \|\phi'(t)\|\, dt$ jest dokładnie definicją kresu górnego zbioru $\{d(\ell_P) \mid P \in \mathcal{P}\}$. Z tego wynika, że

$$d(\phi) = \int_a^b \left\|\phi'(t)\right\| dt\,, \tag{775}$$

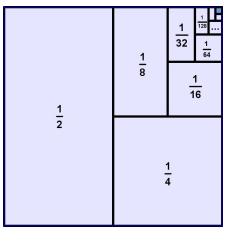
tak, jak chcieliśmy. □

15 Tydzień XV: 21. i 24. stycznia 2025

15.1 Szeregi liczbowe i ich (roz)bieżność

15.1.1 Jak zsumować nieskończenie wiele liczb?

Pojęcie szeregu wprowadza się po to, żeby można było ściśle mówić o **sumach nieskończenie wielu składników**.[3] Z takimi sumami spotkaliśmy się już, kiedy rozważaliśmy pewien kwadrat o krawędzi 1 rozłożony w nieskończenie wiele pod–kwadracików:



Zjawisko rozłożonego kwadratu daje się uogólnić w **algebraiczny sposób**. Mianowicie, dla każdego $|q| < 1$ mamy

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots := \lim_{n\to\infty}(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1-q}\,. \tag{776}$$

(Przykład kwadratu odpowiada wartości $q = \frac{1}{2}$, z uwagą na to, że mamy dodatkowy składnik 1 w sumie.) Zaobserwujmy, że wyrażenie $1+q+q^2+q^3+\cdots$ **nie ma żadnego sensu** ponieważ nie można obliczyć sumy nieskończenie wielu składników. Natomiast, wyrażenie $\lim_{n\to\infty}(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n)$ ma sens, ponieważ można wziąć sumę n elementów i **sprawdzić, czy wynik dąży do jakiejś liczby** dla n dążącego do ∞. To dlatego pierwszą równość w (776) traktujemy jako definicję wyrażenia, występującego z lewej strony; druga równość wynika ze wzoru na różnicę $(n + 1)$–szych potęg, a trzecia – z twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy i stąd, że $q^n \to 0$ dla $n \to \infty$, gdy $|q| < 1$.

Pokażmy dlaczego nie można bezkarnie traktować sumowania nieskończenie wielu składników jakby było sumowaniem skończenie wielu składników – w tym drugim kontekscie wiemy, że zachodzą takie

[3] Autor zaleca oglądanie drugiego odcinku ósmego sezonu *Futuramy* – „Benderama".

własności jak, n.p., przemienność i łączność. Korzystanie swobodnie z tych własności w przypadku sum nieskończenie wielu składników może (ale nie musi) powodować sprzeczność: załóżmy, n.p., że komuś udało się obliczyć sumę $-1+1-1+1-1+1-\cdots$ i oznaczmy ją S. Wówczas, stosując przemienność i łączność, mielibyśmy

$$\begin{aligned} S &= (-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots \\ &= 0+0+0+\cdots \\ &= -1+(1-1)+(1-1)+\cdots \\ &= -1+0+0+\cdots \\ &= -1-(-1+1)+(-1+1)+\cdots \end{aligned}$$

tzn. przy, jak się wydaje, naturalnej i sensownej umowie $0+0+0+\cdots = 0$, byłoby $S = 0 = -1 = -1-S$, co pokazuje, że S byłaby jednocześnie każdą z liczb $0, -1, -\frac{1}{2}$. Nadeszła sprzeczność.

15.1.2 Definicja suma szeregu jako granica sum częściowych

Z grubsza mówiąc, szereg jest czymś, co wygląda jak sumowanie nieskończenie wielu składników:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,. \tag{777}$$

Czytelnik musi zauważyć, że powyższy napis (777) **nie ma żadnego znaczenia**.

Otrzyma on znaczenie tylko po sprawdzeniu, że istnieje granica S tak zwanego ciągu sum częściowych $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \,. \tag{778}$$

Liczba S jest (poprawnie zdefiniowana), ewentualnie $S = \pm\infty$. Teraz (i **tylko teraz**) można pisać

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \tag{779}$$

i powiedzieć, że S jest **sumą szeregu**. Jeśli $S \in \mathbb{R}$ to mamy do czynienia ze zbieżnym szeregiem; jeśli $S = \pm\infty$ to szereg jest rozbieżny; jeśli S nie istnieje (jak w przypadku szeregu $1-1+1-1+\cdots$, to się mówi, że szereg nie jest ani zbieżny, rozbieżny, lub, że nie posiada sumy.

Definicja 15.1. Szereg *(liczb rzeczywistych)* (777) *zdefiniujemy przez tak zwany ciąg jego* sum częściowych $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *gdzie* s_n *jest podany przez* (778). *Liczba* a_n *nazywa się* n*–ty* wyraz *szeregu.*

Definicja 15.2. *Mówimy, że szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{780}$$

jest zbieżny *wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg jego sum częściowych jest* zbieżny *do skończonej granicy* S. *Jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to liczbę*

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{781}$$

nazywamy jego sumą *i piszemy*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,. \tag{782}$$

Jeśli $S = \pm\infty$, *to szereg jest rozbieżny.*

15.1.3 Dwa przykłady odniesienia

Przykład 15.1 (Szereg geometryczny). Jeśli $q \in \mathbb{R}$ i $|q| < 1$, to wtedy szereg geometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \tag{783}$$

jest zbieżny, a jego suma jest równa $\frac{1}{1-q}$. Z (776) widać od razu, że szereg jest rozbieżny dla $|q| \geq 1$.

