Matematyka I

Seria zadań do przygotowania się do drugiego kolokwium

28 maja 2026

WYDZIAŁ FIZYKI
UNIWERSYTET WARSZAWSKI

Wprowadzenie

Materiał niniejszego zbioru jest całkowicie wzięty z zbiorów zadań J. Kamińskiego, K. Grabowskiej, J. Wojtkiewicza, P. Chankowskiego, A. Bednorza, M. Misiaka, K. Wohfelda i innych.
UWAGA! Symbolem ♣ oznaczone są zadania kluczowe do przygotowania się do kolokwium.

Spis treści

6 Ciągłość **4**

8 Różniczkowalność i pochodne **4**
8.1 Różniczkowalność 4
8.2 Pierwsze pochodne 5
8.3 Wyższe pochodne 6

9 Granice funkcji **7**

10 Przebieg funkcji **9**
10.1 Rozwinięcie Taylora funkcji 9
10.2 Badanie przebiegu zmienności funkcji 9
10.3 Dodatkowe zadania 11

6 Ciągłość

Zadanie 6.0.1 (♣). Wykaż, opierając się na def. Cauchy'ego, że $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła w punkcie $x = 2$.

Zadanie 6.0.2 (♣). Zbadać ciągłość funkcji: $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$

Zadanie 6.0.3 (♣). Ciągłość jednostajna: opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła jednostajnie na przedziale $[1, +\infty[$.

Zadanie 6.0.4 (♣). Opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, 2[$.

Zadanie 6.0.5 (♣). Opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ nie jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, +\infty[$.

Zadanie 6.0.6. Opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ nie jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, +\infty[$.

Zadanie 6.0.7. Czy funkcja $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ jest jednostajnie ciągła w przedziale $]0, 1]$?

Zadanie 6.0.8. Czy funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest jednostajnie ciągła w przedziale $]0, \infty[$?

Zadanie 6.0.9. Czy funkcja $f(x) = e^x$ jest jednostajnie ciągła w przedziale $]0, \infty[$? A w przedziale $]-\infty, 0]$?

Zadanie 6.0.10 (♣). Pokazać, że *funkcja Dirichleta*: $f_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ nie jest ciągła w żadnym punkcie.

Zadanie 6.0.11. Pokazać, że funkcja Dirichleta jest granicą całkiem przyzwoicie wyglądającego ciągu: $f_D(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{k\to\infty} [\cos(n!\pi x)]^{2k}$ (zwrócić uwagę na kolejność granic!)

8 Różniczkowalność i pochodne

8.1 Różniczkowalność

Zadanie 8.1.1 (♣). Pokazać, że funkcja $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$ jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$.

Zadanie 8.1.2 (♣). Obliczyć (jeśli istnieje) $f'(1)$ dla funkcji: $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3x + 1 & \text{dla} \quad x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 4 & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}$

Zadanie 8.1.3 (♣). Obliczyć (jeśli istnieją) $f'_+(0)$, $f'_-(0)$, $f'(0)$ dla funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla} \quad x < 0 \\ x(1-x)(2-x) & \text{dla} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Zadanie 8.1.4 (z kolokwium – ♣).

1. Dookreśl funkcję f na odcinku $]0, \pi/2[$ tak, żeby była dobrze zdefiniowana, mając dany wzór
$$f(x) = \arctan e^{\frac{1}{\ln[\tan(x)]}} .$$
2. Podaj wzór na funkcję g odwrotną do f, jej dziedzinę i obraz.

3. Na jakim zbiorze argumentów funkcja g jest różniczkowalna? Jasno uzasadnij swoją odpowiedź.

Zadanie 8.1.5 (z kolokwium – ♣).

1. Rozstrzygnij, czy funkcja
$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \forall x \leq 1 \\ x^3 - x^2 - x + 1 & \forall x > 1 \end{cases}$$
jest ciągła/różniczkowalna w $x = 1$.

2. Rozstrzygnij, czy funkcja
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \leq 0 \\ x^3 \sin\left(x^{-2}\right) & \forall x > 0 \end{cases}$$
jest ciągła/różniczkowalna w $x = 0$.

Zadanie 8.1.6 (z kolokwium).

1. Dookreśl funkcję f na odcinku $]0, \pi/2[$ tak, żeby była dobrze zdefiniowana, mając dany wzór
$$f(x) = \arctan e^{\frac{2}{\ln[\tan^2(x)]}}.$$

2. Podaj wzór na funkcję g odwrotną do f, jej dziedzinę i obraz.

3. Na jakim zbiorze argumentów funkcja g jest różniczkowalna? Jasno uzasadnij swoją odpowiedź.

8.2 Pierwsze pochodne

Zadanie 8.2.1. Niech $f(x) = \sqrt{9x+2}$. Obliczyć z definicji $f'(3)$.

