Matematyka I

Seria zadań do przygotowania się do egzaminu pisemnego

28 maja 2026

WYDZIAŁ FIZYKI
UNIWERSYTET WARSZAWSKI

Wprowadzenie

Materiał niniejszego zbioru jest całkowicie wzięty z zbiorów zadań J. Kamińskiego, K. Grabowskiej, J. Wojtkiewicza, P. Chankowskiego, A. Bednorza, M. Misiaka, K. Wohfelda i innych.
UWAGA! Symbolem ♣ oznaczone są zadania kluczowe do przygotowania się do kolokwium.

Spis treści

11 Funkcje pierwotne **4**
11.1 Wyznaczenie funkcji pierwotnej 4

12 Całki nieoznaczone **5**
12.1 Całkowanie funkcji wymiernych 5
12.2 Całkowanie funkcji trygonometrycznych 6
12.3 Całkowanie przez podstawienie 6
12.3.1 Całkowanie przez podstawienie Eulera 6

13 Całki oznaczone **7**
13.1 Obliczenie całek oznaczonych 7

14 Całki niewłaściwe **7**
14.1 Zbieżność całek niewłaściwych 7
14.2 Obliczenie całek niewłaściwych 7

15 Szeregi **9**
15.1 Szeregi liczbowe 9
15.2 Szeregi potęgowe 10

11 Funkcje pierwotne

11.1 Wyznaczenie funkcji pierwotnej

Zadanie 11.1.1. Wyznaczyć jakąś funkcję pierwotną poniższych funkcji:

(1) (♣) $x\cos x$

(2) $x^2\cos x$

(3) (♣) xe^x

(4) x^2e^{4x}

(5) (♣) $x^2\ln x$

(6) $(x+1)^2\ln 3x$

(7) $e^{2x}\cos x$

(8) $e^{-x}\sin 4x$

(9) (♣) $\dfrac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}$

(10) $\dfrac{\mathrm{tg}x}{2\sin^2 x\cos^2 x}$

(11) (♣) tg^2x

(12) $\left(x^2+5\right)^3$

(13) (♣) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

(14) $\cos(\pi\mathrm{x}+1)$

(15) $\cos(4x)cos(7x)$

(16) (♣) $\arctan(x)$

(17) $\arcsin(x)$

(18) $(3x^2+6x+5)\arctan(x)$

(19) (♣) $\cos(\ln(x))$

(20) $\dfrac{x\arctan(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

(21) $\dfrac{x^3e^{x^2}}{\left(x^2+1\right)^2}$

(22) $\dfrac{x^3}{\left(x^2+5\right)^2}$

(23) (♣) $x^7\sqrt{5+3x^4}$

(24) $x^3\cos\left(x^2\right)$

(25) (♣) $x^5e^{x^3}$

(26) $x\sin(x)\cos(x)$

(27) $\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^2$

(28) (♣) $\ln(x)^3$

(29) $x^3\ln(5x)$

(30) $\dfrac{\ln(x)}{x^5}$

12 Całki nieoznaczone

12.1 Całkowanie funkcji wymiernych

Zadanie 12.1.1. Rozbić na ułamki proste powyższe funkcje a następnie wyznaczyć jakąś ich funkcję pierwotną:

(1) (♣) $\dfrac{1}{(x-2)(x+3)}$

(2) (♣) $\dfrac{1}{(x-1)\left(x^2+1\right)}$

(3) $\dfrac{x^2+x}{\left(x^2+1\right)^3}$

(Można, ale nie musi, znaleźć wzór rekurencyjny wyrażający $I_n := \frac{1}{(x^2+1)^n}$ przez I_{n-1}.)

(4) $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$

(5) (♣) $\dfrac{x-1}{x^2-2x-3}$

(6) $\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)}$

(7) (♣) $\dfrac{1}{x^4+1}$

(8) $\dfrac{x^6+x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

(Można, ale nie musi, korzystać ze wzoru z (3).)

(9) $\dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)}$

(10) (♣) $\dfrac{1}{(3x+5)^2}$

(11) (♣) $\dfrac{4x-5}{x^2-2x+10}$

(12) (♣) $\dfrac{2x^3+x^2-4x+7}{x^2+x-2}$

(13) (♣) $\dfrac{x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}$

(14) $\dfrac{3x^2+x-4}{x^3+5x^2+9x+5}$

12.2 Całkowanie funkcji trygonometrycznych

Zadanie 12.2.1. Odpowiednim trygonometrycznym podstawieniem, wyznaczyć jakąś ich funkcję pierwotną powyższych funkcji:

(1) (♣) $\sin^4(x)$

(2) (♣) $\operatorname{ctg}^2(x)$

(3) $\operatorname{tg}^3(x)$

(4) $\dfrac{\cos^4(x)}{\sin^2(x)}$

(5) (♣) $\dfrac{1}{\cos^4(x)}$

(6) (♣) $\dfrac{1}{\sin(x)(2+\cos(x)-2\sin(x))}$

(7) $\dfrac{1}{\sin(x)\cos^2(x)}$

(8) (♣) $\dfrac{\cos^3(x)}{\sin(x)}$

(9) $\dfrac{1}{\sin^4(x)}$

(10) (♣) $\dfrac{1}{5+\sin(x)+3\cos(x)}$

(11) $\dfrac{\sin^2(x)\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$

Zadanie 12.2.2 (z egzaminu). Oblicz

$$\int \frac{\operatorname{tg}(x)\sin(x)}{1-\sin(x)}dx.$$

12.3 Całkowanie przez podstawienie

Zadanie 12.3.1 (♣). Odpowiednim podstawieniem, wyznaczyć jakąś ich funkcję pierwotną powyższych funkcji:

(1) $\dfrac{x}{1+\sqrt{x-1}}$

(2) $\dfrac{e^{-x}}{e^{2x}-2e^x+2}$

(3) $\dfrac{2}{x-3\sqrt{x+10}}$

12.3.1 Całkowanie przez podstawienie Eulera

Zadanie 12.3.2 (♣). Obliczmy całkę

$$\mathcal{I}_I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$$

za pomocą pierwszego podstawienia Eulera.

