LOGIKA

Zadanie 1 Zapisz podane formuły zdaniowe za pomocą symboli logicznych i sprawdź, że są tautologiami, a zatem opisują niezawodne reguły wnioskowania.

1.1 *"Jeżeli ze zdania p wynika zdanie q, a zdanie p jest prawdziwe, to zdanie q jest prawdziwe."*

1.2 *"Jeżeli ze zdania p wynika zdanie q, a zdanie q nie jest prawdziwe, to zdanie p nie jest prawdziwe."*

1.3 *"Jeżeli ze zdania p wynika zdanie q, i jednocześnie ze zdania p wynika zaprzeczenie zdania q, to zdanie p nie jest prawdziwe."*

1.4 *"Jeżeli ze zdania p wynika zdanie q, i jednocześnie z zaprzeczenia zdania p wynika zdanie q, to zdanie q jest prawdziwe."*

1.5 *"Jeżeli przynajmniej jedno ze zdań p i q jest prawdziwe, a zdanie p nie jest prawdziwe, to zdanie q jest prawdziwe."*

1.6 *"Zdanie q wynika ze zdania p wtedy i tylko wtedy gdy z zaprzeczenia zdania q wynika zaprzeczenie zdania p."*

1.7 *"Nie jest prawdą, że przynajmniej jedno ze zdań p i q jest prawdziwe, wtedy i tylko wtedy gdy oba zdania p i q są fałszywe."*

1.8 *"Nie jest prawdą, że oba zdania p i q są prawdziwe, wtedy i tylko wtedy gdy przynajmniej jedno ze zdań p i q jest fałszywe."*

1.9 *"Jeżeli ze zdania p wynika zdanie q, oraz ze zdania q wynika zdanie r, to ze zdania p wynika zdanie r."*

1.10 *"Jeżeli ze zdania p wynika, że przynajmniej jedno ze zdań q i r jest prawdziwe, a zdanie q nie jest prawdziwe, to ze zdania p wynika zdanie r."*

1.11 *"Jeżeli ze zdania p wynika zdanie q, oraz ze zdania p wynika zdanie r, to ze zdania p wynika koniunkcja zdań q i r."*

1.12 *"Zdanie r wynika z koniunkcji zdań p i q wtedy i tylko wtedy gdy ze zdania p wynika, że zdanie r wynika ze zdania q.*

1.13 *"Jeżeli przynajmniej jedno ze zdań p i q jest prawdziwe, a ze zdanie r wynika zarówno ze zdania p, jak i ze zdania q, to zdanie r jest prawdziwe."*

1.14 *"Jeżeli przynajmniej jedno ze zdań p i q jest prawdziwe, ze zdania p wynika zdanie r, a ze zdania q wynika zdanie s, to przynajmniej jedno ze zdań r i s jest prawdziwe."*

1.15 *"Ze zdania p wynika zdanie q oraz ze zdania q wynika zdanie p wtedy i tylko wtedy gdy zdania p i q są logicznie równoważne."*

Zadanie 2 Wyraź słowami ogólną zasadę logiczną wykorzystywaną w poniższych rozumowaniach (tak jak są podawane w zadaniu 1.):

2.1 *"Gdyby oskarżony był zabójcą, to musiał być obecny na miejscu zbrodni. Oskarżony ma alibi, nie był obecny na miejscu zbrodni. Zatem oskarżony nie jest zabójcą."*

2.2 *"Jeżeli Sokrates jest człowiekiem, to Sokrates jest śmiertelny. Sokrates jest człowiekiem. Zatem Sokrates jest śmiertelny."*

2.3 *"Na uroczystości będzie prezydent albo premier. Jeżeli będzie prezydent, to uroczystość będzie długa. Jeżeli będzie premier, to również uroczystość będzie długa. Zatem uroczystość będzie długa."*

2.4 *"Jeżeli na drzewie rosną jabłka, to drzewo jest jabłonią. Jeżeli drzewo jest jabłonią, to na drzewie rosna jabłka. Zatem drzewo jest jabłonią wtedy i tylko wtedy, gdy na drzewie rosną jabłka."*