Zadanie 8.2.2. Niech $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Obliczyć z definicji $f'(2)$.

Zadanie 8.2.3. Niech $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$. Obliczyć z definicji $f'(1)$.

Zadanie 8.2.4 (♣). Niech $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Obliczyć z definicji $f'(2)$.

Zadanie 8.2.5 (♣). Niech $f(x) = e^{x-1}$. Obliczyć z definicji $f'(3)$.

Zadanie 8.2.6. Obliczyć pochodne funkcji po skorzystaniu z odpowiednich twierdzeń:

1. $\dfrac{1}{x^3-1}$;
2. $\dfrac{x^2+2x+2}{x^2-1}$;
3. (♣) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$;
4. $\cos^5 x$;
5. $\sin(5x-3)$;
6. (♣) $\sin(\sqrt[3]{1-x^3})$;
7. (♣) $\dfrac{x^2}{4^x}$;
8. $\arcsin\dfrac{2}{x}$;

9. $\ln \sin x$;
10. $\operatorname{arctg}(x - \sqrt{1+x^2})$;
11. (♣) $e^{\sqrt{2+x^2}}$;
12. (♣) $\cosh(x^3 - 2x + 1)$;

Zadanie 8.2.7. Obliczyć pochodne funkcji:

1. x^x;
2. (♣) $(\sin x)^{\cos x}$;
3. $x^{\sin x}$.

8.3 Wyższe pochodne

Zadanie 8.3.1. Obliczyć pierwsze, drugie i trzecie pochodne funkcji:

1. (♣) $f(x) = e^{-x^2}$;
2. $f(x) = \operatorname{tg} x$;
3. $f(x) = \operatorname{th} x$.

Zadanie 8.3.2. Obliczyć $n-$te pochodne funkcji $f(x)$:

1. $f(x) = \sin x$;
2. $f(x) = \cos x$;
3. $f(x) = \sinh x$;
4. $f(x) = \cosh x$;
5. (♣) $f(x) = e^{2x}$;
6. $f(x) = e^{-3x}$;
7. (♣) $f(x) = \sin^2 x$; *Wsk.* Wyrazić $\sin^2 x$ przez funkcję trygonometryczną podwojonego kąta.
8. $f(x) = \cos^2 x$;
9. $f(x) = \ln x$;
10. $f(x) = \frac{1}{(x+1)2}$;
11. (♣) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$; *Wsk.* Rozłożyć na ułamki proste.
12. $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$;
13. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

9 Granice funkcji

Zadanie 9.0.1. Oblicz następujące granicy:

(1) (♣) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$

(2) (♣) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}}$

(3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^x - e^{-x})^2}{x^2\cos(x)}$

(4) (♣) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{a^{\ln(x)}}{x^c} \quad (a>0)$

(5) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg}(x)-1}{\sin(x)-\cos(x)}$

(6) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\sin(x)}{x^3}$

(7) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{2x-1}$

(8) $\lim_{x\to\alpha} \left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2\alpha}\right)\left(e^{\sin(\alpha)} - e^{\sin(x)}\right)\right]$

(9) (♣) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln[\ln(x)]}{x}$

(10) (♣) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{x}{\ln(x)}\right)$

(11) $\lim_{x\to\infty} (\pi - 2\arctan(x))\ln(x)$

(12) $\lim_{x\to 0^-} (1-x)^{1-\ln(x)}$

(13) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - (\operatorname{ctg}(x))^2\right)$

(14) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

(15) (♣) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{\sin(x)}\right)$

(16) $\lim_{x\to\infty} \left(x^{\frac{1}{x}}\right)$

(17) (♣) $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin(x)}$

(18) $\lim_{x\to 1} \left(x^{\frac{1}{1-x}}\right)$

(19) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg}(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(20) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\arcsin(x)}{x^3}$

(21) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x-1}$

(22) (♣) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{a^x-1}{x(a-1)}\right)^{\frac{1}{x}}, a>1$

Zadanie 9.0.2. Obliczyć następujące granice:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{\operatorname{tg} x - x}$;

4. (♣) $\lim\limits_{x\to 0_+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-1}{\sin^2 x}$;

6. (♣) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$;

11. (♣) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-\cos x}-\dfrac{1}{2x^2}\right)$;

12. (♣) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{-x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

16. (♣) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\arctan x-\dfrac{\pi}{2}\right)+x\right]$.

