Matematyka I

Seria zadań do przygotowania się do pierwszego kolokwium

28 maja 2026

WYDZIAŁ FIZYKI
UNIWERSYTET WARSZAWSKI

Wprowadzenie

Materiał niniejszego zbioru jest całkowicie wzięty z zbiorów zadań J. Kamińskiego, K. Grabowskiej, J. Wojtkiewicza, P. Chankowskiego, A. Bednorza, M. Misiaka, K. Wohfelda i innych.
UWAGA! Symbolem ♣ oznaczone są zadania kluczowe do przygotowania się do kolokwium.

Spis treści

1 Logika **4**
1.1 Prawa logiki (tautologie) . . . 4
1.2 Rozpisanie zadań symbolami logicznymi . . . 4
1.3 Dowodzenie praw logiki . . . 5
1.4 Dowód nie wprost . . . 6

2 Teoria zbiorów **8**
2.1 Tożsamości teoriomnogościowe . . . 8
2.2 Przedstawienie zbiorów . . . 9
2.3 Moc zbiorów . . . 9
2.4 Kwantyfikatory . . . 9

3 Indukcja matematyczna **10**
3.1 Dowody indukcyjne . . . 10

5 Ciągi **12**
5.1 Granicy ciągów . . . 12

1 Logika

1.1 Prawa logiki (tautologie)

Zadanie 1.1.1 (♣). Udowodnić, że:

1. $p \vee q$ jest równoważne $q \vee p$;
2. $p \wedge q$ jest równoważne $q \wedge p$;
3. $p \wedge (q \vee r)$ jest równoważne $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;
4. $p \vee (q \wedge r)$ jest równoważne $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$;
5. $\overline{\overline{p}}$ jest równoważne p;
6. $p \Rightarrow q$ jest równoważne $\overline{p} \vee q$;
7. $p \vee q$ jest równoważne $\overline{\overline{p} \wedge \overline{q}}$;
8. $p \Rightarrow q$ jest równoważne $\overline{p \wedge \overline{q}}$;
9. $p \Rightarrow q$ jest równoważne $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$;
10. $p \Leftrightarrow q$ jest równoważne $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Zadanie 1.1.2. Znaleźć tabelkę logiczną zdania złożonego $(F \vee G) \wedge \overline{(F \wedge G)}$. Czy przypomina nam jakąś znaną bramkę logiczną?

1.2 Rozpisanie zadań symbolami logicznymi

Zadanie 1.2.1 (♣). Rozważmy następujące zdania:

A: „Adam przyjdzie na imprezę'';

B: „Bartek przyjdzie na imprezę'';

C: „Cezary przyjdzie na imprezę'';

D: „Dawid przyjdzie na imprezę''.

Rozpisz poniższe zdania za pomocą **symboli logiki**:

1. Jeśli Dawid przyjdzie na imprezę, to Bartek i Cezary też przyjdą.
2. Cezary przyjdzie na imprezę, pod warunkiem, że Adam i Bartek nie przyjdą.
3. Dawid przyjdzie na imprezę wtedy i tylko wtedy, gdy Cezary przyjdzie i Adam nie przyjdzie.
4. Jeśli Dawid przyjdzie na imprezę, to, jeśli Cezary nie przyjdzie, to Adam przyjdzie.
5. Cezary przyjdzie na imprezę, pod warunkiem, że Dawid nie przyjdzie, ale, jeśli Dawid przyjdzie, to Bartek nie przyjdzie.
6. Warunkiem koniecznym, że Adam przyjdzie na imprezę jest to, że, jeśli Bartek i Cezary nie przyjdą, to Dawid przyjdzie.
7. Adam, Bartek i Cezary przyjdą na imprezę wtedy i tylko wtedy, gdy Dawid nie przyjdzie, ale, jeśli ani Adam ani Bartek nie przyjdzie, to Dawid przyjdzie pod warunkiem, że Cezary przyjdzie.