Zadanie 12.3.3 (♣). Obliczmy całkę

$$\mathcal{I}_{II} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$$

za pomocą drugiego podstawienia Eulera.

Zadanie 12.3.4 (♣). Przetestujmy wreszcie *trzecie podstawienie Eulera* na całce

$$\mathcal{I}_{III} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}.$$

13 Całki oznaczone

13.1 Obliczenie całek oznaczonych

Zadanie 13.1.1. Obliczyć całki oznaczone:

(1) (♣) $\int_0^{2\pi} \mathrm{x}e^x \sin(x+2)dx$

(2) $\int_0^{8\pi} x^2 e^{2x} \cos(x+5)dx$

Zadanie 13.1.2 (z egzaminu – ♣). Oblicz

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi^2/4} \cos^5(\sqrt{x})\ \sin^4(\sqrt{x})\ \ \frac{1}{\sqrt{x}}dx.$$

Zadanie 13.1.3. Oblicz

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi^2/4} \cos^7(\sqrt{x})\ \sin^6(\sqrt{x})\ \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

14 Całki niewłaściwe

14.1 Zbieżność całek niewłaściwych

Zadanie 14.1.1. Sprawdzić zbieżność całek niewłaściwych (nie obliczając ich):

(1) $\int_a^{3a} \frac{2x}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

(2) (♣) $\int_0^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$

(3) $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2}\cos\left(\frac{\pi}{1-x}\right)dx$

(4) (♣) $\int_2^6 \frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}\,dx$

(5) (♣) $\int_{-1}^{-2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

(6) $\int_0^1 \frac{1}{e^x-\cos(x)}\,dx$

14.2 Obliczenie całek niewłaściwych

Zadanie 14.2.1. Oblicz całki niewłaściwe:

(1) (♣) $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx$

(2) (♣) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{x^4+1}\,dx$

Narysować obszar, którego pole jest równe całce (2).

Zadanie 14.2.2. Oblicz całki niewłaściwe:

(1) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin(x)}\,dx$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan(x)^2}{x^2+1}\,dx$

Zadanie 14.2.3 (z egzaminu – ♣). Orzec (podając uzasadnienie), czy zbieżna jest całka niewłaściwa

(1) $$\int_0^\infty \frac{1}{(x^4+7x+2)^{1/5}}dx\ .$$

Zbadać zbieżność całki

(2) $$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^2}dx$$

i, w przypadku zbieżności, obliczyć ją.

Zadanie 14.2.4 (z egzaminu). Orzec (podając uzasadnienie), czy zbieżna jest całka niewłaściwa

(1) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\cos x)}{x^{2/5}}\,dx\,.$$

Zbadać zbieżność całek

(2) $$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx\,,$$

(3) $$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}\, x\,dx\,,$$

i obliczyć te, które są zbieżne.

Zadanie 14.2.5 (z egzaminu – ♣). Orzec (podając uzasadnienie), czy zbieżna jest całka niewłaściwa

(4) $$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[2021]{x^{2022}+2x^{1011}+x^{1101}}}dx\ .$$

Zbadać zbieżność całki

(5) $$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}dx$$

i, w przypadku zbieżności, obliczyć ją.

15 Szeregi

15.1 Szeregi liczbowe

Zadanie 15.1.1. Sprawdzić zbieżność szeregów liczbowych

(1) (♣) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2n+1}$.

(2) (♣) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{\frac{3}{2}}+4}{n^3+1}$.

(3) (♣) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$.

(4) (♣) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

(5) (♣) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)(\ln(\ln(n)))^{1+p}}$.

(6) (♣) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^2+2n+1}$.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n!}}{10^n}$.

(8) (♣) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

(9) (♣) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

(10) (♣) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3+1}$.

(11) (♣) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n\ln n)^3}$.

(12) (♣) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!4^n}{n^n}$.

15.2 Szeregi potęgowe

Zadanie 15.2.1. Korzystając z różniczkowania lub całkowania szeregów potęgowych wyznaczyć jawną postać funkcji, której szereg potęgowy ma następującą postać określając jego promienie zbieżności:

(1) (♣) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

(2) (♣) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$.

(3) (♣) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

(4) (♣) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

(5) (♣) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$.

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$.

(7) (♣) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$.

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) x^{2n}$.

Zadanie 15.2.2 (z egzaminu – ♣). Zbadaj zbieżność szeregu liczbowego, w zależnośći od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$:

(1) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \ln n)^p} \quad .$$

Podaj promień zbieżności poniższego szeregu potęgowego. Zbadaj zbieżność na krańcach przedziału. Następnie, korzystając z różniczkowania bądź całkowania szeregów, wyznacz jawną postać funkcji:

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1} \quad .$$

Zadanie 15.2.3 (z egzaminu). Zbadaj zbieżność szeregu liczbowego, w zależnośći od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$:

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p} \quad .$$

Podaj promień zbieżności poniższego szeregu potęgowego. Zbadaj zbieżność na krańcach przedziału. Następnie, korzystając z różniczkowania bądź całkowania szeregów, wyznacz jawną postać funkcji:

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n \quad .$$