2.5 *"Jeżeli Ania i Bartek się spotkają, to będzie to w piątek lub sobotę. Nie spotkają się w piątek. Jeżeli więc się spotkają, to będzie to w sobotę."*

2.6 *"Jeżeli zwierzę jest ptakiem, to ma pióra. Zatem jeżeli zwierzę nie ma piór, to nie jest ptakiem."*

2.7 *"Jeżeli zwierzę jest ptakiem, to ma pióra. Jeżeli zwierzę ma pióra, to potrafi latać. Zatem jeżeli zwierzę jest ptakiem, to potrafi latać."*

Zadanie 3 Zapisz za pomocą kwantyfikatorów zdania:

3.1 *"Dla każdej liczby naturalnej istnieje liczba naturalna większa od niej."*

3.2 *"Istnieje liczba naturalna większa od wszystkich innych liczb naturalnych."*

3.3 *"Dla dowolnych dwóch liczb naturalnych istnieje liczba naturalna podzielna przez obie z nich."*

3.4 *"Istnieje liczba wymierna nie będąca liczbą całkowitą."*

3.5 *"Wynik dodawania dowolnych dwóch liczb rzeczywistych nie zależy od kolejności dodawania."*

3.6 *"Istnieją dwie liczby rzeczywiste takie, że wynik dzielenia jednej przez drugą nie zależy od tego, którą dzielimy przez którą."*

3.7 *"Istnieje liczba rzeczywista taka, że wynik mnożenia jej przez dowoloną drugą liczbę rzeczywistą jest równy tej drugiej liczbie rzeczywistej."*

3.8 *"Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną."*

3.9 *"Istnieje liczba rzeczywista nie będąca kwadratem żadnej liczby rzeczywistej."*

3.10 *"Istnieją dwie różne liczby rzeczywiste których kwadrat jest równy 2."*

3.11 *"Dla dowolnych dwóch liczb rzeczywistych, jeśli są różne, to istnieje liczba wymierna większa od jednej z nich i mniejsza od drugiej z nich."*

3.12 *"Dla dowolnej liczby wymiernej istnieją dwie liczby calkowite, takie, ze ta liczba wymierna jest ich ilorazem."*

Zadanie 4 Rozstrzygnij, dla jakich wartości $x \in \mathbb{R}$ prawdziwe są formuły

4.1 $\exists n \in \mathbb{N} : n > x$

4.2 $\forall n \in \mathbb{N} : n > x$

4.3 $\exists n \in \mathbb{N} : n < x$

4.4 $\forall n \in \mathbb{N} : n < x$

4.5 $\exists n \in \mathbb{N}_+ : \frac{1}{n} < x$

4.6 $\forall n \in \mathbb{N}_+ : \frac{1}{n} < x$

4.7 $\exists n \in \mathbb{N} : 2^n > x$

4.8 $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > x$

4.9 $\neg(\exists n \in \mathbb{N} : 2^n \leq x)$

4.10 $\neg(\forall n \in \mathbb{N} : 2^n \leq x)$

4.11 $\forall y \in \mathbb{R}, y > x : y > 2$

4.12 $\exists y \in \mathbb{R}, y > x : y > 2$

4.13 $\forall y \in \mathbb{R}, y > x : y < 2$

4.14 $\exists y \in \mathbb{R}, y > x : y < 2$

Zadanie 5 Rozstrzygnij, czy prawdziwe są zdania

5.1 $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N} : n > x$

5.2 $\forall x \in \mathbb{R}_+\, \exists n \in \mathbb{N}_+ : \frac{1}{n} < x$

5.3 $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N} : 2^n > x$

5.4 $\exists n \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{R} : n > x$

5.5 $\exists n \in \mathbb{N}_+\, \forall x \in \mathbb{R}_+ : \frac{1}{n} < x$

5.6 $\exists n \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{R} : 2^n > x$

5.7 $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N}_+ : \frac{1}{n} < |x - y|$

5.8 $\exists n \in \mathbb{N}_+\, \forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R} : \frac{1}{n} < |x - y|$