Zadanie 1.2.2 (♣). Pewna komisja, składająca się z Andrzeja, Beaty i Karoliny, musi omówić propozycję, a następnie głosować za nią. Używając zmiennych A, B, C, które odpowiednio mówią , ,Andrzej, Beata, Karolina głosował(a) za propozycją", rozpisz poniższe zdania za pomocą **symboli logiki**:

1. jeśli Karolina głosowała za propozycją, to Andrea też za nią głosował;
2. propozycja została przegłosowana jednogłośnie;
3. propozycja została odrzucona;
4. propozycja została przyjęta większością głosów, ale nie jednogłośnie;
5. tylko jedna osoba głosowała za propozycją;
6. jeśli Karolina głosowała za propozycją, to nikt inny nie głosował za nią;
7. tylko jedna osoba nie głosowała za propozycji;
8. Karolina głosowała inaczej niż Andrzej, ale Beta głosowała tak jak on.

Zadanie 1.2.3 (z kolokwium). Zapisz poniższe zdania za pomocą symboli logiki, sformułuj i udowodnij w tej formie poprawność ich zaprzeczeń, a następnie podaj te zaprzeczenia w języku potocznym.

a) Gdybym była/był bogata/bogaty, to bym miała/miał wielki dom i jeździła/jeździł drogim autem.

b) Jeśli będę bogata/bogaty, to kupię wielki dom lub drogie auto.

Zadanie 1.2.4 (z kolokwium). Rozstrzygnij, czy poniższe zdania złożone są prawdziwe dla wszystkich wartości zdań p, q oraz r:

(1) $(p \wedge \overline{p}) \Rightarrow \overline{p}\,;$

(2) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)]\,;$

(3) $[(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]\,.$

1.3 Dowodzenie praw logiki

Zadanie 1.3.1. Rozstrzygnij, czy zdanie złożone

$$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow \overline{q})$$

- zachodzi (jest tautologią),
- jest sprzeczne (nie jest spełnialne),
- nie zachodzi i nie jest sprzeczne.

Zadanie 1.3.2. Rozstrzygnij, czy twierdzenie

$$(\overline{p} \vee q) \wedge (q \Rightarrow \overline{r} \wedge \overline{p}) \wedge (p \vee r)$$

zachodzi, nie zachodzi, czy jest sprzeczne.

Zadanie 1.3.3. Czy zdanie $p \wedge \overline{q} \Rightarrow p \wedge q$ jest konsekwencją logiczną zdania $\overline{p}$?

Zadanie 1.3.4. Udowodnij, że zdanie $p \Rightarrow (q \wedge \overline{q})$ jest równoważne zdaniu $\overline{p}$.

Zadanie 1.3.5. Rozstrzygnij, które z następujących twierdzeń zachodzi, które nie zachodzi, a które jest sprzeczne:

(1) $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q} \Rightarrow \overline{p}\,;$

(2) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow \overline{q})\,;$

(3) $(p \vee q \Rightarrow r) \vee p \vee q\,;$

(4) $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r \wedge q) \wedge (q \Rightarrow \overline{r} \wedge p)\,;$

(5) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))\,;$

(6) $(p \vee q) \wedge (\overline{q} \wedge \overline{p})\,;$

(7) $(\overline{p} \Rightarrow q) \vee ((p \wedge \overline{r}) \Leftrightarrow q)\,;$

(8) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \overline{q})\,;$

(9) $(p \Rightarrow (q \vee r)) \vee (r \Rightarrow \overline{p})\,.$

Zadanie 1.3.6. Wiemy, że:

- jeśli Paweł jest szczupły, to: Karol nie jest blondynem lub Roksana nie jest wysoka;
- jeśli Roksana jest wysoka, to Ola jest miła;
- jeśli Ola jest miła i Karol jest blondynem, to Paweł jest szczupły;
- Karol jest blondynem.

Czy możemy wywnioskować, że Roksana nie jest wysoka?

Zadanie 1.3.7. Dostaniesz trzy pudełka. Jedno zawiera złoto, pozostające dwa są puste. Ponadto, na każdym pudełku naklejony jest napis:

- na pudełku 1 – „tu nie ma złota";
- na pudełku 2 – „tu nie ma złota";
- na pudełku 3 – „złoto jest w pudełku 2".