Przykład 15.2 (Rozbieżność szeregu harmonicznego). Szereg harmoniczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{784}$$

jest rozbieżny. Jest to ważny fakt, którego dowód podajemy później.

Twierdzenie 15.1 (suma szeregów)**.** *Jeśli szeregi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *są zbieżne, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *jest zbieżny i*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,. \tag{785}$$

Dowód. To wynika natychmiast z twierdzenia o granicy sumy ciągów zbieżnych. □

15.1.4 Warunek konieczny na zbieżność

Warunek Cauchy'ego można sformułować w następujący sposób.

Twierdzenie 15.2 (Warunek Cauchy'ego)**.** *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego* $\epsilon > 0$ *istnieje liczba całkowita* N *taka, że*

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leq \epsilon \,, \tag{786}$$

jeśli $m \geq n \geq N$.

W szczególności dla $m = n$ nierówność (786) przyjmuje postać

$$|a_n| \leq \epsilon \,, \quad \forall n \geq N \,. \tag{787}$$

Innymi słowy, zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 15.3 (Warunek konieczny na zbieżność)**.** *Jeśli* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \,. \tag{788}$$

Warunek (788) nie jest wystarczający do zapewnienia zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Na przykład szereg harmoniczny jest rozbieżny, mimo tego, że $\frac{1}{n} \to 0$.

15.1.5 Zbieżność bezwzględna i warunkowa

Definicja 15.3. *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest* bezwzględnie zbieżny *wtedy i tylko wtedy, gdy szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *jest zbieżny. Szereg, który jest zbieżny, ale nie bezwzględnie, nazywa się* warunkowo zbieżny.

Przykłady takich szeregów zobaczymy później; jednym z nich jest $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (który nie jest bezwzględnie zbieżny, gdyż $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$).

15.1.6 Szeregi o wyrazach nieujemnych

Twierdzenie o ciągach monotonicznych ma także bezpośredni odpowiednik dla szeregów.

Twierdzenie 15.4. *Szereg o wyrazach nieujemnych jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jego sumy częściowe tworzą ciąg ograniczany.*

Przykład 15.3. Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{789}$$

jest zbieżny. Istotnie

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot \cdots \cdot 2} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &< 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3\,, \end{aligned}$$

podstawiwszy liczbę 2 na miejscu każdej liczby większej od 2.

15.1.7 Kryterium porównawcze

Twierdzenie 15.5 (Kryterium porównawcze)**.**
a) Jeśli

$$|a_n| \le c_n \quad dla\ n \ge N_0\,, \tag{790}$$

gdzie N_0 jest pewną ustaloną liczbą naturalną, i jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jest zbieżny, to i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
b) Jeśli

$$a_n \ge d_n \ge 0 \quad dla\ n \ge N_0\,, \tag{791}$$

i jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ jest rozbieżny, to i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Zauważmy, ze b) odnosi się tylko do szeregów o wyrazach nieujemnych a_n. Zauważmy również, że, ponieważ w szczególności $|a_n| \le |a_n|$, punkt a) twierdzenia pociąga, że szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.

Dowód. Weźmy $\epsilon > 0$, wówczas istnieje $N \ge N_0$ takie, że $m \ge n \ge N$ implikuje

$$\left| \sum_{k=n}^{m} c_k \right| = \sum_{k=n}^{m} c_k \le \epsilon\,, \tag{792}$$

co wynika z warunku Cauchy'ego. Stąd

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \le \sum_{k=n}^{m} |a_k| \le \sum_{k=n}^{m} c_k \le \epsilon \tag{793}$$

i a) zostało udowodnione.

Dalej, b) wynika z a), dlatego, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ musi być zbieżny. □

W wielu szeregach spotykanych w zastosowaniach, wyrazy szeregu są monotonicznie malejące. Dlatego podane niżej twierdzenie Cauchy'ego jest szczególnie interesujące. Uderzającą cechą twierdzenia jest to, że dowolnie „rzadki" podciąg ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ określa zbieżność lub rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

15.1.8 Kryterium Cauchy'ego o zagęszczeniu i kryterium całkowe

Twierdzenie 15.6 (Kryterium Cauchy'ego o zagęszczeniu, **•• Zadanie egzaminacyjne nr. 23**)**.** *Przypuśćmy, że*

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0\,. \tag{794}$$

Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{795}$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny szereg

$$a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2k}\,. \tag{796}$$

Dowód. Z twierdzenia 15.4 wynika, że wystarczy udowodnić ograniczoność sum częściowych. Niech

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n\,, \quad t_k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k}\,. \tag{797}$$

Dla $n < 2^k$ mamy

$$s_n \leq a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} = t_k \tag{798}$$

tak że

$$s_n \leq t_k\,. \tag{799}$$

Z drugiej strony, dla $n > 2^k$

$$s_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} = \frac{1}{2}t_k\,, \tag{800}$$

tak że

$$2s_n \geq t_k\,. \tag{801}$$

Na podstawie (799) i (801) ciągi $\{s_n\}$ i $\{t_k\}$ albo są obydwa ograniczone, albo obydwa nieograniczone. Dowód został zakończony. □

Wniosek 15.1 (Rozbieżność szeregu harmonicznego)**.** *Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{802}$$

jest zbieżny, jeśli $p > 1$, rozbieżny jeśli $p \leq 1$.