5.9 $\forall n \in \mathbb{N}_+\, \forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R} : \frac{1}{n} < |x - y|$

5.10 $\forall n \in \mathbb{N}_+\, \exists y \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n} < |x - y|$

5.11 $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}, y > x : \sin y = 0$

5.12 $\exists y \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R}, x < y : \sin y = 0$

5.13 $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}, y > x : \sin y = 0$

5.14 $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N}_+\, \forall y \in \mathbb{R} : (|x - y| < \frac{1}{n}) \Rightarrow (|x^2 - y^2| < 1)$

5.15 $\exists n \in \mathbb{N}_+\, \forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R} : (|x - y| < \frac{1}{n}) \Rightarrow (|x^2 - y^2| < 1)$

Zadanie 6 Trzej bracia: Wojciech, Tomasz i Andrzej, zostali sportowcami, ale w różnych sportach: piłce nożnej, siatkówce, i kolarstwie.

- Najstarszy z braci został piłkarzem.
- Wojciech jest młodszy od Andrzeja.
- Siatkarz jest starszy od Tomasza.

Ustal kolejność wieku trzech braci, oraz który sport każdy z nich uprawia. **Opisz każdy krok rozumowania.**

Zadanie 7 Trzech rycerzy króla Artura - Lancelot, Galahad i Parsifal - zamieszkali w trzech zamkach, położonych w jednej linii, w różnej odległości od morza. W każdym z tych zamków zamieszkiwała również jedna z trzech bestii - smok, gryf oraz jednorożec.

- Galahad nie zamieszkał w zamku leżącym najbliżej morza.
- Gryf nie mieszkał w zamku sąsiadującym z zamkiem smoka.
- Lancelot i Galahad zamieszkali w sąsiadujących zamkach.

- Smok mieszkał dalej od morza niż jednorożec.
- Parsifal nie zamieszkał w zamku, w którym mieszkał gryf.

Ustal, w którym zamku mieszkała która bestia i który rycerz. **Opisz każdy krok rozumowania.**

ZBIORY

Zadanie 8 Zapisz za pomocą symboli matematycznych zbiory

8.1 *Zbiór wszystkich liczb naturalnych większych od 5 i mniejszych od 27.*

8.2 *Zbiór wszystkich liczb naturalnych podzielnych przez 4.*

8.3 *Zbiór wszystkich liczb naturalnych podzielnych przez przynajmniej jedną z liczb naturalnych od 2 do 7.*

8.4 *Zbiór wszystkich liczb naturalnych podzielnych przez przynajmniej jedną z liczb naturalnych większych od 1 a mniejszych od tej pierwotnej liczby naturalnej (czyli posiadającej tzw. dzielnik właściwy).*

8.5 *Zbiór wszystkich liczb naturalnych nieposiadających dzielnika właściwego.*

8.6 *Zbiór wszystkich liczb wymiernych większych od 0 i mniejszych od 1.*

8.7 *Zbiór wszystkich dodatnich liczb wymiernych których kwadrat jest większy od 2.*

8.8 *Zbiór wszystkich liczb wymiernych których nieredukowalna postać ułamkowa ma mianownik większy niż 5.*

8.9 *Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych dla których funkcja sinus przyjmuje wartość 0.*

8.10 *Zbiór wszystkich par liczb rzeczywistych dla których druga z liczb jest kwadratem pierwszej.*

8.11 *Zbiór wszystkich par liczb rzeczywistych których iloczyn jest większy od sumy.*

Zadanie 9 Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów

9.1 $(A \cap B)' = A' \cup B'$

9.2 $(A \cup B)' = A' \cap B'$

9.3 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

9.4 $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

9.5 $A \cap B = A$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $A \subset B$

9.6 $A \cup B = A$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $B \subset A$

9.7 $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

9.8 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Zadanie 10 Zdefiniujmy operację na zbiorach $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów

10.1 $A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

10.2 $(A \div B) \div C = A \div (B \div C)$

10.3 $A \div B = \varnothing$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $A = B$.