Tyko jeden napis mówi prawdę, pozostające dwa mówią fałsz. Posługując się logiką, wyznaczyć jedyne pudełko, które zawiera złoto.

Zadanie 1.3.8. Zgubiliśmy się w jaskini i mamy przed nami trzy bramki, jedna czerwona, druga niebieska a trzecia zielona. Wiemy, że wyjście znajduję się za jedną bramką – za pozostającymi dwoma czeka na nas okropny ziejący ogniem smok. Każda bramka nosi napis:

- na czerwonej bramce – „tu jest wyjście";
- na niebieskiej bramce – „tu nie ma wyjścia";
- na zielonej bramce – „wyjście nie znajduje się za niebieską bramką".

Wiedząc, że przynajmniej jeden napis jest prawdziwy i że przynajmniej jeden napis jest fałszywy, posługując się z logiką, wyznaczyć jedyną bramkę, za którą znajduje się wyjście z jaskini.

1.4 Dowód nie wprost

Zadanie 1.4.1 (♣). Rozpisz poniższe zdania za pomocą **symboli logiki**:

1. Przynajmniej jeden wśród Andrzeja, Beaty, Cezara i Doroty zdał egzamin.
2. Jeśli Andrzej zdał egzamin, to Cezary też zdał.
3. Jeśli Beata zdała egzamin, to Cezary nie zdał.
4. Jeśli Beata nie zdała egzaminu, to Andrzej zdał.
5. Jeśli Cezary zdał egzamin, to: Andrzej zdał lub Beata zdała.
6. Jeśli Dorota zdała egzamin, to Cezary też zdał.
7. Jeśli Dorota nie zdała egzaminu, to: Andrzej zdał lub Cezary zdał.

Udowodnić przez sprzeczność, że z powyższych założeń zachodzi to, że Andrzej zdał egzamin.

Zadanie 1.4.2 (z kolokwium). Odbywają się pewne wyścigi, w których startuje 3 zawodników, Karol, Mariusz i Sylwia. Zawodnicy zawsze zajmują różne miejsca. Dla każdego z poniższych 4 przypadków, napisz zdania A, B i C za pomocą **symboli logiki** i wstaw je do zdania

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$$

Odpowiedz na pytanie **czy tak otrzymane zdanie jest prawdziwe**, podając **uzasadnienie**. Każdy przypadek opracuj oddzielnie.

1. A :=„Jeśli Karol wygrał wyścig, to Mariusz przybył drugi lub Sylwia przybyła trzecia''; B :=„Sylwia nie zajęła trzeciego miejsca''; C :=„jeśli Mariusz nie zajął drugiego miejsca, to Karol nie wygrał wyścigu''.

2. A :=„Jeśli Karol wygrał wyścig, to Mariusz przybył drugi lub Sylwia przybyła trzecia"; B :=„Mariusz nie zajął drugiego miejsca"; C :=„jeśli Karol wygrał wyścig, to Sylwia nie zajęła trzeciego miejsca".

3. A :=„Jeśli Karol wygrał wyścig, to, jeśli Mariusz nie zajął drugiego miejsca, to Sylwia zajęła drugie miejsce"; B :=„Karol nie wygrał wyścigu"; C :=„jeśli Karol nie zajął trzeciego miejsca, to Karol zajął drugie miejsca".

4. A :=„Jeśli Karol wygrał wyścig, to, jeśli Mariusz zajął drugie miejsce, to Sylwia zajęła trzecie miejsce"; B :=„Mariusz nie zajął drugiego miejsca"; C :=„Karol wygrał, lub Sylwia przybyła trzecia".

Zadanie 1.4.3 (z kolokwium). Rozstrzygnij, czy poniższe zdanie złożone jest prawdziwe dla wszystkich wartości zdań p, q oraz r:

$$[(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]\,.$$

Zadanie 1.4.4 (z kolokwium). Rozstrzygnij, czy poniższe zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe:

$$\big((2+2=4) \wedge (7-5)=4)\big) \Rightarrow \big((2+2=4) \Rightarrow (7-5=4)\big)\,.$$

2 Teoria zbiorów

2.1 Tożsamości teoriomnogościowe

Zadanie 2.1.1 (♣). Wykazać, że

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
4. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
5. $A \cup (B \backslash C) = [(A \cup B) \backslash C] \cup (A \cap C)$.