Dowód. Jeśli $p < 0$, to rozbieżność wynika z Twierdzenia 15.3. Jeśli $p \geq 0$, to zastosujmy Twierdzenie 15.6 i przejdźmy do szeregu

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^k\,. \tag{803}$$

Teraz $2^{1-p} < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $1 - p < 0$, tzn. $p > 1$ i twierdzenie wynika z własności szeregu geometrycznego (wystarczy przyjąć $q = 2^{1-p}$ w Przykładzie 15.1). □

Wniosek 15.2. *Szereg*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^p} \tag{804}$$

jest zbieżny jeśli $p > 1$ i rozbieżny jeśli $p \leq 1$.

Dowód. Z monotoniczności funkcji logarytmicznej wynika, że $\{\ln(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem rosnącym. A więc ciąg $\left\{\frac{1}{n(\ln(n))^p}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest malejący i możemy zastosować Twierdzenie 15.6 do szeregu (804): to doprowadza do szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k(\ln(2^k))^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\ln(2))^p} = \frac{1}{(\ln(2))^p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}\,, \tag{805}$$

i konkluzja wynika z Wniosku 15.1. □

To tej samej konkluzji można dotrzeć korzystając z innego kryterium, tak zwanego kryterium całkowego, którego dowód pochodzi bezpośrednio z definicji całki niewłaściwej.

Twierdzenie 15.7 (Kryterium całkowe)**.** *Niech $f\colon [1,\infty[\to\mathbb{R}$ będzie funkcją dodatnią i malejącą. Niech ponadto $a_n = f(n)$ dla każdego $n \geq n_0$. Wówczas szereg*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \tag{806}$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżna jest całka niewłaściwa

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx\,. \tag{807}$$

Przykład 15.4. Zbadajmy jeszcze raz szereg (804) powyższym twierdzeniem. Prowadzi nam do całki niewłaściwej

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^p(x)}dx\,, \tag{808}$$

która łatwo daje się obliczyć:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^p(x)}dx = \frac{1}{1-p}\left(\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\ln^{p-1}(x)}\Big|_2^y\right) = \frac{1}{1-p}\left(\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\ln^{p-1}(x)} - \ln(2)^{1-p}\right) < \infty \tag{809}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $p-1>0$, tzn. $p>1$.

15.1.9 Kryterium porównawcze – wersja infinitezymalna

Istnieje, jak w przypadkach całek niewłaściwych, „infinitezymalna wersja" kryterium porównawczego 15.5.

Twierdzenie 15.8 (Kryterium porównawcze, wersja graniczna)**.** *Niech*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,,\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{810}$$

będą dwoma szeregami z $a_n \geq 0$ oraz $b_n > 0$ dla dostatecznie dużych n. Oznaczmy

$$c := \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\,. \tag{811}$$

Wówczas, jeśli $0 < c < \infty$, to obydwa szeregi są zbieżne lub obydwa są rozbieżne.

Dowód. Bezpośrednio pochodzi z Twierdzenia 15.5. Istotnie, jeśli $\sum b_n$ jest zbieżny, ponieważ

$$a_n < (c+\epsilon)b_n \tag{812}$$

dla dostatecznie dużych n, to $\sum a_n$ jest zbieżny też.

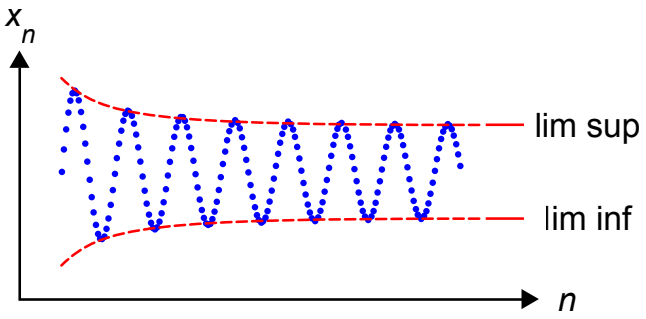
Podobnie, jeśli $\sum b_n$ jest rozbieżny, ponieważ

$$a_n > (c-\epsilon)b_n \tag{813}$$

dla dostatecznie dużych n, to $\sum a_n$ jest rozbieżny też. □

15.1.10 Granica dolna i górna

Nie każdy ciąg posiada granicę, ale każdy ciąg **posiada granicę dolną i górną** (to coś innego niż granica prawostronna i lewostronna). N.p., szereg naszkicowany niżej



widocznie nigdzie nie dąży, ale mimo tego istnieją granice

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} a_n &:= \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \mid k \geq n\}\,, \\ \liminf_{n\to\infty} a_n &:= \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k \mid k \geq n\}\,. \end{aligned}$$

Ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaznaczono kolorem niebieskim w rysunku. Dwie czerwone krzywe dążą do granicy górnej i dolnej ciągu. Widać, dlaczego granice dolne i górne muszą istnieć: zbiór (podciąg)

$$\{a_k \mid k \geq n\} \tag{814}$$

jest większy od zbioru

$$\{a_k \mid k \geq n+1\}\,, \tag{815}$$

w związku z tym kres górny pierwszego jest większy od kresu górnego drugiego i kres dolny pierwszego jest mniejszy od kresu dolnego drugiego. Innymi słowy ciąg

$$\{\sup\{a_k \mid k \geq n\}\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{816}$$

maleje, natomiast ciąg

$$\{\inf\{a_k \mid k \geq n\}\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{817}$$

rośnie. Wówczas one muszą posiadać jakąś granicę (ewentualnie $\pm\infty$): nikt nie gwarantuje, że te dwie granice są jedną i tą samą.

