I seria zadań z mechaniki kwantowej I (2004/2005) – 3 zadania

Zadanie1.

Znaleźć szereg Fouriera dla funkcji-piły o okresie 2π zdefiniowanej w przedziale [-π, π] wzorem $f(x)=|x|$. Wykazać, że $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}$.

Zadanie 2.

Gdy na szczeliny przesłony pada prostopadle fala płaska o długości fali λ i amplitudzie $\psi(x)$, to amplituda fali ugiętej pod kątem θ jest proporcjonalna do jej transformaty Fouriera:

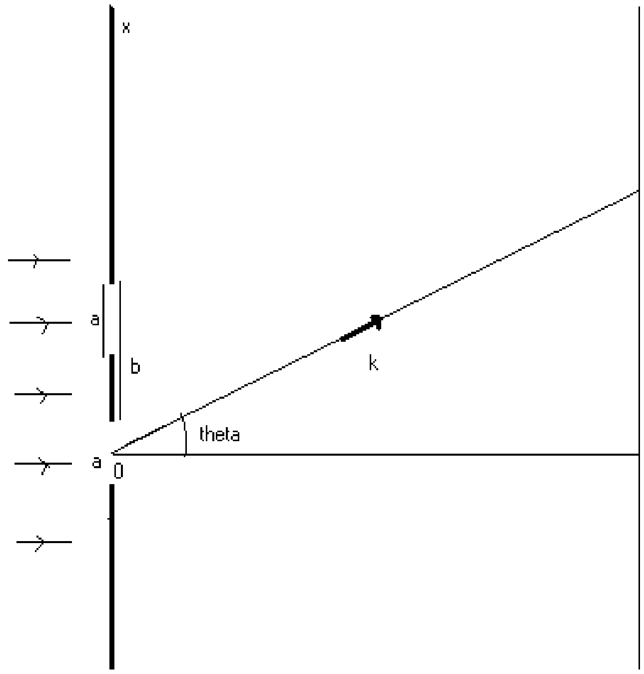
$$\tilde{\psi}(k_x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ik_x x}\psi(x)dx, \quad \text{gdzie } k_x=\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta .$$

Znaleźć i przedyskutować (wykres!) rozkład natężenia fali ugiętej $|(\tilde{\psi}(k_x)|^2$ przy dyfrakcji:

a) na pojedynczej szczelinie o szerokości a, czyli dla $\psi(x)=\begin{cases}A & x\in[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]\\ 0 & \text{dla pozostalych } x\end{cases}$,

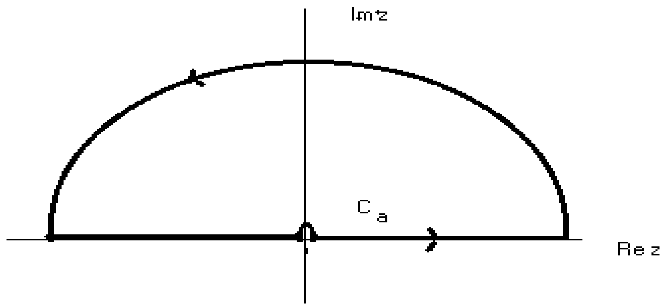
b) na siatce dyfrakcyjne z N szczelinami o szerokości a odległymi o b, czyli dla

$$\psi(x)=\begin{cases}A & x\in[-\frac{a}{2}+nb,\frac{a}{2}+nb],\ n=0,1,\ldots,N-1\\ 0 & \text{dla pozostalych } x\end{cases}.$$

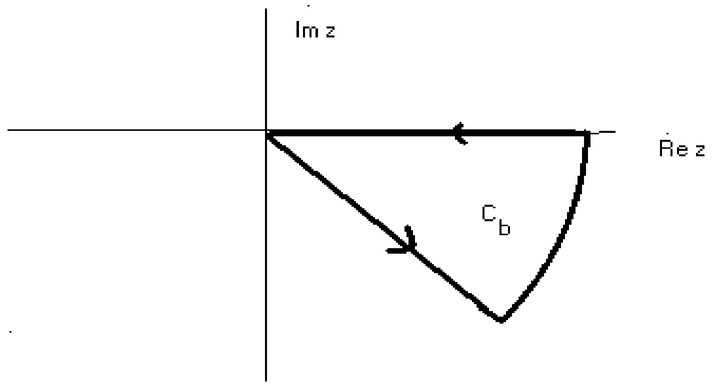


Zadanie 3.

a) Wykazać, że $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$. Wskazówka: Rozważyć całkę $\int_{C_a} \frac{e^{iz}}{z} dz$.



b) Obliczyć całkę Fresnela $\int_{0}^{\infty} e^{ix^2} dx$. Wskazówka: Rozważyć całkę $\int_{C_b} e^{-z^2} dz$.



7 października 2004