Przypomnijmy sobie, że $A + B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Zadanie 2.1.2 (♣). Wykazać, że

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$;
4. $A = B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A + B = \emptyset$;
5. z $A + C = B + C$ wynika, że $A = B$.

Zadanie 2.1.3 (z kolokwium). Zapisz każde z dwóch poniższych zdań, dotyczących skończonych i niepustych zbiorów A i B, takich, że $|A| > |B|$, za pomocą **symboli logiki**. W obu przypadkach odpowiedz na pytanie **czy zdanie jest prawdziwe**, podając **uzasadnienie**.

1. Z tego, że, jeżeli zbiór A zawiera się w zbiorze B lub zbiór A nie zawiera się w zbiorze B, to moc ich sumy jest mniejsza od mocy ich różnicy, wynika, że suma ich mocy jest równa trzykrotności mocy większego z nich.
2. Z tego, że, jeżeli zbiór A zawiera się w zbiorze B lub zbiór A nie zawiera się w zbiorze B, to moc ich sumy jest większa od mocy ich różnicy, wynika, że suma ich mocy jest równa trzykrotności mocy większego z nich.

Zadanie 2.1.4 (z kolokwium). Udowodnij następujące tożsamości dotyczące zbiorów A, B i C:

(1) $$((A \cap B = A \cap C) \wedge (A \cup B = A \cup C)) \iff (B = C) \ ;$$

(2) $$A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \ ;$$

(3) $$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C \ .$$

Zadanie 2.1.5 (z kolokwium). Sprawdź, czy poniższe zdania są prawdziwe dla wszystkich zbiorów A, B i C:

(1) $$(A \neq B) \implies [(C \setminus B) \neq (C \setminus A)] \ ;$$

(2) $$[(A \setminus B) = (A \setminus C)] \implies (B = C) \ ;$$

(3) $$[(A \cup B) \subset (A \cap B)] \implies (B = A) \ .$$

2.2 Przedstawienie zbiorów

Zadanie 2.2.1 (z kolokwium – ♣). Przedstaw zbiór wszystkich podzbiorów liczb rzeczywistych zawierających nie więcej niż trzy liczby całkowite, używając wyłącznie symbolów matematycznych.

Zadanie 2.2.2 (z kolokwium – ♣). Niech A będzie zbiorem punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, spełniających warunek $x^2+y^2 < 1$; niech $B \subset \mathbb{R}^2$ będzie dany poprzez nierówność $x \leq 2$; niech $C \subset \mathbb{R}^2$ odpowiada nierówności $(x-1)^2 + y^2 > 1$. Znajdź i naszkicuj podzbiory $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B \cap C$, $(B \setminus A) \cup C$, oraz $A \setminus C$.

Zadanie 2.2.3 (z kolokwium – ♣). Zapisz za pomocą notacji matematycznej zdanie: *dla każdych dwóch różnych liczb wymiernych istnieje liczba niewymierna większa od jednej z nich i mniejsza od drugiej z nich.*

2.3 Moc zbiorów

Wprowadźmy symbol $\mathcal{P}(A) := \{A' | A' \subseteq A\}$, dla każdego zbioru A.

Zadanie 2.3.1 (♣). Załóżmy, że $|A| = n$ i $|B| = m$. Obliczyć:

1. $|A \times B|$;
2. $\left|A^B\right|$, gdzie $A^B = \{f | f : B \to A\}$;
3. $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Zadanie 2.3.2. Pokazać, że $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))| = 4$.

2.4 Kwantyfikatory

Zadanie 2.4.1 (♣). Niech

1. xP oznacza to, że x jest Polakiem;
2. yS oznacza to, że y jest rodzajem sera;
3. zW oznacza to, że z jest rodzajem wódki;
4. xLy oznacza to, że x lubi y.