Jeżeli dany ciąg ma granicę, to granica dolna oraz górna są równe. Zachodzi także twierdzenie odwrotne: jeśli ciąg posiada granicę dolną oraz górną i są one równe, to posiada także granicę równą wspólnej wartości granic dolnej i górnej (na podstawie twierdzenia o trzech ciągach).

Twierdzenie 15.9. *Niech*

$$\alpha := \limsup_{n\to\infty} a_n\,. \tag{818}$$

Wówczas istnieje podciąg $\{a_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ *taki, że*

$$\lim_{l\to\infty} a_{n_l} = \alpha\,. \tag{819}$$

Analogicznie, jeśli

$$\widetilde{\alpha} := \liminf_{n\to\infty} a_n\,, \tag{820}$$

to istnieje podciąg $\{a_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ *taki, że*

$$\lim_{m\to\infty} a_{n_m} = \widetilde{\alpha}\,. \tag{821}$$

Dowód. Niech $P_l =]\alpha - \frac{1}{l}, \alpha + \frac{1}{l}[$ jest dowolnie małym otoczeniem liczby α (w przypadku $\alpha = \infty$ mamy $P_l =]l, \infty[$). Wtedy istnieje n_l taki, że

$$\sup\{a_k \mid k \geq n\} \in P_l\,, \quad \text{o ile tylko } n \geq n_l\,. \tag{822}$$

W szczególności, musi istnieć jakiś a_{n_l} ze zbioru $\{a_k \mid k \geq n\}$ taki, że

$$a_{n_l} \in P_l\,. \tag{823}$$

Z konstrukcji podciąg $\{a_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ dąży do α.

Niech teraz $P_m =]\widetilde{\alpha} - \frac{1}{m}, \widetilde{\alpha} + \frac{1}{m}[$ lub $P_m =]-\infty, m[$, w przypadku $\widetilde{\alpha} = -\infty$. Wtedy istnieje n_m taki, że

$$\inf\{a_k \mid k \geq n\} \in P_m\,, \quad \text{o ile tylko } n \geq n_m\,. \tag{824}$$

W szczególności, musi istnieć jakiś a_{n_m} ze zbioru $\{a_k \mid k \geq n\}$ taki, że

$$a_{n_m} \in P_m\,. \tag{825}$$

Z konstrukcji podciąg $\{a_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ dąży do $\widetilde{\alpha}$. □

15.1.11 Kryterium Cauchy'ego

Twierdzenie 15.10 (Kryterium Cauchy'ego, •• **Zadanie egzaminacyjne nr. 24**)**.** *Niech dany będzie szereg*

$$\sum a_n$$

i niech

$$\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,. \tag{826}$$

Wówczas:

a) *jeśli* $\alpha < 1$*, to* $\sum a_n$ *jest zbieżny;*

b) *jeśli* $\alpha > 1$*, to* $\sum a_n$ *jest rozbieżny;*

c) *jeśli* $\alpha = 1$*, to niewiadomo, czy* $\sum a_n$ *jest zbieżny lub rozbieżny.*

Dowód. Jeśli $\alpha < 1$, to możemy wybrać β tak, aby $\alpha < \beta < 1$. Ponieważ ciąg

$$\left\{\sup\{\sqrt[k]{|a_k|} \mid k \geq n\}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{827}$$

malejąc dąży do α i $\beta > \alpha$, to musi istnieć liczba całkowita N taka, aby

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \beta\,, \quad \text{o ile tylko } n \geq N\,. \tag{828}$$

Inaczej mówiąc, dla $n \geq N$ mamy

$$|a_n| \leq \beta^n\,. \tag{829}$$

Szereg $\sum \beta^n$ jest zbieżny, ponieważ $0 < \beta < 1$. Zbieżność szeregu $\sum a_n$ wynika teraz z kryterium porównawczego (Twierdzenie 15.5).

Jeśli $\alpha > 1$, to weźmy sobie (na mocy Twierdzenia 15.9) podciąg

$$\left\{\sqrt[n_l]{|a_{n_l}|}\right\}_{l\in\mathbb{N}} \tag{830}$$

dążący do α. Skoro $\alpha > 1$,

$$|a_n| > 1 \tag{831}$$

dla nieskończenie wielu wartości n stąd warunek $a_n \to 0$ konieczny dla zbieżności szeregu $\sum a_n$ nie jest spełniony (Twierdzenie 15.3).

Aby udowodnić c), rozpatrzmy szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,. \tag{832}$$

Dla każdego z tych szeregów $\alpha = 1$, ale pierwszy jest rozbieżny, a drugi zbieżny.

□

15.1.12 Kryterium d'Alamberta

Twierdzenie 15.11 (Kryterium d'Alamberta, •• **Zadanie egzaminacyjne nr. 25**). *Niech dany będzie szereg*

$$\sum a_n$$

i niech

$$\alpha := \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq \widetilde{\alpha} := \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| . \tag{833}$$

Wówczas:

a) *jeśli* $\alpha < 1$, *to* $\sum a_n$ *jest zbieżny;*

b) *jeśli* $\widetilde{\alpha} > 1$, *to* $\sum a_n$ *jest rozbieżny;*

c) *w innych przypadkach niewiadomo, czy* $\sum a_n$ *jest zbieżny lub rozbieżny.*

Dowód. Jeśli zachodzi warunek a), to jak wcześniej można znaleźć $\beta < 1$ i liczbę całkowitą N taką, że

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \beta \tag{834}$$

dla $n \geq N$. W szczególności

$$|a_{N+1}| < \beta|a_N| , \quad |a_{N+2}| < \beta|a_{N+1}| < \beta^2|a_N| , \quad \ldots , |a_{N+p}| < \beta^p|a_N| . \tag{835}$$

Znaczy to, że (ustaliwszy $p = n - N$)

$$|a_n| < |a_N|\beta^{n-N} = (|a_N|\beta^{-N})\beta^n \tag{836}$$

dla $n > N$ i a) wynika z kryterium porównawczego (Twierdzenie 15.5), ponieważ szereg $\sum \beta^n$ jest zbieżny.

