Seria 3

Konwencje. N oznacza liczbę cząstek (w zadaniu 3: atomów), k_B – stałą Boltzmanna, $R = N_\mathrm{A} k_\mathrm{B}$. Stosujemy $S = k_\mathrm{B} \ln \Omega$, gdzie Ω liczy stany o zadanej energii lub w wąskiej warstwie energetycznej. Relacje termodynamiczne wyznaczamy z gładkiej, makroskopowej postaci entropii. Uzasadnij użyte przybliżenia.

Zadanie 1. Dlaczego logarytm?

Załóż, że $S = f(\Omega)$, entropia jest addytywna, a liczby mikrostanów układów niezależnych o osobno ustalonych makrostanach się mnożą. **Dodatkowo przyjmij, że f jest ściśle rosnąca.** Wykaż, że $f(\Omega) = k \ln \Omega$ dla pewnej stałej $k > 0$. Wyjaśnij, dlaczego sama addytywność nie wystarcza.

Zadanie 2. Model Einsteina ciała stałego

Układ N atomów modelujemy przez $M = 3N$ rozróżnialnych, niezależnych jednowymiarowych oscylatorów o częstości ω i energiach $\hbar\omega(n + 1/2)$, $n = 0, 1, \ldots$. Przy $E = \hbar\omega(q + M/2)$ policz dokładnie $\Omega(q, M)$ i S. W granicy termodynamicznej wyznacz $E(T)$ oraz molowe ciepło $c_V = (N_\mathrm{A}/N)(\partial E/\partial T)_{V,N}$. Zbadaj granice $T \ll \hbar\omega/k_\mathrm{B}$ i $T \gg \hbar\omega/k_\mathrm{B}$. Przy stałym V przyjmij $\omega = \mathrm{const}$; uwzględnij energię zerową.

Zadanie 3. Układ dwupoziomowy

Izolowany układ zawiera N niezależnych, rozróżnialnych obiektów. Każdy ma dokładnie dwa niezdegenerowane stany o energiach $-\varepsilon_0, +\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$; innych stopni swobody nie uwzględniamy.

a) Wyznacz $\Omega(N, E)$ i dozwolone wartości E.

b) Dla $N \gg 1$ wyznacz $S(E, N)$, $T(E)$ i $E(T)$. Omów obie gałęzie temperatury, także inwersję obsadzeń.

c) Oblicz pojemność cieplną przy stałych N, ε_0 oraz jej granice.

Zadanie 4. Gaz twardych kul i objętość wyłączona

Rozważ klasyczny gaz N identycznych twardych kul o masie m, promieniu a i **geometrycznej objętości** $V_0 = 4\pi a^3/3$. Zderzenia są sprężyste. Przyjmij $\eta = NV_0/V \ll 1$ i pomiń efekty brzegowe.

a) Wyznacz zależność $\Omega(E, V, N)$ od V do pierwszej poprawki w gęstości. Oblicz $B_2 = b$ w równaniu $p = \rho k_\mathrm{B} T[1 + B_2\rho + O((\rho b)^2)]$, gdzie $\rho = N/V$.

b) Przy **dodatkowym założeniu modelowym** $Q_N(V) \simeq (V - Nb)^N$ dla całki konfiguracyjnej wyprowadź $p = Nk_\mathrm{B}T/(V - Nb)$. Ustal związek b z V_0 i wyjaśnij, dlaczego nie jest to dokładne równanie stanu twardych kul.

Zadanie 5. Kula w wielu wymiarach

Wyprowadź wzór na objętość kuli o promieniu r w d wymiarach, $d \in \mathbb{N}_{>0}$. Podaj także pole jej brzegu. Sprawdź wynik dla $d = 1, 2, 3$.

Zadanie 6. Klasyczny gaz doskonały

Rozważ N identycznych cząstek o masie m w trzech wymiarach, bez oddziaływań i bez wewnętrznych stopni swobody, z Hamiltonianem $H = \sum_i \mathbf{p}_i^2/(2m)$. Wyznacz entropię mikrokanoniczną, temperaturę i równanie stanu. W rachunku zastosuj miarę

$$\frac{\mathrm{d}^{3N}q\ \mathrm{d}^{3N}p}{N!h^{3N}}, \qquad h = 2\pi\hbar.$$

Odróżnij pomocniczą liczbę stanów $\Phi(E) = \int_{H\le E} \mathrm{d}\Gamma$ od liczby stanów w warstwie $\Omega(E, \Delta E) = \Phi(E + \Delta E) - \Phi(E)$. Wyprowadź wzór Sackura–Tetrode'a w granicy termodynamicznej i podaj warunek stosowalności opisu klasycznego.

Zadanie 7. Kwantowy gaz doskonały – określenie statystyki

Rozważ osobno jednorodny gaz identycznych **bozonów** oraz **fermionów** o masie m, ze stałą liczbą cząstek N, bez oddziaływań, z dyspersją $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/(2m)$. Przyjmij jeden dostępny stan wewnętrzny (degeneracja $g = 1$) i periodyczne warunki brzegowe w objętości $V = L^3$.

a) Zapisz liczenie mikrostanów przez liczby obsadzeń przy ustalonych N, E. W granicy małych obsadzeń odzyskaj wynik z zadania 6.

b*) Bez przybliżenia klasycznego wyznacz entropię przez maksymalizację liczby mikrostanów przy ustalonych N, E, V. Podaj równania wyznaczające T oraz ciśnienie. Dla bozonów uwzględnij stan podstawowy i kondensację; dla fermionów omów granicę $T \to 0$.

Punkt b) jest rozszerzeniem: wymaga kombinatoryki obsadzeń oraz całek Bosego i Fermiego. Wersja podstawowa zadania obejmuje punkt a).*

Zadanie 8. Gaz ultrarelatywistyczny

Rozważ nieoddziałujący gaz N identycznych cząstek z **zachowaną liczbą cząstek**, bez degeneracji wewnętrznej, w granicy termodynamicznej i **w reżimie Maxwella–Boltzmanna**. Energie jednocząstkowe wynoszą

$$\varepsilon(n_x, n_y, n_z) = \frac{\pi\hbar c}{L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}, \qquad n_x, n_y, n_z = 1, 2, \ldots, \quad V = L^3.$$

Przejdź do przybliżenia ciągłego ($\varepsilon = c|\mathbf{p}|$) i metodą mikrokanoniczną wyznacz $S(E, V, N)$, $E(T)$ oraz p. Oblicz $C_V = (\partial E/\partial T)_{V,N}$ i $C_p = (\partial(E + pV)/\partial T)_{p,N}$ oraz wykaż, że

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{4}{3}.$$

Porównaj z jednoatomowym, nierelatywistycznym gazem klasycznym. Wyjaśnij, dlaczego sam podany wzór na poziomy energii nie wystarcza bez założeń o statystyce i zachowaniu N.