Ponad to, niech c oznacza Karola i d Dorotę. Sformalizuj następujące zdania za pomocą kwantyfikatorów:

1. Dorota lubi wszystkie rodzaje sera;
2. niektórzy Polacy lubią wszystkie rodzaje sera;
3. Dorota lubi niektóre rodzaje sera;
4. wszyscy Polacy lubią przynajmniej jeden rodzaj sera;
5. jest pewien rodzaj sera, który wszyscy Polacy lubią;
6. Karol nie lubi żadnego rodzaju sera;
7. wszyscy Polacy nie lubią żadnego rodzaju sera;
8. wszyscy Polacy lubią jakiś rodzaj sera i jakiś rodzaj wódki;
9. wszyscy Polacy, którzy lubią jakiś rodzaj sera, lubią też jakiś rodzaj wódki.

Zadanie 2.4.2 (♣). Napisać negację każdego z poniższych zadań za pomocą kwantyfikatorów:

1. Każdy kibic Legii jest zachwycony;
2. niektórzy notariusze są biedni;

3. niektórzy niepiśmienni podziwiają piśmiennych;
4. każdy piśmienny podziwia pewnego piśmiennego;
5. dla każdego x jest pewien y, taki, że $y > x$;
6. dla każdego x jest pewien y, taki, że dla każdego $z > y$ zachodzi $f(z) > x$.

3 Indukcja matematyczna

3.1 Dowody indukcyjne

Zadanie 3.1.1. Udowodnić, że:

1. (♣) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
2. (♣) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;
4. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$;
5. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$;
6. (♣) liczba $n^3 + 2n$ jest podzielna przez 3, dla każdego n;
7. liczba $17n^3 + 103n$ jest podzielna przez 6 dla każdego n;
8. liczba $2^n + 1$ jest podzielna przez 3, dla każdego nieparzystego n;
9. $\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$, o ile tylko $q \neq 1$;
10. $(1 + a)^n \geq 1 + na$ dla każdej liczby$a > -1$ (nierówność Bernoulliego) (Strzelecki, 1.18).

Zadanie 3.1.2 (♣). Znaleźć wzór pozwalający wyrazić moc $|\mathcal{P}(A)|$ poprzez moc $n = |A|$.

Zadanie 3.1.3 (z kolokwium). W mózgu mamy około stu miliardów neuronów. Myślenie odbywa się za pośrednictwem synaps.

a) Załóżmy, że każda myśl, powstająca w grupie neuronów połączonych n synapsami, polega na tym, że każda z tych synaps jest aktywna lub nie aktywna. **Oblicz** ile różnych myśli może powstać w układzie neuronów połączonych n synapsami.

b) Załóżmy, że w pewnym mózgu w myśleniu na temat rachunku różniczkowego i całkowego (RRiC) biorą udział ustalone grupy neuronów. W pierwszej neurony są połączone dwiema synapsami, w drugiej trzema, w trzeciej czterema, i tak dalej, aż do N. **Udowodnij** przez indukcje, że liczba różnych myśli, które może pomyśleć ten mózg na temat RRiC wynosi $2^{N+1} - 4$.

Zadanie 3.1.4. Udowodnij następujące twierdzenia:

a) (♣) Liczba 3^n nie jest większa od liczby $(n + 2)!$, dla każdej liczby naturalnej n.

b) Suma pierwszych n dodatnich parzystych liczb naturalnych równa się $n(n + 1)$.

c) $\sum_{k=1}^{n} k(k + 1)(k + 2) = \frac{1}{4}n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ dla każdej liczby naturalnej n.

Zadanie 3.1.5 (z kolokwium).

a) Udowodnić **indukcyjnie**, że liczba $5^{2n+1} + 2^{2n+1}$ jest podzielna przez 7 dla $n \geq 0$.

b) Sprawdzić, że

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 3.1.6 (z kolokwium). W naszej galaktyce, zwanej Drogą Mleczną, jest około stu miliardów gwiazd.

a) Załóżmy, że w Drodze Mlecznej jest dokładnie n gwiazd. Korzystając z indukcji matematycznej, **udowodnij**, że ten zbiór gwiazd ma 2^n podzbiorów, wliczając zbiór pusty i jego samego.

b) Załóżmy, że wszechświat składa się z N takich samych galaktyk jak Droga Mleczna (w rzeczywistości galaktyki bywają różnych rozmiarów). **Udowodnij** przez indukcję, że w takim zbiorze gwiazd jest $(2^n)^N$ podzbiorów.