Jeśli $\widetilde{\alpha} > 1$, to łatwo zauważyć, że warunek $a_n \to 0$ nie jest spełniony (patrz Twierdzenia 15.9), skąd wynika b).

Dla obydwóch szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{837}$$

zachodzi $\alpha = \widetilde{\alpha} = 1$ i już pokazano, że pierwszy jest rozbieżny, natomiast drugi jest zbieżny.

□

Uwaga 15.1. W napisach (826) oraz (833) symbole α i $\widetilde{\alpha}$ oznaczają liczbę, czyli element zbioru $\mathbb{R}$: znaczy to, że α i $\widetilde{\alpha}$ nie mogą być **nieskończoną liczbą**. Pociąga to za sobą, że, jeśli $\alpha = \pm\infty$ (lub $\widetilde{\alpha} = \pm\infty$), to **nie można stosować odpowiadającego kryterium**.

Przykład 15.5. Rozpatrzmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots , \tag{838}$$

czyli szereg, którego n–ty wyraz jest dany wzorem

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{jeśli } n = 2k-1 , \\ \\ \frac{1}{3^k} & \text{jeśli } n = 2k . \end{cases} \tag{839}$$

Widać, że:

$$\begin{aligned} \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} &= \left(\frac{2}{3}\right)^k \longrightarrow 0 , \\ \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k \longrightarrow \infty , \end{aligned}$$

w związku z czym

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^k = \infty\,. \tag{840}$$

Z drugiej strony,

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}{n}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1+\frac{1}{n}} & \text{dla nieparzystego } n\,, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}{n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} & \text{dla parzystego } n\,. \end{cases} \tag{841}$$

w związku z czym

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{\text{nieparzysty } n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1\,. \tag{842}$$

Kryterium Cauchy'ego wskazuje na zbieżność, natomiast kryterium d'Alemberta po prostu **nie można zastosować**, ponieważ α nie może być ∞.

Uwaga 15.2. Kryterium d'Alemberta jest łatwiej stosować niż kryterium Cauchy'ego, ponieważ łatwiej jest obliczyć ułamki niż pierwiastki n–tego stopnia. Kryterium Cauchy'ego jest jednak silniejsze. Dokładniej: gdy kryterium d'Alemberta wskazuje na rozbieżność, to i kryterium Cauchy'ego także; gdy kryterium Cauchy'ego nie daje rozstrzygnięcia, to kryterium d'Alemberta także.

15.1.13 Kryteria Dirichleta i Leibniza

Twierdzenie 15.12 (Kryterium Dirichleta, •• **Zadanie egzaminacyjne nr. 26**)**.** *Jeśli ciąg liczb rzeczywistych* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *maleje do zera od pewnego indeksu* n_0*, a sumy częściowe* s_n *szeregu* $\sum a_n$ *tworzą ciąg ograniczony, to szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{843}$$

jest zbieżny.

Dowód. Oznaczmy

$$S_n := a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k \tag{844}$$

sumy cząstkowe szeregu $\sum a_nb_n$ i rozpiszmy każdy a_k jako **różnicę sum częściowych** $a_k = s_k - s_{k-1}$ dla każdego $k > 1$ (dla $k = 1$ mamy $a_1 = s_1$). Wówczas

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_kb_k \\ &= s_1b_1 + \sum_{k=2}^{n}(s_k - s_{k-1})b_k \\ &= s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n\,. \end{aligned} \tag{845}$$

Skoro $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony i $b_n \to 0$, ostatni składnik w sumie (845) też dąży do 0. Znaczy to, że: jeśli granica

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n \tag{846}$$

istnieje, to powinna ona się równać granicy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1})\,. \tag{847}$$

Pozostało zatem do udowodnienia, że granica (847) istnieje i jest skończona. W tym celu, niech $n > n_0$ i niech M będzie ograniczeniem ciągu $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, czyli liczbą, taką, że $|s_n| < M$ dla każdego n: okazuje się, że

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} |s_k(b_k - b_{k+1})| \leq M \sum_{k=n_0}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| \tag{848}$$

i suma

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| = \sum_{k=n_0}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) = (b_{n_0} - b_{n_0+1}) + (b_{n_0+1} - b_{n_0+2}) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) = b_{n_0} - b_n \tag{849}$$

widocznie dąży do b_{n_0}. Z kryterium porównawczego (Twierdzenie 15.5)wynika, że istnieje skończona granica

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n_0}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) \,, \tag{850}$$

a więc także granica (847), ich różnicą będąc skończona suma

$$\sum_{k=1}^{n_0} s_k(b_k - b_{k+1}) \in \mathbb{R} \,. \tag{851}$$

□

Mamy teraz istotne i użyteczne kryterium dla tak zwanych szeregów **o wyrazach naprzemiennych**.

Wniosek 15.3 (Kryterium Leibniza)**.** *Jeśli ciąg liczb rzeczywistych b_n maleje do zera od pewnego indeksu n_0, to szereg naprzemienny*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n \tag{852}$$

jest zbieżny.