Zadanie 9.0.3 (z kolokwium). Oblicz następujące granice:

(1) (♣) $\lim_{x\to 0}\ \dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-1-\sin x}{\sinh^2 x}$

(2) $\lim_{x\to 0}\ (\cos^2 x)^{\frac{1}{x^2}}$

(3) $\lim_{x\to 0}\ \left(\dfrac{1}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$

(4) $\lim_{x\to 0}\ \dfrac{\sqrt{\ln(1+2x^2)}}{\sin x}$

Zadanie 9.0.4 (z kolokwium). Oblicz następujące granice:

(1) (♣) $\lim_{x\to 0}\ \dfrac{x\cos x-\sin x}{x(\ln(1+x)-x)}$

(2) $\lim_{x\to 0^+}\ (1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}}$

(3) $\lim_{x\to 0}\ (\cos x)^{\frac{1}{\arcsin^2 x}}$

(4) (♣) $\lim_{x\to 1}\ \left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

10 Przebieg funkcji

10.1 Rozwinięcie Taylora funkcji

Zadanie 10.1.1 (z kolokwium – ♣). Znajdź punkt przegięcia funkcji $f(x)$

$$f(x) = \arctan(2x)$$

i korzystając z twierdzenia Taylora podaj jej rozwinięcie do drugiego nieznikającego rzędu wokół tego punktu.

Zadanie 10.1.2 (z kolokwium – ♣). Znajdź punkt przegięcia funkcji $f(x)$

$$f(x) = \arcsin(x) + \pi x + e^2$$

i korzystając z twierdzenia Taylora podaj jej rozwinięcie do trzeciego nieznikającego rzędu wokół tego punktu.

Zadanie 10.1.3. Rozwinać w szereg Taylora wokół $x_0 = 0$ do 3. nieznikajacego rzedu włacznie funkcje:

1. ♠ $f(x) = e^{\sin x}$;
2. ♠ $f(x) = \operatorname{tg} x$ (tu $|x| < \frac{\pi}{2}$);
3. $g(x) = \ln(1 + \sin x)$;
4. $h(x) = \ln(\cos x)$ (tu $|x| < \frac{\pi}{2}$).

Zadanie 10.1.4. Rozwinać w szereg Taylora wokół $x_0 = 0$ funkcje $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Skomentować wynik.

10.2 Badanie przebiegu zmienności funkcji

Przez zbadanie przebieg zmienności funkcji rozumie się na ogół wykonanie następujących czynności:

- Określenie dziedziny.
- Sprawdzenie, czy funkcja jest parzysta, nieparzysta lub okresowa.
- Wyznaczenie asymptot wykresu tej funkcji.
- Wyznaczenie punktów ekstremalnych.
- Wyznaczenie punktów przegięcia.
- Naszkicowanie wykresu.

Zadanie 10.2.1. Zbadać przebieg zmienności następujących funkcji:

(1) (♣) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-4}$,

(2) (♣) $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 9$,

(3) (♣) $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$,

(4) $f(x) = \dfrac{1-x^3}{x^2}$,

(5) (♣) $f(x) = x + \ln\left(x^2-1\right)$,

(6) $f(x) = \arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,

(7) (♣) $f(x) = x\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x$,

(8) $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$,

(9) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$,

(10) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$,

(11) (♣) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$,

(12) (♣) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$,

(13) $f(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{Sin}[2x] + \mathrm{Cos}[x]$,

(14) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$,

(15) $f(x) = (|1+x|)^{\frac{3}{2}}/\sqrt{x}$,

(16) $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$.

Zadanie 10.2.2 (z kolokwiów). Zbadać przebieg zmienności następujących funkcji:

(1) $f(x) = \dfrac{x^2(x-2)}{x^2+2x+1}$.

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2}$,

(3) $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2-2}$,

(4) $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x^2-2}$,

(5) $g(x) = \dfrac{x-1}{x^3}$,

(6) $f(x) = (x-3)^{\frac{1}{3}} - 3x$,

(7) $f(x) = \left(\dfrac{x^3}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}$,

(8) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

(9) $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$,

(10) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

Zadanie 10.2.3 (z kolokwium – ♣). Przedstawiwszy pierwszą pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)^2}{x^2+1}$$

w postaci:

$$f'(x) = \frac{(x-a)c(x)}{(x^2+1)^2}$$

(dobierając odpowiednie $a \in \mathbb{R}$) wykaż, iż wielomian trzeciego stopnia $c(x)$ ma tylko jedno miejsce zerowe $x = x_0$ (nie jest konieczne znalezienie tego x_0). Następnie, na podstawie otrzymanych wyników i nie używając drugiej pochodnej $f''(x)$, zbadaj przebieg funkcji $f(x)$ (dziedzina, asymptoty, punkty krytyczne i przegięcia) i naszkicuj jej wykres.