Zadanie 11 Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów skończonych

11.1 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

11.2 *Jeżeli* $A, B \subset C$, *to* $|A \cap B| \geq |A| + |B| - |C|$.

Zadanie 12 Sprawdź, czy dla dowolnych zbiorów prawdziwe są zdania

12.1 $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$

12.2 $\big((A \cup B) \subset (A \cap B)\big) \Rightarrow (A = B)$

12.3 $\big((A \setminus B) = (A \setminus C)\big) \Rightarrow (B = C)$

12.4 $\big((A \subset B) \wedge (A \subset C)\big) \Rightarrow \big(A \subset (B \cap C)\big)$

12.5 $\big(A \subset (B \cup C)\big) \Rightarrow \big((A \subset B) \vee (A \subset C)\big)$

12.6 $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = (A \times C) \setminus (B \times D)$

Zadanie 13 Udowodnij, że

13.1 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} [\frac{1}{n}, 1] =]0, 1]$

13.2 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_+}]-\frac{1}{n}, 1] = [0, 1]$

13.3 $\bigcup_{x\in[0,1]} [x^2, x] = [0, 1]$

13.4 $\bigcup_{x\in[1,2]} [x, x^2] = [1, 4]$

13.5 $\bigcap_{x\in[2,3]} [x, x^2] = [3, 4]$

13.6 $\bigcup_{t\in[0,1]} [0, t] \times [t, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le y \le 1\}$

13.7 $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}]0, t[\times]0, \frac{1}{t}[= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \,|\, xy < 1\}$

13.8 $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y < 2tx - t^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y < x^2\}$

13.9 $\bigcup_{r\in\mathbb{R}_+} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x - r)^2 + y^2 < r^2\} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

13.10 $\bigcup_{r\in\mathbb{R}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x - r)^2 + y^2 < \frac{1}{2}r^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| > |y|\}$

Zadanie 14 Zaznacz na płaszczyźnie zbiory

14.1 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy \le 8\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x + y| \le 6\}$

14.2 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 2\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \ge x^2\}$

14.3 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 < y < \frac{1}{2}x^2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 < x < \frac{1}{2}y^2\}$

14.4 $\bigcup_{t\in[0,1]} [t, 3 + 2t] \times [t, 3 - 2t]$

14.5 $\bigcup_{t\in[0,\pi]} [0, t] \times [0, \sin t]$

Zadanie 15 Niech $f_k(x) = x^2 + (2 - k)x + 1$. Zapisz jawnie zbiory $\{k \in \mathbb{R} \,|\, \forall x \in \mathbb{R} : f_k(x) > 0\}$ oraz $\{k \in \mathbb{R} \,|\, \forall x > 0 : f_k(x) > 0\}$.

FUNKCJE I RELACJE

Zadanie 16 Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Zapisz jawnie zbiory $f([-1, 2])$, $f(]-1, 2[)$, $f^{-1}([-1, 2])$, $f^{-1}([1, 2])$.

Zadanie 17 Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$. Zaznacz na płaszczyźnie zbiory $f^{-1}([-1, 2])$, $f^{-1}([1, 4])$.

Zadanie 18 Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów X, Y i dowolnej funkcji $f : X \to Y$

18.1 $\forall A, B \subset X : (A \subset B) \Rightarrow \big(f(A) \subset f(B)\big)$

18.2 $\forall A, B \subset Y : (A \subset B) \Rightarrow \big(f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)\big)$

18.3 $\forall A \subset X : A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$, *a gdy funkcja* f *jest injekcją, zachodzi równość.*

18.4 $\forall A \subset Y : f\big(f^{-1}(A)\big) \subset A$, *a gdy funkcja* f *jest surjekcją, zachodzi równość.*

Zadanie 19 Sprawdź, czy podana relacja $R : A \times B \to \{\text{prawda, fałsz}\}$ jest relacją funkcyjną

19.1 $A = B = \mathbb{N}_+$, xRy *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x|y$

19.2 $A = B = \mathbb{Z}$, xRy *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x = 2y$

19.3 $A = B = \mathbb{R}$, xRy *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x = 2y$