Dowód. Natychmiastowa konsekwencja Twierdzenia 15.12. □

15.2 Szeregi potęgowe i ich (ro)zbieżność

15.2.1 Definicja szeregu potęgowego i jego promieniu zbieżności

Przyjmujemy teraz szeregi „z parametrem", t.j. postaci

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,, \tag{853}$$

gdzie parametr x pojawi się poprzez jego n–te potęgi. Z tego powodu, nie mówimy o „szeregach z parametrem" ale raczej o **szeregach potęgowych**.

Ale główne pytanie można sformułować w ten sposób: „dla jakich wartości parametru x podany szereg jest zbieżny?" To pytanie prowadzi prosto do pojęcia promienia zbieżności.

Istotnie, szereg (853) jest zawsze zbieżny dla $x = 0$, ponieważ suma zer to zero. Zdarze się, że istnieją szeregi jak, n.p.,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n \,, \tag{854}$$

takie, że $S(x)$ jest zbieżny tylko dla $x = 0$. W tym przypadku, się mówi, że promień zbieżności równa się 0.

Z drugiej strony, szereg jak, n.p.,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \,, \tag{855}$$

jest zbieżny dla każdego x i jego suma wynosi dokładnie e^x. W tym przypadku, się mówi, że promień zbieżności równa się ∞.

Intuicja sugeruje, że im większy jest moduł parametru x, tym mniejsza jest szansa, że szereg jest zbieżny. Przy tym, jeśli okazuje się, że szereg jest zbieżny dla pewnego $\widetilde{x}$, tym bardziej szereg powinien być zbieżny dla x takiego, że $|x| < |\widetilde{x}|$. Wówczas, aby wyznaczyć promień zbieżności, „wystarczy" wziąć największy moduł liczb x takich, że szereg jest zbieżny.

Twierdzenie 15.13 (•• **Zadanie egzaminacyjne nr. 27**)**.** *Jeśli szereg potęgowy* (853) *jest zbieżny dla* $\widetilde{x} \neq 0$*, to jest bezwzględnie zbieżny w* $]-r, r[$ *dla każdego* $r < |\widetilde{x}|$.

Dowód. Ponieważ szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \widetilde{x}^n \tag{856}$$

jest zbieżny, warunek konieczny

$$\lim_{n\to\infty} a_n \widetilde{x}^n = 0 \tag{857}$$

musi być spełniony. Wobec tego, ciąg $\{a_n \widetilde{x}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ musi być ograniczony, tzn.

$$|a_n \widetilde{x}^n| \leq M \tag{858}$$

dla odpowiedniego M. W związku z tym, dla każdego $x \in]-r, r[$,

$$|a_n x^n| = |a_n||x|^n < |a_n| r^n = |a_n||\widetilde{x}|^n \frac{r^n}{|\widetilde{x}|^n} = |a_n \widetilde{x}^n| \left(\frac{r}{|\widetilde{x}|}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{|\widetilde{x}|}\right)^n . \tag{859}$$

Skoro $\frac{r}{|\widetilde{x}|} < 1$, szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{r}{|\widetilde{x}|}\right)^n \tag{860}$$

jest zbieżny. Na mocy kryterium porównawczego (Twierdzenie 15.5) nasz szereg jest bezwzględnie zbieżny.

□

Definicja 15.4. *Kres górny*

$$\rho := \sup \left\{ r \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ jest zbieżny } \forall x \in]-r, r[\right\} \tag{861}$$

nazywa się promieniem zbieżności.

Wniosek 15.4. *Niech* ρ *będzie promieniem zbieżności szeregu*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \tag{862}$$

Wówczas $S(x)$ *jest zbieżny dla każdego* x *takiego, że* $|x| < \rho$ *i jest rozbieżny dla każdego* x *takiego, że* $|x| > \rho$*. Dla* x*–ów takich, że* $|x| = \rho$*, szereg może być albo zbieżny albo rozbieżny.*

15.2.2 Zbieżność punktowa oraz jednostajna

Jeśli $\rho > 0$ to mamy do czynienia z **funkcją**

$$\begin{aligned} f :]-\rho, \rho[&\longrightarrow \mathbb{R} , \\ x &\longmapsto S(x) , \end{aligned}$$

przyporządkowującą każdej wartości „parametru" x sumę odpowiadającego szeregu.

Pojawi się naturalne pytanie: czy taka funkcja jest ciągła? To drugi przypadek obecnego rozdziału, gdzie nie można rozszerzyć bezkarnie własności dotyczący skończonych sum liczb do nieskończonych sum liczb. Dokładnie, widać, że każda suma częściowa

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \,, \tag{863}$$

będąca po prostu wielomianem n–tego stopnia, jest ciągła. To, co nam brakuje jest wzorem pozwalającym ustalić w jakich przypadkach granica ciągu funkcji jest funkcją ciągłą.

Niech $f_n, f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $n = 1, 2, \ldots$, a X oznacza (na razie) zupełnie dowolny zbiór.

Definicja 15.5 (Zbieżność punktowa)**.** *Powiemy, że ciąg funkcji $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny* punktowo *do f na zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x \in X$ zachodzi równość*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{864}$$

Piszemy wtedy: $f_n \to f$ na X.

Definicja 15.6 (Zbieżność jednostajna)**.** *Powiemy, że ciąg funkcji $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny* jednostajnie *do f na zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek: dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $x \in X$ i wszystkich $n > n_0$ jest*

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon \,. \tag{865}$$

Piszemy wtedy: $f_n \overset{\to}{\to} f$ na X.