Zadanie 10.2.4 (z egzaminów). Zbadać przebieg zmienności następujących funkcji:

(1) (♣) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-9}$,

(2) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-x-2}$,

(3) (♣) $f(x) = |x|e^{-x^2}$.

Zadanie 10.2.5. Zbadać przebieg zmienności następujących funkcji:

1. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$;
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x\sqrt{x}}$;
3. $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$;
4. $f(x) = xe^{-x^2}$;
5. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$;
6. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}e^{-\frac{x^2}{3}}$

10.3 Dodatkowe zadania

Zadanie 10.3.1. Znaleźć styczne i prostopadłe do następujących krzywych w następujących punktach:

1. paraboli $y = x^2$ w punkcie $x = 3$;
2. wykresu funkcji $y = e^x$ w punkcie $x = 1$;
3. wykresu funkcji $y = \ln x$ w punkcie $x = e^2$;
4. krzywej danej równaniem $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (jaka to krzywa?) w punkcie $(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \sqrt{3})$;
5. krzywej danej równaniem $x^2 + xy + y^2 = 3$ (jaka to krzywa?) w punkcie $(1, 1)$.

Zadanie 10.3.2. Do rzeki o szerokości 30 m wpada pod kątem prostym kanał o szerokości 10 m. Jaka jest największa długość pnia drewna, który może wpłynąć z kanału do rzeki (lub vice versa)?

Zadanie 10.3.3. Światło porusza się tak, aby czas jego przejścia pomiędzy dwoma punktami był możliwie najkrótszy. Pokazać, że z tej zasady wynika:

1. *Gdy rozpatrujemy zjawisko odbicia światła na granicy dwóch ośrodków* – wynika zasada, że kąt padania jest równy kątowi odbicia;
2. *Gdy rozpatrujemy przejście z jednego ośrodka do drugiego* – wynika prawo Snella.

Zadanie 10.3.4. Znaleźć największą wartość funkcji $f(x)$ na zbiorze liczb rzeczywistych: $f(x) = (7 + x)\sqrt[3]{11 - 3x}$.

Zadanie 10.3.5. Znaleźć objętość największego stożka wpisanego w kulę.

Zadanie 10.3.6. Znaleźć objętość najmniejszego stożka opisanego na kuli.

Zadanie 10.3.7. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ w jej punkcie przegięcia. (Plus definicja punktu przegięcia).

Zadanie 10.3.8. Napisać równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = e^{-x^2}$ w jej punktach przegięcia.

Zadanie 10.3.9. Pokazać, że funkcja $f(x) = xe^{-x^2}$ jest różnowartościowa na przedziale $]\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty[$. Znaleźć pozostałe przedziały, na których jest różnowartościowa.

Zadanie 10.3.10. Pokazać, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność

$$2x \arctan x \geq \ln(1 + x^2).$$

Zadanie 10.3.11. Pokazać, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Zadanie 10.3.12. Pokazać, że jeżeli x_0 jest pierwiastkiem *wielokrotnym* wielomianu $P(x)$, to x_0 jest też pierwiastkiem pochodnej $P'(x)$ tego wielomianu.

Zadanie 10.3.13. Wykazać następujące nierówności:

1. $\ln x \leq \sqrt{x}$ dla $x > 0$;
2. $\ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) < \frac{1}{x} + \ln x$ dla $x > 0$;
3. $\ln x \leq \frac{x - 1}{\sqrt{x}}$ dla $x > 0$, $x \neq 1$;
4. $2 \ln x < x - \frac{1}{x}$ dla $x > 1$;
5. $\frac{2}{2x + 1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}$
6. $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$ dla $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$;
7. $\sin x \cdot \operatorname{tg} x > x^2$ dla $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$;

Zadanie 10.3.14. Pokazać, że

$$\frac{x}{x + 1} \leq \ln(1 + x) \leq x \quad \text{dla} \quad x > -1.$$

Zadanie 10.3.15. Pokazać, że

$$x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha \quad \text{dla} x \geq 0 \quad \text{i} \quad \alpha \in]0, 1[$$

Zadanie 10.3.16. Pokazać, że $\arctan \frac{1}{x} + \arctan x = \frac{\pi}{2}$ dla $x > 0$.

Zadanie 10.3.17. Wykazać, że zachodzą równości:

1. $\arctan x + \arctan \frac{1 - x}{1 + x} = \frac{\pi}{x}$ dla $x > -1$;
2. $2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1 + x^2} = \pi \operatorname{sgn} x$ dla $|x| > 1$;
3. $3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$ dla $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$;