Zadanie 3.1.7 (z kolokwium). Stosując indukcję matematyczną (lub jakikolwiek inny uczciwy sposób) udowodnij nierówności

$$(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{1}{2}n(n-1)a^2\,; \tag{1}$$

$$(1+2+\cdots+n)\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \geq n^2\,; \tag{2}$$

oraz wykaż że liczba -1 jest zawsze podwójnym pierwiastkiem wielomianu

$$W_n(x) = (n+2)x^{n+2} + (n+4)x^{n+1} + x^n + (-1)^n\,. \tag{3}$$

Zadanie 3.1.8 (z kolokwium). Stosując indukcję matematyczną (kub jakąkolwiek inną metodą) udowodnić, że liczba

$$4^n + 6n - 10\,;$$

jest zawsze podzielna (bez reszty) przez 9, oraz, że $x = 1$ jest zawsze podwójnym pierwiastkiem wielomianu

$$W_n(x) = (4n+3)x^{n+2} - (7n+6)x^{n+1} + (3n+2)x^n + 1\,.$$

Zadanie 3.1.9 (z kolokwium). Stosując indukcję matematyczną (kub jakąkolwiek inną metodą) udowodnić, że liczba

$$4^n + 15n - 1$$

jest zawsze podzielna (bez reszty) przez 9, oraz że

$$n! > 2^n\,, \quad n \geq 4\,.$$

Zadanie 3.1.10 (z kolokwium). Stosując indukcję matematyczną (kub jakąkolwiek inną metodą) udowodnić, że liczba

$$n^7 - n$$

jest podzielna (bez reszty) przez 7, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, oraz że wielomian

$$W_n(x) = (n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1$$

jest podzielny (bez reszty) przez $x^2 - 2x + 1$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 3.1.11. Udowodnić indukcyjnie, że

$$a^n + b^n \leq (a+b)^n \leq 2^n(a^n + b^n)\,, \quad \forall a, b \geq 0\,.$$

5 Ciągi

5.1 Granicy ciągów

Zadanie 5.1.1. Wykazać, że:

1. (♣) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$, dla $x_n=\frac{3^n+1}{3^n+4}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$, dla $x_n=\frac{5n^2+6n}{5n^2-3}$;
3. (♣) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$, dla $x_n=\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, dla $x_n=\mathrm{n}((n+1)^{\frac{1}{100}}-n^{\frac{1}{100}})$;
5. (♣) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{100}$, dla $x_n=\sqrt[100]{n^{100}+n^{99}}-n$;
6. (♣) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{7}{3}$, dla $x_n=\sqrt[3]{(n+2)(n+4)(n+5)}-\sqrt[3]{n(n+1)(n+3)}$;
7. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}$, dla $x_n=\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}-\frac{2}{\sqrt[n]{4}-1}$;
8. (♣) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, dla $x_n=2^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)...\left(1+\frac{n}{n}\right)$;
9. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, dla $x_n=2^{-n}\frac{2n-1}{2n+1}\frac{2n-2}{2n+2}\cdots\frac{n}{3n}$;
10. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, dla $x_n=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)...\left(1+\frac{n}{n}\right)$;
11. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{\sqrt{4a+1}+1}{2}$, dla $x_1=\sqrt{a}$, a>0, $x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$, ..., $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$;
12. (♣) nie ma granicy ciągu $x_n=\cos\frac{n^2\pi}{n+2}$;
13. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, dla $x_n=\frac{\mathrm{n}5^n}{2^n3^{n+1}}$;
14. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{5}{4}$, dla $x_n=n\left(n+4\sqrt{n^2+n}-2\sqrt{n^2-n}-3\sqrt{n^2+2n}\right)$;
15. (♣) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=$-$\frac{3}{4}$, dla $x_n=n\left(n+2\sqrt{n^2-n+2}-4\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2n}\right)$;
16. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{4}$, dla $x_n=\sqrt{n^2+\sqrt{n^3+\sqrt{n^5}}}-\sqrt{n^2+\sqrt{n^3}}$;
17. (♣) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, dla $x_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$;
18. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, gdzie $y_1:=b>a=:x_1$, $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$, $y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$;
19. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\max\left\{1,a^2\right\}$, dla $x_n=\sqrt[n]{5a^{2n}+4a^n+3}$, a$\in\mathbb{R}$;
20. (♣) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=30\sqrt{22}$, dla $x_n=\left(n^7+7\right)^{-7}\sqrt{(n+2)^{100}-n^{100}-200n^{99}}$, a$\in\mathbb{R}$;
21. (♣) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$, dla $x_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-n+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;
22. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$, dla $x_n=\left(\frac{n^2+1}{n^3+1}+\frac{n^2+2}{n^3+2}+...+\frac{n^2+n}{n^3+n}\right)$;
23. (♣) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{2}{3}$, dla $x_n=\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\frac{3^3-1}{3^3+1}...\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$;
24. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$, dla $x_n=\sqrt[n]{1^4+2^4+...+n^4}$.