Przykład 15.6. Niech $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ i niech $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f_n(x) = x^n$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = f(x) := \begin{cases} 0 & x \in [0, 1[\\ 1 & x = 1 \end{cases} \tag{866}$$

Innymi słowy, ciąg f_n jest zbieżny punktowo na $[0, 1]$ do funkcji f. Nie jest to jednak zbieżność jednostajna: dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jest

$$f_n(2^{-1/n}) - f(2^{-1/n}) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}, \tag{867}$$

a zatem warunek z definicji zbieżności jednostajnej nie zachodzi dla żadnej liczby $\epsilon < \frac{1}{2}$.

Twierdzenie 15.14. *Załóżmy, że $P \subseteq \mathbb{R}$ jest dowolnym przedziałem. Niech $f_n : P \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi na P. Jeśli $f_n \overset{\to}{\to} f$ na P, to f jest ciągła na P.*

Dowód. Ominięty. □

Twierdzenie 15.15 (Kryterium Weierstrassa)**.** *Niech $f_n : X \to \mathbb{R}$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Jeśli*

$$|f_n(x)| \leq a_n \,, \tag{868}$$

dla $n \in \mathbb{N}$, a szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to wówczas szereg funkcyjny

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \tag{869}$$

jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na X. W szczególności, $S(x)$ jest funkcją ciągłą na X.

Dowód. Ominięty. □

15.2.3 Różniczkowanie szeregów potęgowych

Wróćmy do naszego szeregu potęgowego (853). Z dowodu Twierdzenia 15.13 (w szegółności z formuły (859)) widać, że suma $S(x)$ jest funkcją ciągłą na $]-\rho,\rho[$ ponieważ spełnia warunki kryterium Weierstrassa. Okazuje się, że $S(x)$ jest wielokrotnie lepsza niż funkcja ciągła: jest klasy $\mathcal{C}^\infty$ na $]-\rho,\rho[$.

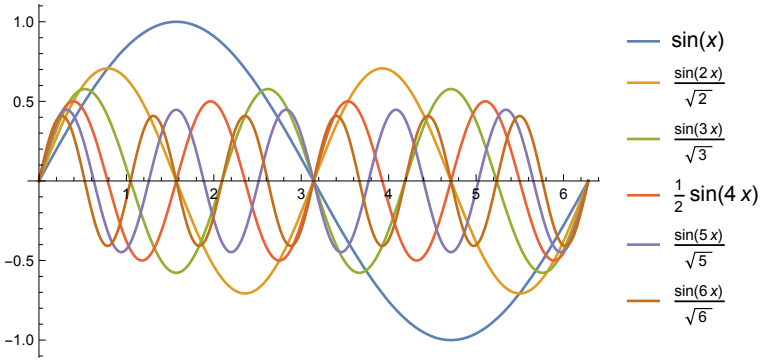
Twierdzenie 15.16 (Różniczkowanie szeregów potęgowych)**.** *Załóżmy, że $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, gdzie $n = 1,2,\ldots$, są różniczkowalne. Jeśli szereg funkcyjny $\sum f_n'$ jest zbieżny jednostajnie na $[a,b]$ do funkcji g, a ponadto istnieje taki punkt $x_0 \in [a,b]$, że szereg liczbowy $\sum f_n(x_0)$ jest zbieżny, to wówczas:*

(a) Szereg $\sum f_n$ jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji ciągłej $f : [a,b] \to \mathbb{R}$;

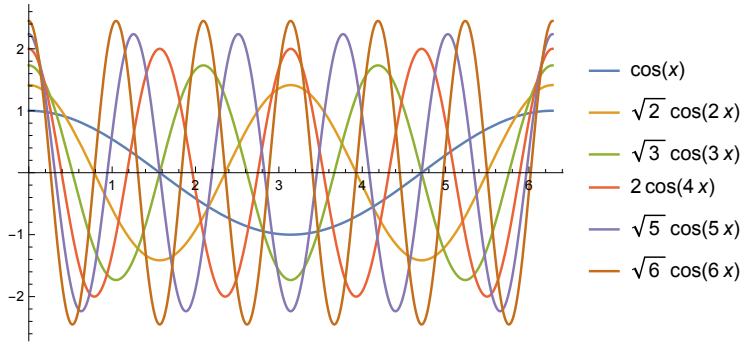
(b) Funkcja f jest różniczkowalna na $[a,b]$ i $f' = g$.

Dowód. Ominięty. □

Przykład 15.7. Ciąg funkcji $f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ dąży jednostajnie do funkcji $f(x) = 0$, stałej na zero:



Ale ciąg pochodnych $f_n'(x) := \sqrt{n}\cos(nx)$ nie dąży (żadnym sposobem) do pochodnej $f'(x) = 0$:



Ten przykład pokasuje, że $f_n(x) \to f(x)$ nie implikuje $f_n'(x) \to f'(x)$.

Do czego służy Twierdzenie 15.16? W nazym przypadku ciągów potęgowych, powie ono kiedy można bezpiecznie zamienić działania różniczkowania i sumowanie: następujące kroki,

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}\,, \tag{870}$$

które wyglądają zupełnie normalne, są dozwolone wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ jest zbieżny jednostajnie i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny przynajmniej w jednym punkcie.

Okazuje się, że promień zbieżności obydwu szeregów jest ten sam.