19.4 $A = B = \mathbb{R}$, xRy *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x - y \in \mathbb{Z}$

19.5 $A = B = \mathbb{R}_+$, xRy *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x^2 + y^2 = 1$

19.6 $A = B = \mathbb{R}_+$, xRy *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x^2 - y^2 = 1$

19.7 $A = B = \mathbb{R}_+$, xRy *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x^2 - y^2 = -1$

19.8 $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $xR(y_1, y_2)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x = y_1$

19.9 $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $(x_1, x_2)Ry$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x_1 = y$

Zadanie 20 Sprawdź, czy podana relacja $R : A \times A \to \{\text{prawda, fałsz}\}$ jest relacją równoważności. Jeśli jest, opisz jej klasy równoważności.

20.1 $A = \mathbb{N}_+$, xRy *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x|y$

20.2 $A = \mathbb{Z}$, xRy *wtedy i tylko wtedy, gdy* $3|(x - y)$

20.3 $A = \mathbb{R}$, *xRy wtedy i tylko wtedy, gdy* $x - y \in \mathbb{Z}$

20.4 $A = \mathbb{R}$, *xRy wtedy i tylko wtedy, gdy* $x^2 = y^2$

20.5 $A = \mathbb{R}$, *xRy wtedy i tylko wtedy, gdy* $\sin x = \sin y$

20.6 $A = \mathbb{R}$, *xRy wtedy i tylko wtedy, gdy* $x = y^2$ *lub* $y = x^2$

20.7 $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x_1, x_2)R(y_1, y_2)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x_1 + y_2 = x_2 + y_1$

20.8 $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x_1, x_2)R(y_1, y_2)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x_1 y_2 = x_2 y_1$

20.9 $A = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\}$, $(x_1, x_2)R(y_1, y_2)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x_1 y_2 = x_2 y_1$

INDUKCJA MATEMATYCZNA

Zadanie 21 Udowodnij, korzystajac z indukcji matematycznej, że dla dowolnej liczby naturalnej n

21.1 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

21.2 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

21.3 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

21.4 $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$

21.5 $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

21.6 $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, *dla* $q \neq 1$

21.7 *liczba* $n^3 + 2n$ *jest podzielna przez 3*

21.8 *liczba* $17n^3 + 103n$ *jest podzielna przez 6*

21.9 *liczba* $2^{2n+1} + 1$ *jest podzielna przez 3*

21.10 *liczba* $4^n + 15n - 1$ *jest podzielna przez 9*

21.11 $(1 + a)^n \geq 1 + na$ *dla* $a > -1$

21.12 *wielomian* $(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1$ *jest podzielny przez wielomian* $x^2 - 2x + 1$

Zadanie 22 .

22.1 *Udowodnij, że jeżeli* $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $\forall k \in \mathbb{N} : F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, *oraz* $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, *to*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \frac{(-1)^n}{\varphi^n}\right)$$

22.2 *Udowodnij, że jeżeli* $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $\forall k \in \mathbb{N} : a_{k+2} = 5a_{k+1} - 6a_k$, *to*

$$a_n = 3^n - 2^n$$

22.3 *Udowodnij, że jeżeli* $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $\forall k \in \mathbb{N} : a_{k+2} = 4a_{k+1} - 4a_k$, *to*

$$a_n = n2^{n-1}$$

KRESY

Zadanie 23 Niech A_i, $i \in I$ będzie pewną rodziną zbiorów, $B = \bigcup_{i\in I} A_i$, a f będzie pewną funkcją $f : B \to \mathbb{R}$. Niech $M_i = \sup\{f(x) \,|\, x \in A_i\}$ oraz $M = \sup\{f(x) \,|\, x \in B\}$. Udowodnij, że $M = \sup\{M_i \,|\, i \in I\}$.

(Komentarz: analogiczne twierdzenie zachodzi dla kresów dolnych.)

Zadanie 24 Uzasadnij, że kresami: górnym i dolnym zbioru

24.1 $\{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ *są odpowiednio* $\sqrt{2} - 1$ *oraz* 0.