Zadanie 5.1.2 (♣). Znaleźć granicy ciągów:

1. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$
2. $x_n = \frac{3n^2+5n+4}{2+n^2}$
3. $x_n = \frac{2n^2-4n+3}{2n^3+3n+4}$
4. $x_n = \frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+4}}$
5. $x_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1}$
6. $x_n = \sqrt[3]{n^2-n^3} + n$
7. $x_n = \frac{6n^2+5n+4}{2+n^2}$
8. $x_n = \frac{4n^2-4n+3}{8n^3+3n+4}$
9. $x_n = \frac{1+2+3+...+n}{n^2}$
10. $x_n = \left(\frac{3n^2+n}{4n^2+7}\right)^3$
11. $x_n = (2^n + 3^n + 7^n)^{\frac{1}{n}}$
12. $x_n = 2^{-n} a\cos(\mathrm{n}\pi)$
13. $x_n = \left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{2n}$
14. $x_n = \left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}\right)\sqrt{n}$
15. $x_n = n(\ln(n) - \ln(n+2))$

Zadanie 5.1.3 (z kolokwium). Dla każdego z poniższych ciągów odpowiedź na pytania: czy ciąg jest **zbieżny**? Jeżeli tak, **jaka jest jego granica**?

a) $x_n = \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n + 4^n}$;

b) $x_n = \frac{(2n)!}{n!n^n 2^n}$;

c) $x_n = \sqrt[3]{n^3 - n^2} - n$.

Zadanie 5.1.4 (z kolokwium). Dla każdego z poniższych ciągów odpowiedź na pytania: czy ciąg jest **zbieżny**? Jeżeli tak, **jaka jest jego granica**?

a) $x_n = \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{3n}$;

b) $x_n = \frac{3n^3+3\sin^2(n)+17\cos^3(n)}{2(n+5)^3-17}$;

c) $x_n = n\left(\sqrt{\frac{n+1}{n+3}} - 1\right)$.

Zadanie 5.1.5 (z kolokwium). Wyznaczyć granicę ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie

a) $x_n := \sqrt[4]{n^4 + 2n^3} - \sqrt[4]{n^4 + n^3}$;

b) $x_n := \frac{(2n+1)(n+1)!}{\left(\frac{n}{2}\right)^n (3n+1)}$.