Uwaga 15.3 (Wyróżniona funkcja pierwotna). Zaobserwujmy, że dla każdego wielomianu $w(x)$ istnieje dokładnie jedna funkcja pierwotna $W(x)$ taka, że $W(x) = 0$. Mianowicie, $W(x)$ jest wielomianem o stopniu o jeden wyższym od stopnia wielomianu $w(x)$:

$$W(x) := \int_0^x w(t)dt\,. \tag{871}$$

Aby uniknąć zmiany zmiennej, która mogłaby utrudnić notację, będziemy pisać

$$W(x) = \int w(x)dx\,. \tag{872}$$

Twierdzenie 15.17. *Funkcja $S(x)$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$ na $]-\rho,\rho[$. Ponad to,*

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-p+1)x^{n-p}\,, \tag{873}$$

$$\int S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\,. \tag{874}$$

Dowód. Wystarczy udowodnić, że wzór (870) jest ważny dla każdego $x \in]-\rho,\rho[$, w sensie, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \tag{875}$$

jest zbieżny, ma ten sam promień zbieżności ρ, i jego suma wynosi $S'(x)$.

Do tego celu, sprawdźmy, czy szereg (otrzymany przez mnożenie powyższego przez x)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n \tag{876}$$

jest zbieżny dla każdego $x \in]-\rho,\rho[$.

Rozumowanie jest takie samo jak w dowodzie Twierdzenia 15.13. Mianowicie, weźmy sobie $\widetilde{x}$ oraz $\widetilde{\rho}$ takie, że $|x| < |\widetilde{x}| < \widetilde{\rho} < \rho$. Wówczas

$$\begin{aligned} |a_n n x^n| &= n|a_n||x|^n \\ &< n|a_n||\widetilde{x}|^n \\ & n|a_n\widetilde{\rho}^n|\left(\frac{|\widetilde{x}|}{\widetilde{\rho}}\right)^n \\ & Mn\left(\frac{|\widetilde{x}|}{\widetilde{\rho}}\right)^n\,, \end{aligned}$$

gdzie M jest ograniczeniem ciągu $|a_n\widetilde{\rho}^n|$.

Aby sprawdzić, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{|\widetilde{x}|}{\widetilde{\rho}}\right)^n \tag{877}$$

jest zbieżny, zastosujmy kryterium Cauchy'ego: ciąg

$$\sqrt[n]{n\left(\frac{|\widetilde{x}|}{\widetilde{\rho}}\right)^n} = \sqrt[n]{n}\frac{|\widetilde{x}|}{\widetilde{\rho}} \tag{878}$$

dąży do $1\cdot\frac{|\widetilde{x}|}{\widetilde{\rho}} < 1$. Z tego wynika, że (877) jest zbieżny. Na mocy kryterium Weierstrassa (Twierdzenie 15.15), szereg (876) jest jednostajnie i bezwzględnie zbieżny na $x \in]-\rho,\rho[$, ponieważ $\widetilde{\rho}$ jest dowolną liczbą mniejszą od ρ. Jeśli $x \neq 0$, można podzielić przez x i otrzymać zbieżność szeregu (875).

Więc szereg (875) ma ten sam promień zbieżności, jak nasz szereg potęgowy (853). Wobec tego, obydwa (875) i (853) są jednostajnie zbieżne na $]-\rho,\rho[$. Warunki Twierdzenia 15.16 są spełnione: wzór (870) jest wtedy poprawny dla każdego $x \in]-\rho,\rho[$.

Ogólny wzór (873) zachodzi indukcyjnie.

Aby udowodnić (874) wystarczy udowodnić, że

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\right)' = S(x)\,. \tag{879}$$

Podejście jest to samo. □

Twierdzenie 15.18. *Niech*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{880}$$

będzie szeregiem potęgowym i załóżmy, że istnieje granica

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L\,. \tag{881}$$

Wówczas:

1. *jeśli $L = +\infty$, to szereg jest zbieżny tylko dla $x = 0$;*
2. *jeśli $L = 0$, to szereg jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$;*
3. *jeśli $L \in]0, \infty[$, to promień zbieżności ρ wynosi $\frac{1}{L}$.*

Dowód. Ominięty. □

Przykład 15.8. Skorzystajmy z ostatnich Twierdzeń 15.17 oraz 15.18 aby znaleźć sumę następującego szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) x^{2n}\,. \tag{882}$$

Pierwsza sprawa: promień zbieżności ρ wynosi 1. Istotnie,

$$\sqrt[2n]{n + \frac{1}{n}} = \sqrt[2n]{\frac{n^2+1}{n}} = \exp\left(\frac{\ln(n^2+1) - \ln(n)}{2n}\right) \to \exp(0) = 1\,. \tag{883}$$

Więc, dla każdego $x \in]-1, 1[$ możemy zastosować Twierdzenie 15.17. Otrzymamy (przypominając Uwagę 15.3):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) x^{2n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(n x^{2n} + \frac{x^{2n}}{n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(2n+1)x^{2n} - \frac{x^{2n}}{2} + 2\frac{x^{2n}}{2n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(x^{2n+1})' - \frac{x^{2n}}{2} + 2\int x^{2n-1}dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(x^{2n+1})' - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int x^{2n-1}dx \\
&= \frac{1}{2}\left(x\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2} - 1\right) + 2\int \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}dx \\
&= \frac{1}{2}\left(x\left(\frac{1}{1-x^2} - 1\right)\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2} - 1\right) + 2\int \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-x^2} - 1\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2} - 1\right) - \ln(1-x^2) \\
&= \frac{x^2}{(x^2-1)^2} - \ln(1-x^2)\,.
\end{aligned}$$