24.2 $\{\frac{x^2}{x^4+1} \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ *są odpowiednio* $\frac{1}{2}$ *oraz* 0.

Zadanie 25 Rozstrzygnij, czy podane zbiory są ograniczone od góry i dołu, a jeśli tak, znajdź ich kresy.

25.1 $\{\frac{m}{(m+n)n} \,|\, m, n \in \mathbb{N}_+\}$

25.2 $\{\sqrt{x+1} - \lfloor\sqrt{x}\rfloor \,|\, x \in \mathbb{R}_+\}$, *gdzie* $\lfloor x \rfloor$ *oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż* x.

CIĄGI

Zadanie 26 Rozstrzygnij, czy podane ciągi są monotoniczne (a jeśli tak, to jak) oraz czy są ograniczone (z góry i z dołu).

26.1 $a_n = \frac{1}{n^2+n}$

26.2 $a_n = \frac{2^n+3}{2^n+5}$

26.3 $a_n = 2^n - n$

26.4 $a_n = \frac{1}{2-(-1)^n}$

26.5 $a_n = \frac{1}{n-(-1)^n}$

26.6 $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$

26.7 $a_n = \sqrt{n + \frac{1}{n}}$

26.8 $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

26.9 $a_n = \sqrt[n]{2}$

26.10 $a_n = 2^{n-\sqrt{n}}$

26.11 $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

26.12 $a_n = \frac{2^n}{n!}$

26.13 $a_n = \frac{n^n}{n!}$

Zadanie 27 Znajdź granice podanych ciągów

27.1 $a_n = \frac{2^n-1}{5^n+1}$

27.2 $a_n = \frac{3^n+1}{3^n+4}$

27.3 $a_n = \frac{5n^2+6n}{5n^2-3}$

27.4 $a_n = \frac{12n^2+7n}{n^3-9}$

27.5 $a_n = \frac{4n^3-3n}{2n^2+5}$

27.6 $a_n = \frac{2n^3}{2n^2+3} + \frac{1-5n^2}{5n+1}$

27.7 $a_n = \frac{n}{2^n}$

27.8 $a_n = \frac{n^4}{n^2+2^n}$

27.9 $a_n = \frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{8n^3-3n^2}}$

27.10 $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$

27.11 $a_n = \sqrt{4n^2+2n+5} - 2n$

27.12 $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$

27.13 $a_n = n(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-1})$

27.14 $a_n = \sqrt[3]{(n+1)^3-1} - \sqrt[3]{(n-1)^3+1}$

27.15 $a_n = n^2(\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1})$

27.16 $a_n = \sqrt[3]{(n+2)(n+4)(n+5)} - \sqrt[3]{n(n+1)(n+3)}$

27.17 $a_n = \sqrt{n^4+n^3} - n^2 - \sqrt{n^2+n}$

27.18 $a_n = \sqrt[99]{n^{100}+n^{99}} - n$

27.19 $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}-1} - \frac{2}{\sqrt[n]{4}-1}$

27.20 $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \frac{3}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+1}$

27.21 $a_n = \frac{\sqrt{2^n+1}}{\sqrt[3]{3^n+1}}$

27.22 $a_n = \sqrt[n]{4^n + 7\cdot 2^n + 1}$

27.23 $a_n = \sqrt[n]{3^n + n^3}$

27.24 $a_n = \sqrt[n]{3+\sin n}$

27.25 $a_n = \sqrt[n]{\frac{3^n+5^n}{2^n+7^n}}$

Zadanie 28 W zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ znajdź granice ciągów

28.1 $a_n = \frac{n+1}{n+n^p}$

28.2 $a_n = \frac{pn^2}{(p-1)n^2+n}$

28.3 $a_n = \frac{(p-2)^{n+1}}{(p^2-2p-3)^{n-2}}$

28.4 $a_n = \sqrt[p]{n^p+n}$

28.5 $a_n = \sqrt[n]{p^n+2^n}$

28.6 $a_n = \sqrt[n]{p^{2n}+2p^n+2}$

Zadanie 29 Znajdź granice podanych ciągów (lub uzasadnij, że nie istnieją):