Zadanie 5.1.6 (z kolokwium). Znaleźć granice $n \to \infty$ ciągów:

(1) $x_n := \sqrt[3]{n^3+\pi n^2+n+\sin n} - \sqrt[3]{n^3+en^2+2021}$;

(2) $x_n := \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{\left(\frac{n^2-1}{n+1}\right)}$;

(3) $x_n := \frac{(2n)!}{n!(2n+1)^n}$;

(4) $x_n := \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$;

(5) $x_n := n\sin\left(\sqrt[3]{n^3+\pi n-2021} - \sqrt[3]{n^3+\frac{\pi}{2}n+2021}\right)$;

(6) $x_n := \frac{2n^2+\sin(n!)}{4n^2+\cos(\ln(n))}$;

(7) $x_n := 3n\ln\left(1-\sqrt[3]{n^3+e^2n+2022}+\sqrt[3]{n^3+e^3n-2022}\right)$;

(8) $x_n := \frac{\sin\left(n^7\right)+n^4\sin\left(\frac{7}{n}\right)+7n^2}{\cos\left(n^4\right)+4n^3}$;

(9) $x_n := \frac{(3n)!}{(3n+2)^n(2n)!}$;

(10) $x_n := 18n^2\left(1-\cos\left(\sqrt[3]{n^3-2022}-\sqrt[3]{n^3+\pi n+2022}\right)\right)$;

(11) $x_n := \frac{\sin\left(n^{17}\right)+n^4\log\left(\frac{17}{n}+1\right)+17n^2}{\cos\left(n^{18}\right)+18n^3}$;

(12) $x_n := \frac{(3n+1)!}{(3n+2)^n(2n-1)!}$.

Zadanie 5.1.7. Znaleźć granicy ciągów:

1. $x_n := \frac{2n^3+3n^2-4n+5}{5n^3-4n^2+3n-2}$
2. $x_n := \frac{(-1)^n}{2n^2-1}$
3. $x_n := \frac{\sqrt[3]{8n^3-n}}{\sqrt{9n^2+n}}$
4. $x_n := \frac{n}{\sqrt[3]{8n^3-n}-n}$
5. $x_n := \sqrt{3n^2+2n-5}-n\sqrt{3}$
6. $x_n := \sqrt[3]{n^3+4n^2}-n$
7. $x_n := \frac{3\cdot 2^{2n+2}-10}{5\cdot 4^{n-1}+3}$
8. $x_n := \frac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^n}$
9. $x_n := \sqrt[n]{10^n+10^{-n}+5^n\sin^2(n!)}$
10. $x_n := \sqrt[2n]{10^{100}} - \sqrt[n]{\frac{1}{10^{100}}}$
11. $x_n := \sqrt[n]{n^3+3n^2+5}$
12. $x_n := \frac{n!}{(n+1)!-n!}$
13. $x_n := \left(\frac{n^2+5}{n^2}\right)^{n^2}$
14. $x_n := \left(1+\frac{1}{n}-\frac{6}{n^2}\right)^{2n}$

15. $x_n := \frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}$
16. $x_n := \sqrt[2]{7} \cdot \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[8]{7} \cdots \sqrt[2^n]{7}$
17. $x_n := \frac{n^{100}}{100^n}$
18. $x_n := \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+3+\cdots+n}$

Dodatkowe zadania

Zadanie 5.1.8. Określić następujące zbiory:

1. Wspólna część wszystkich otoczeń punktu $0 \in \mathbb{R}$.
2. Suma otoczeń punktu $0 \in \mathbb{R}$.
3. Wspólna część wszystkich domkniętych półprostych prawostronnych.
4. Wspólna część wszystkich domkniętych półprostych $]-\infty, x]$ dla $x > 0$.
5. Wspólna część wszystkich otwartych półprostych $]-\infty, x[$ dla $x > 0$.
6. Suma wszystkich domkniętych półprostych $]-\infty, x]$ dla $x < 0$.
7. Suma wszystkich otwartych półprostych $]-\infty, x[$ dla $x < 0$.

Zadanie 5.1.9. Niech

$$\mathcal{P}_k(A) := \{B \in \mathcal{P}(A) \mid |B| = k\}$$

będzie zbiorem k–elementowych podzbiorów zbioru A. Udowodnić, że:

1. $|\mathcal{P}_0(A)| = 1$;
2. $|\mathcal{P}_1(A)| = |A|$;
3. istnieje podzbiór $P_k \subset A^k$, taki, że $|\mathcal{P}_k(A)| = |P_k|$.