29.1 $a_n = \frac{2n+1}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2n+1}$

29.2 $a_n = \frac{2n+1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n+1}$

29.3 $a_n = \frac{2n+1}{\pi n^2} \sin \frac{\pi n^2}{2n+1}$

29.4 $a_n = \frac{\pi n^2}{2n+1} \sin \frac{\pi n^2}{2n+1}$

29.5 $a_n = \frac{\pi n}{2n+1} \sin \frac{\pi n^2}{2n+1}$

29.6 $a_n = \frac{n^2+1}{\pi n^2} \sin \frac{\pi n^2}{n^2+1}$

29.7 $a_n = \frac{n^2+1}{2\pi} \sin \frac{2\pi n^2}{n^2+1}$

29.8 $a_n = \frac{\pi n^2}{n+1} \sin \frac{\pi n^2}{n+1}$

29.9 $a_n = \frac{2\pi n^2}{n+1} \sin \frac{2\pi n^2}{n+1}$

29.10 $a_n = \frac{2n+1}{\pi} \cos \frac{\pi}{2n+1}$

29.11 $a_n = \frac{2n+1}{\pi} \cos \frac{\pi n}{2n+1}$

29.12 $a_n = \frac{n+1}{\pi n^2} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$

29.13 $a_n = \frac{n+1}{\pi n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$

29.14 $a_n = \frac{2n+1}{2\pi n^2} \cos \frac{2\pi n^2}{2n+1}$

29.15 $a_n = \frac{2n+1}{\pi} \cos \frac{4\pi n^2}{2n+1}$

29.16 $a_n = \frac{8\pi n(n+1)}{4n+3} \cos \frac{8\pi n(n+1)}{4n+3}$

29.17 $a_n = \frac{2n+1}{\pi} \mathrm{tg} \frac{\pi}{2n+1}$

29.18 $a_n = \frac{2n+1}{\pi n} \mathrm{tg} \frac{\pi n}{2n+1}$

29.19 $a_n = \frac{2n-1}{\pi n} \mathrm{tg} \frac{\pi n}{2n-1}$

29.20 $a_n = \frac{2n-1}{\pi n^2} \mathrm{tg} \frac{\pi n}{2n-1}$

29.21 $a_n = \frac{2n-1}{\pi n^2} \mathrm{tg} \frac{\pi n^2}{2n-1}$

29.22 $a_n = \frac{2n-1}{2\pi n^2} \mathrm{tg} \frac{2\pi n^2}{2n-1}$

Zadanie 30 Znajdź granice podanych ciągów

30.1 $a_n = \left(\frac{n}{n-3}\right)^n$

30.2 $a_n = \left(\frac{3n}{n-3}\right)^{3n}$

30.3 $a_n = \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{3n-1}$

30.4 $a_n = \left(\frac{n}{n-3}\right)^{3n-1}$

30.5 $a_n = \left(\frac{(n+1)(3n+2)}{(3n-1)(n+2)}\right)^{(2n-1)(n+3)}$

30.6 $a_n = \left(\frac{(n+1)(3n+2)}{(3n+1)(n+2)}\right)^{(2n+1)(n+3)}$

30.7 $a_n = \left(\frac{(n+1)(3n+2)}{(3n+1)(n+2)}\right)^{2n+1}$

30.8 $a_n = \left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}\right)^n$

30.9 $a_n = \left(\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{n}\right)^n$

30.10 $a_n = \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)^n$

30.11 $a_n = \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n$

30.12 $a_n = \left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)^n$

30.13 $a_n = \left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)^n$

30.14 $a_n = \left(\cos\frac{2n+1}{\sqrt{n+2}}\right)^n$

30.15 $a_n = \left(\cos(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right)^n$

30.16 $a_n = \left(2-\sqrt[n]{2}\right)^n$

30.17 $a_n = \left(\frac{1+\sqrt[n]{5}}{2}\right)^n$

30.18 $a_n = \left(\frac{1+\sqrt[n]{5}}{1+\sqrt[n]{7}}\right)^n$

30.19 $a_n = \left(\frac{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{5}}{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{7}}\right)^n$

Zadanie 31 Znajdź granice podanych ciągów

31.1 $a_n = n(1 - \mathrm{e}^{\frac{2}{n+1}})$

31.2 $a_n = n(1 - 2^{\frac{2}{n+2}})$

31.3 $a_n = n(\mathrm{e}^{\frac{n}{n+1}} - \mathrm{e}^{\frac{n+1}{n}})$

31.4 $a_n = n(3^{\frac{n}{n+1}} - 2^{\frac{n}{n+1}} - 1)$

31.5 $a_n = n \ln \frac{n+1}{n-1}$

31.6 $a_n = \frac{n^2}{n+1} \ln \frac{n}{n+1}$

31.7 $a_n = \frac{n^2}{2n+1} \ln \frac{n}{2n+1}$

31.8 $a_n = 2^n \ln \frac{2^n+1}{2^n+3}$

31.9 $a_n = 7^n \ln \frac{3^n+5^n}{2^n+7^n}$

31.10 $a_n = 5^n \ln \frac{3^n+5^n}{2^n+5^n}$

31.11 $a_n = n \ln(1 - \sin \frac{1}{n})$

31.12 $a_n = n^2\big(\ln(1 - \sin \frac{1}{n}) + \ln(1 + \sin \frac{1}{n})\big)$

31.13 $a_n = n \ln(\sin \frac{1}{n})$

31.14 $a_n = \frac{1}{n} \ln(\sin \frac{1}{n})$

GRANICE FUNKCJI

Zadanie 32 Znajdź granice podanych funkcji we wszystkich punktach brzegowych dziedziny (z obu stron), w tym w $\pm\infty$ (gdy to ma sens).

32.1 $f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^3}$

32.2 $f(x) = \frac{x^2}{4x^2-1}$

32.3 $f(x) = \frac{x^3}{(x^2-1)^2}$

32.4 $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

32.5 $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{4x^2-1}$

32.6 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}$

32.7 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1}$

32.8 $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

32.9 $f(x) = 2x + \sqrt{x^2+1}$

32.10 $f(x) = 2x - \sqrt{x^2+1}$

32.11 $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

32.12 $f(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}$

32.13 $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

32.14 $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

32.15 $f(x) = \frac{|x-1|+|x|-1}{x}$

32.16 $f(x) = \frac{x^7-1}{x^4-1}$

32.17 $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$

32.18 $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{7x}-\mathrm{e}^{-7x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$

32.19 $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{3x}-3}{2x}$

32.20 $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}-1}$

32.21 $f(x) = \frac{1}{x}\ln(1+x+x^2)$

32.22 $f(x) = \frac{1}{x}\ln(x+x^2)$

32.23 $f(x) = \frac{1}{x}\ln(1-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x^2)$

32.24 $f(x) = \frac{1}{x-1}\ln(2x-x^2)$

32.25 $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$

32.26 $f(x) = x\cos\frac{1}{x}$

32.27 $f(x) = \mathrm{tg}\frac{\pi x}{|x|+2}$

32.28 $f(x) = \mathrm{tg}\frac{\pi x}{|x|+1}$

32.29 $f(x) = \mathrm{tg}\frac{\pi x}{x^2+1}$

Zadanie 33 Znajdź wartości parametrów $p, q, r \in \mathbb{R}$ dla których podane funkcje sa ciągłe na całej dziedzinie.

33.1 $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+2x^2}-\sqrt{1+x^2}}$ *dla* $x \neq 0$, $f(x) = p$ *dla* $x = 0$

33.2 $f(x) = \frac{x^p-1}{x-1}$ *dla* $x > 1$, $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\ln(3x-2)}$ *dla* $x \geq 1$

33.3 $f(x) = \frac{p^x-3}{x-2}$ *dla* $x < 2$, $f(x) = q$ *dla* $x \geq 2$

33.4 $f(x) = \frac{e^{x+2}+e^x+e^{1-2x}-p}{x^2-1}$ *dla* $|x| > 1$, $f(x) = qx + r$ *dla* $|x| \leq 1$